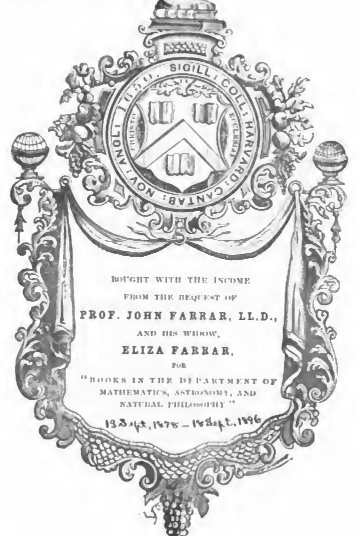
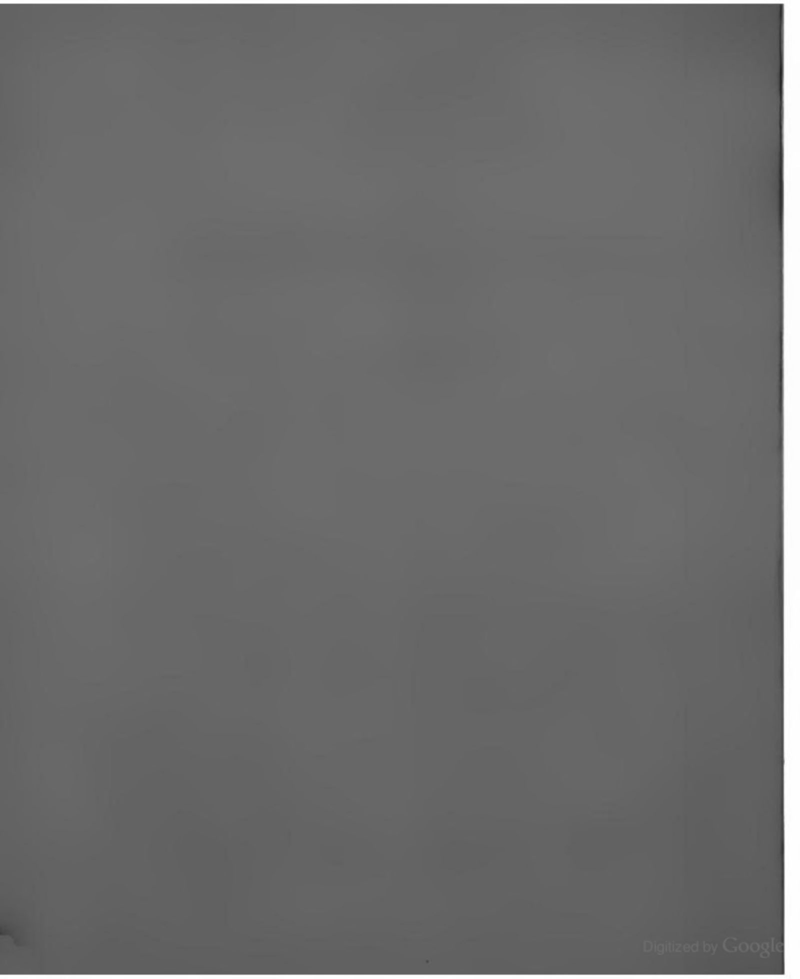



SIGILL : COLL : HARVARD : CANTAB : NOV : ANGL : 1650
CHRISTO
ECCLESIAE







NEUESTE

SCHRIFTEN

DER

NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT

IN

DANZIG.

SECHSTEN BANDES ERSTES HEFT.

DANZIG.

AUF KOSTEN DER NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT.

1858.

Untersuchungen

über

eine Methode zur Berechnung der planetarischen Störungen

von

C. T. Anger.



Danzig.
1858.

§ 1.

Die Acta Petrop. für das Jahr 1779, Th. II. enthalten eine Abhandlung *Euler's,* welche den Titel führt: „*Cautiones necessariae in determinatione motus planetarum observandae*", in welcher die Störungen nicht der Elemente, sondern der rechtwinkligen Coordinaten eines Planeten untersucht werden. *Euler* untersucht die gegenseitigen Störungen zweier Planeten, worauf er für Jupiter und Saturn ein Rechnungs-Beispiel hinzufügt. Der Zweck dieses Aufsatzes ist, die *Euler*'sche Methode darzulegen in der Weise wie sie ursprünglich gegeben wurde, sie darauf auf ihren einfachsten Ausdruck zurückzuführen und endlich diejenigen Bemerkungen folgen zu lassen, welche sich auf die Anwendbarkeit dieser Methode zur Berechnung der speciellen Störungen beziehen. Um aber diesem Aufsatze eine nicht zu grosse Ausdehnung zu geben, werde ich die Masse des gestörten Planeten gleich Null setzen, und die Bahn des störenden Planeten als gegeben annehmen, in welcher Form die Aufgabe für die Berechnung der Störungen der kleinen Planeten in Anwendung kommt.

§ 2.

Bezeichnet man die rechtwinkligen Coordinaten des gestörten Planeten durch x, y, z des störenden durch x', y', z', und setzt man

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$
$$r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$
$$\varrho^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2;$$

so werden, wenn man, wie jetzt gewöhnlich, durch k die *Gauss*'sche Constante bezeichnet, die Gleichungen von welchen *Euler* ausgeht:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{1}{k^2}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{r^3} + \frac{m(x'-x)}{\varrho^3} - \frac{mx'}{r'^3} \\
\frac{1}{k^2}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{y}{r^3} + \frac{m(y'-y)}{\varrho^3} - \frac{my'}{r'^3} \\
\frac{1}{k^2}\cdot\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{z}{r^3} + \frac{m(z'-z)}{\varrho^3} - \frac{mz'}{r'^3}
\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots (1)$$

wo t die Zeit, m die Masse des störenden Planeten bedeutet, und der Mittelpunkt der Sonne zum Anfangspunkte der Coordinaten angenommen ist. Setzt man nun

$$\begin{array}{ll}
x = x_0 + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3 + \ldots & x' = x'_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \ldots \\
y = y_0 + B_1 t + B_2 t^2 + B_3 t^3 + \ldots & y' = y'_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \ldots \\
z = z_0 + C_1 t + C_2 t^2 + C_3 t^3 + \ldots & z' = z'_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \ldots
\end{array}$$

so wird

$$\begin{array}{l}
\frac{d^2x}{dt^2} = 2A_2 + 6A_3 t + \ldots \\
\frac{d^2y}{dt^2} = 2B_2 + 6B_3 t + \ldots \\
\frac{d^2z}{dt^2} = 2C_2 + 6C_3 t + \ldots
\end{array}$$

Wenn man diese Ausdrücke für die auf der linken Seite in (1) befindlichen Glieder, auf der rechten Seite aber, wo keine Differenzialquotienten vorkommen, die für $x, y, z; x', y', z'$ angenommenen Ausdrücke setzt, so kann man auf diese Weise die noch unbekannten Coefficienten in x, y, z bestimmen, während die in x', y', z' vorkommenden als bekannt angesehen sind. Wenn man, wie *Euler* annimmt, nicht über die dritte Potenz von t hinausgeht, so kann man da dann auf der linken Seite die Zeit t nicht zu einer höhern als zur ersten Potenz vorkommt, auch auf der rechten Seite die höhern Potenzen vernachlässigen, so dass es genügt, darin zu setzen

$$x = x_0 + A_1 t;\ y = y_0 + B_1 t;\ z = z_0 + C_1 t,$$
$$\text{und } x' = x'_0 + a_1 t;\ y' = y'_0 + b_1 t;\ z' = z'_0 + c_1 t.$$

§ 3.

Setzt man nun

$$\begin{array}{l}
r^2_0 = x^2_0 + y^2_0 + z^2_0 \\
r'^2_0 = x'^2_0 + y'^2_0 + z'^2_0 \\
\varrho^2_0 = (x'_0 - x_0)^2 + (y'_0 - y_0)^2 + (z'_0 - z_0)^2
\end{array}$$

$$f = x_0 A_1 + y_0 B_1 + z_0 C_1$$
$$g = x'_0 a_1 + y'_0 b^1 + z'_0 c_1$$
$$h = (x'_0 - x_0)(a_1 - A_1) + (y'_0 - y_0)(b_1 - B_1) + (z'_0 - z_0)(c_1 - C_1)$$

und noch, der Kürze wegen,

$$x'_0 - x = \xi;\ y'_0 - y_0 = \eta;\ z'_0 - z_0 = \vartheta$$
$$a_2 - A_1 = \xi_1;\ b_1 - B_1 = \eta_1;\ c_1 - C_1 = \vartheta_1$$

wodurch

$$h = \xi . \xi_1 + \eta . \eta_1 + \vartheta . \vartheta_1$$

wird, so ergiebt sich

$$r^2 = r^2_0 + 2f.t$$
$$r'^2 = r'^2_0 + 2g.t$$
$$\varrho^2 = \varrho^2_0 + 2h.t$$

und, da nur die dritten Potenzen dieser Distanzen in den Nennern in (1) vorkommen, mit Übergehung der die erste Potenz von t übersteigenden,

$$\frac{1}{r^3} = \frac{1}{r^3_0} - \frac{3f}{r^5_0}t;\ \frac{1}{r'^3} = \frac{1}{r'^3_0} - \frac{3g}{r'^5_0}t;\ \frac{1}{\varrho^3} = \frac{1}{\varrho^3_0} - \frac{3h}{\varrho^5_0}t$$

woraus man erhält:

$$\frac{x}{r^3} = \frac{x_0}{r^3_0} + \left(\frac{A_1}{r^3_0} - \frac{3x_0 f}{r^5_0}\right)t$$
$$\frac{y}{r^3} = \frac{y_0}{r^3_0} + \left(\frac{B_1}{r^3_0} - \frac{3y_0 f}{r^5_0}\right)t$$
$$\frac{z}{r^3} = \frac{z_0}{r^3_0} + \left(\frac{C_1}{r^3_0} - \frac{3z_0 f}{r^5_0}\right)t$$

$$\frac{x'}{r'^3} = \frac{x'_0}{r'^3_0} + \left(\frac{a_1}{r'^3_0} - \frac{3x'_0 g}{r'^5_0}\right)t$$
$$\frac{y'}{r'^3} = \frac{y'_0}{r'^3_0} + \left(\frac{b_1}{r'^3_0} - \frac{3y'_0 g}{r'^5_0}\right)t$$
$$\frac{z'}{r'^3} = \frac{z'_0}{r'^3_0} + \left(\frac{c_1}{r'^3_0} - \frac{3z'_0 g}{\varrho'^5_0}\right)t$$

$$\frac{x'-x}{\varrho^3} = \frac{\xi}{\varrho^3_0} + \left(\frac{\xi_1}{\varrho^3_0} - \frac{3\xi h}{\varrho^5_0}\right)t$$
$$\frac{y'-y}{\varrho^3} = \frac{\eta}{\varrho^3_0} + \left(\frac{\eta_1}{\varrho^3_0} - \frac{3\eta h}{\varrho^5_0}\right)t$$
$$\frac{z'-z}{\varrho^3} = \frac{\vartheta}{\varrho^3_0} + \left(\frac{\vartheta_1}{\varrho^3_0} - \frac{3\vartheta h}{\varrho^5_0}\right)t.$$

§ 4.

Wenn man diese Werthe in die Gleichungen (1) hineinsetzt, so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} 2A_2 &= -\frac{k^2 x_0}{r^3_0} + \frac{m k^2 \xi}{\varrho^3_0} - \frac{m k^2 x'_0}{r'^3_0} \\ 2B_2 &= -\frac{k^2 y_0}{r^3_0} + \frac{m k^2 \eta}{\varrho^3_0} - \frac{m k^2 y'_0}{r'^3_0} \\ 2C_2 &= -\frac{k^2 z_0}{r^3_0} + \frac{m k^2 \vartheta}{\varrho^3_0} - \frac{m k^2 z'_0}{r'^3_0} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\left.\begin{aligned} 6A_3 &= -k^2\left(\frac{A_1}{r^3_0} - \frac{3x_0 f}{r^5_0}\right) + mk^2\left(\frac{\xi_1}{\varrho^3_0} - \frac{3\xi h}{\varrho^5_0}\right) - mk^2\left(\frac{a_1}{r'^3_0} - \frac{3x'_0 g}{r'^5_0}\right) \\ 6B_3 &= -k^2\left(\frac{B_1}{r^3_0} - \frac{3y_0 f}{r^5_0}\right) + mk^2\left(\frac{\eta_1}{\varrho^3_0} - \frac{3\eta h}{\varrho^5_0}\right) - mk^2\left(\frac{b_1}{r'^3_0} - \frac{3y'_0 g}{r'^5_0}\right) \\ 6C_2 &= -k^2\left(\frac{C_1}{r^3_0} - \frac{3z_0 f}{r^5_0}\right) + mk^2\left(\frac{\vartheta_1}{\varrho^3_0} - \frac{3\vartheta h}{\varrho^5_0}\right) - mk^2\left(\frac{c_1}{r'^3_0} - \frac{3z'_0 g}{r'^5_0}\right) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (3)$$

Die Werthe von A_1, B_1, C_1 werden so angenommen wie sie aus der rein elliptischen Bahn des gestörten Planeten hervorgehen. Die Coefficienten A_2, B_2, C_2 und A_3, B_3, C_3, welche *Euler* giebt, sind zu gross und müssen die drei ersten mit 2, die drei letzten mit 6 dividirt werden.

§ 5.

Nachdem ich im Vorhergehenden das Wesentliche der *Euler*'schen Störungs-Methode angegeben habe, bemerke ich, dass dieselbe sich durch folgende Betrachtung auf ihren einfachsten Ausdruck bringen lässt. Die Gleichungen (1) geben unmittelbar die zweiten Differenzialquotienten der gestörten Coordinaten in Beziehung auf die Zeit t. Setzt man in diese Gleichungen $t = 0$, so ergiebt sich nach dem *Maclaurin*'schen Satze

$$\left.\begin{aligned} A_2 &= \frac{1}{1.2} \cdot \frac{d^2 x}{d t^2} \\ B_2 &= \frac{1}{1.2} \cdot \frac{d^2 y}{d t^2} \\ C_2 &= \frac{1}{1.2} \cdot \frac{d^2 z}{d t^2} \end{aligned}\right\} \text{für } t = 0.$$

Die Annahme $t = 0$ ist aber keine andere als die, dass man in Stelle von $x, y, z; x', y', z'; r, r', \varrho$ die Werthe $x_0, y_0, z_0; x'_0, y'_0, z'_0; r_0, r'_0, \varrho_0$ setzt, wodurch unmittelbar ohne alle Rechnung die Gleichungen (2) entstehen. Wenn man die Gleichungen (1) in Beziehung auf t differenziirt, und dann in die dadurch erhaltenen dritten Differenzialquo-

tienten der Coordinaten $t = 0$ setzt, d. h. für die allgemeinen Werthe der rechts erscheinenden Grössen, die mit $_0$ versehenen, welche für $t = 0$ gelten, annimmt, so ergeben sich sogleich

$$\left.\begin{aligned} A_3 &= \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{d^3 x}{d t^3} \\ B_3 &= \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{d^3 y}{d t^3} \\ C_3 &= \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{d^3 z}{d t^3} \end{aligned}\right\} \text{für } t = 0$$

und man bekommt die Gleichungen (3) u. s. w., so dass die *Euler*'sche Methode in nichts anderem, als in einer einfachen Anwendung des *Maclaurin*'schen Satzes besteht, indem zugleich vorausgesetzt wird, dass die Werthe von $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ in der gestörten und ungestörten Bahn, für $t = 0$ mit einander übereinstimmen. Während also bei andern Methoden eine Integration der Gleichungen (1) durch mechanische Quadraturen herbeigeführt wird, gelangt man nach der *Euler*'schen durch fortgesetzte Differenziirungen zum Ziel.

§ 6.

Es ist nicht nöthig in A_2, B_2, C_2; A_3, B_3, C_3 die Glieder, welche von der Masse des störenden Planeten unabhängig sind, zu berechnen, denn lässt man die von der Masse abhängigen weg, so erhält man die Coordinaten des gestörten Planeten unter Voraussetzung einer rein elliptischen Bahn; diese ergeben sich aber aus der Ephemeride, welche man sich zu Anfang berechnen wird. Die Aufgabe reducirt sich hiernach darauf: die in der Ephemeride enthaltenen Zahlen durch die von der Masse des störenden Planeten abhängigen Glieder zu verbessern. Diese Ephemeride wird zugleich dazu dienen, die Werthe von A_1, B_1, C_1, welche auch in $\xi_1, \eta_1, \vartheta_1$ eingehen, durch Interpolation zu berechnen. Die Rechnung bestünde also darin, allen in der Ephemeride für ein bestimmtes, nicht zu grosses, Zeitintervall vorläufig berechneten Werthen der Coordinaten, welche wir durch $x_{,}, y_{,}, z_{,}$ bezeichnen wollen, resp. Glieder von der Form λt^2, $\lambda' t^3$; μt^2, $\mu' t^3$; νt^2, $\nu' t^3$ hinzuzufügen, wo

$$\lambda = \tfrac{1}{2} m k^2 \left(\frac{\xi}{\varrho^3_0} - \frac{x'_0}{r'^3_0}\right)$$

$$\lambda' = \tfrac{1}{6} m k^2 \left\{ \left(\frac{\xi_1}{\varrho^3_0} - \frac{3 \xi h}{\varrho^5_0}\right) - \left(\frac{a_1}{r'^3_0} - \frac{3 x'_0 g}{r'^5_0}\right) \right\}$$

$$\mu = \tfrac{1}{2} m k^2 \left(\frac{\eta}{\varrho^3_0} - \frac{y'_0}{r'^3_0} \right)$$

$$\mu' = \tfrac{1}{6} m k^2 \left\{ \left(\frac{\eta_1}{\varrho^3_0} - \frac{3 \eta h}{\varrho^5_0} \right) - \left(\frac{b_1}{r'^3_0} - \frac{3 y'_0 g}{r'^5_0} \right) \right\}$$

$$\nu = \tfrac{1}{2} m k^2 \left(\frac{\vartheta}{\varrho^3_0} - \frac{z'_0}{r'^3_0} \right)$$

$$\nu' = \tfrac{1}{6} m k^2 \left\{ \left(\frac{\vartheta_1}{\varrho^3_0} - \frac{3 \vartheta h}{\varrho^5_0} \right) - \left(\frac{c_1}{r'^3_0} - \frac{3 z'_0 g}{r'^5_0} \right) \right\}.$$

Bezeichnet man die von den Störungen afficirten Coordinaten für dieselbe Zeit t durch (x_t), (y_t), (z_t), so ist

$$(x_t) = x_t + \lambda t^2 + \lambda' t^3$$

$$(y_t) = y_t + \mu' t^2 + \mu t^3$$

$$(z_t) = z_t + \nu t^2 + \nu' t^3$$

und man erhält die drei Geschwindigkeiten der gestörten Coordinaten für die Zeit t:

$$\frac{d(x_t)}{dt} = \frac{d x_t}{dt} + 2 \lambda t + 3 \lambda' t^2$$

$$\frac{d(y_t)}{dt} = \frac{d y_t}{dt} + 2 \mu t + 3 \mu' t^2$$

$$\frac{d(z_t)}{dt} = \frac{d z_t}{dt} + 2 \nu t + 3 \nu' t^2$$

wo die Werthe der Differenzialquotienten der ungestörten Coordinaten dieselben sind, welche man schon früher aus der Ephemeride berechnet hatte.

Es wird darauf ankommen, die in den Coefficienten $\lambda, \ldots \mu, \ldots \nu, \ldots$ enthaltenen Grössen ξ, η, ϑ u. s. w. von Zeit zu Zeit zu variiren, indem man mit den für die Zeit $t = 0$ geltenden Werthen den Anfang macht, und neue zum Grunde legt, wenn ihre Beibehaltung bedenklich scheint. Man wird also die Störungen für den Verlauf einer gewissen Zeit bestimmen, die Elemente nach diesen verbessern, mit den verbesserten Elementen eine neue Ephemeride berechnen und dann von einer neuen Epoche an, welche mit dem Schlusse der ersten beginnt, für eine gewisse fernere Zeit die Störungen bestimmen.

§ 7.

Wenn wir, der gemachten Voraussetzung gemäss, die Elemente des störenden Planeten als keiner Verbesserung bedürfend ansehen, so ergiebt die Betrachtung der Glei-

chungen (2) und (3) eine wie es scheint sehr wesentliche Abkürzung der anzustellenden Rechnung. Setzt man nämlich $m = 0$, so erhält man

$$x_i = x_0 + A_1 t - \frac{1}{1.2} k^2 \frac{x_0}{r^3_0} \cdot t^2 - \frac{1}{1.2.3} k^2 \left(\frac{A_1}{r^3_0} - \frac{3 x_0 f}{r^5_0}\right) t^3 + \ldots$$
$$y_i = y_0 + B_1 t - \frac{1}{1.2} k^2 \frac{y_0}{r^3_0} \cdot t^2 - \frac{1}{1.2.3} k^2 \left(\frac{B_1}{r^3_0} - \frac{3 y_0 f}{r^5_0}\right) t^3 + \ldots$$
$$z_i = z_0 + C_1 t - \frac{1}{1.2} k^2 \frac{z_0}{r^3_0} \cdot t^2 - \frac{1}{1.2.3} k^2 \left(\frac{C_1}{r^3_0} - \frac{3 z_0 f}{r^5_0}\right) t^3 + \ldots$$

und wenn man die Werthe von x', y', z', welche für dieselbe Zeit t gelten, durch x'_i, y'_i, z'_i bezeichnet, so muss auch

$$x'_i = x'_0 + a_1 t - \frac{1}{1.2} k^2 \frac{x'_0}{r'^3_0} \cdot t^2 - \frac{1}{1.2.3} k^2 \left(\frac{a_1}{r'^3_0} - \frac{3 x'_0 g}{r'^5_0}\right) t^3 + \ldots$$
$$y'_i = y'_0 + b_1 t - \frac{1}{1.2} k^2 \frac{y'_0}{r'^3_0} \cdot t^2 - \frac{1}{1.2.3} k^2 \left(\frac{b_1}{r'^3_0} - \frac{3 y'_0 g}{r'^5_0}\right) t^3 + \ldots$$
$$z'_i = z'_0 + c_1 t - \frac{1}{1.2} k^2 \frac{z'_0}{r'^3_0} \cdot t^2 - \frac{1}{1.2.3} k^2 \left(\frac{c_1}{r'^3_0} - \frac{3 z'_0 g}{r'^5_0}\right) t^3 + \ldots$$

sein, es ist also

$$\left.\begin{aligned}
(x_i) - x_i &= (x'_i - x'_0 - a_1 t)\, m + \frac{m k^2}{1.2} \cdot \frac{\xi}{\varrho^3_0} t^2 + \frac{m k^2}{1.2.3} \cdot \left(\frac{\xi_1}{\varrho^3_0} - \frac{3 \xi h}{\varrho^5_0}\right) t^3 + \ldots \\
(y_i) - y_i &= (y'_i - y'_0 - b_1 t)\, m + \frac{m k^2}{1.2} \cdot \frac{\eta}{\varrho^3_0} t^2 + \frac{m k^2}{1.2.3} \cdot \left(\frac{\eta_1}{\varrho^3_0} - \frac{3 \eta h}{\varrho^5_0}\right) t^3 + \ldots \\
(z_i) - z_i &= (z'_i - z'_0 - c_1 t)\, m + \frac{m k^2}{1.2} \cdot \frac{\vartheta}{\varrho^3_0} t^2 + \frac{m k^2}{1.2.3} \cdot \left(\frac{\vartheta_1}{\varrho^3_0} - \frac{3 \vartheta h}{\varrho^5_0}\right) t^3 + \ldots
\end{aligned}\right\} (4)$$

§ 8.

Nach diesen Formeln (4) wurde ein numerisches Beispiel berechnet um die *Euler'*sche Methode mit der bekannten durch mechanische Quadraturen zu vergleichen; es ist dasselbe Beispiel, welches Herr Professor *Encke* gewählt hat, als er zuerst seine Störungs-Methode erläuterte und bezieht sich auf die durch Jupiter gestörten rechtwinkligen Coordinaten der Vesta. Mit einer so zuverlässigen Controlle versehen, durfte man erwarten ein sicheres Urtheil über die Anwendung der *Euler*'schen Methode zu erhalten.

Bezeichnet man die Störungen der rechtwinkligen Coordinaten durch ein vorgesetztes Δ, so ergeben sich, die Masse des Jupiter $= \frac{1}{1053.924}$ angenommen, für die Epoche: 1853 September 11 und eine Zeiteinheit von 21 Tagen, in Einheiten der siebenten Decimale:

$$\Delta x = (x'_t - x'_0 - 0.15681 \ldots t) \{3.97719\} + \{9.86484\} t^2 + \{0.24292\} t^3$$
$$\Delta y = (y'_t - y'_0 + 0.00221 \ldots t) \{3.97719\} - \{1.03041\} t^2 + \{8.67315\} t^3$$
$$\Delta z = (z'_t - z'_0 + 0.00354660 t) \{3.97719\} - \{8.62053\} t^2 + \{8.16632\} t^3$$

wo die in den eckigen Klammern stehenden Zahlen Logarithmen sind.

Die Rechnung nach diesen Formeln gab für die ersten zwölf Zeilen folgende Werthe denen der Vergleichung wegen, die *Encke*'schen Werthe zur Seite gesetzt sind.

	Δx		Δy		Δz	
0ʰ mittl. Par. Zt.	*Euler*	*Encke*	*Euler*	*Encke*	*Euler*	*Encke*
1853 Sept. 11	0.0	0.0	0.0	00	0.0	0.0
Octb. 2	+ 2.2	+ 2.2	+ 11.5	+ 11.7	— 0.2	— 0.2
„ 23	8.8	8.7	46.2	46.7	0.7	0.7
Nov. 13	19.4	18.5	104.1	105.0	1.6	1.5
Decb. 4	33.6	30.9	184.9	186.9	3.0	2.8
„ 25	51.2	44.7	288.5	291.8	4.9	4.4
1854 Jan. 15	71.7	58.4	414.4	419.5	7.4	6.3
Febr. 5	95.1	70.8	562.6	568.2	10.6	8.3
„ 26	120.8	80.4	732.6	736.7	14.5	10.5
März 19	148.4	87.2	924.3	921.8	19.1	12.9
April 9	177.7	90.4	1136.6	1120.8	24.5	15.4
„ 30	208.3	92.9	1369.7	1329.4	30.8	18.3
Mai 21	+ 239.9	+ 96.2	+1622.8	+1543.8	— 38.0	— 21.9

Man sieht dass hier, etwa bis December 4, beide Reihen gut übereinstimmen, dann aber entfernen sich dieselben immer mehr, besonders die für Δx, und weichen bald höchst bedeutend von einander ab. Wollte man also die *Euler*'sche Methode dem gegenwärtigen Standpunkte der praktischen Astronomie entsprechend wirklich benutzen, so würde sie höchstens auf Kometen, wenn deren Sichtbarkeit nicht über 2 Monate hinausgeht, eine Anwendung finden können, wodurch ihr Gebrauch eine grosse Einschränkung erlitte.

§ 9.

Als ich in No. 991 der astronomischen Nachrichten einen Aufsatz über die *Euler*-

sche Methode veröffentlichte, lag mir ein numerisches Beispiel noch nicht vor, welches später durch einen der jüngern ausgezeichneten Astronomen auf meine Bitte mit dankenswerther Bereitwilligkeit berechnet wurde. Es kam nun darauf an, den theoretischen Grund der übermässig starken Abweichung von dem richtigen Resultate zu ermitteln. Ein tieferes Eingehen in den Gegenstand liess mich nach einiger Zeit erkennen, dass die Methode selbst bis zu der ersten Potenz der Masse des störenden Körpers nicht vollständig ist, sondern dass noch ein Glied der betreffenden Differenzialgleichungen hinzukommen muss. Dieses Glied ist es durch dessen Vernachlässigung jene Abweichungen entstehen. Nachdem ich den wahren Grund erkannt hatte, gab ich ihn in No. 1069 in einem Nachtrage zu dem frühern Aufsatze vorläufig an. Die folgenden Betrachtungen werden diesen Gegenstand wie ich glaube zum vollständigen Abschlusse bringen. Wenn auch das praktische Bedürfniss nicht erheischt, eine der bekannten neueren mit so ausgezeichnetem Erfolge benutzten Methoden durch eine alte zu ersetzen, so dürfte dennoch in theoretischer Hinsicht die Verfolgung des von *Euler* eingeschlagenen Weges nicht ganz ohne Interesse sein.

§ 10.

Die Gleichungen (4) lassen sich in eine sehr einfache Form bringen, wenn man die für die Zeit t geltenden Coordinaten eines Planeten einführt, welcher als der Anziehung des störenden allein unterworfen gedacht wird. Nimmt man den Mittelpunkt des störenden Planeten zum Anfangspunkte der Coordinaten und die Coordinaten-Ebenen mit den durch die Sonne gelegten parallelen, so werden die Gleichungen (4) folgende:

$$\left.\begin{aligned}(x_\prime) - x_\prime &= (x'_\prime - x'_0 - a_1 t)\, m - (\xi_\prime - \xi - \xi_1 t)\, m \\ (y_\prime) - y_\prime &= (y'_\prime - y'_0 - b_1 t)\, m - (\eta_\prime - \eta - \eta_1 t)\, m \\ (z_\prime) - z_\prime &= (z'_\prime - z'_0 - c_1 t)\, m - (\vartheta_\prime - \vartheta - \vartheta_1 t)\, m\end{aligned}\right\} \ldots . (5)$$

wo $\xi_\prime$, $\eta_\prime$, $\vartheta_\prime$ jene neue Coordinaten sind.

Diese Gleichungen erhält man aber auch direkt aus den Gleichungen (1). Dieselben lassen sich annähernd auf folgende Weise schreiben:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2 (x_\prime)}{dt^2} &= \frac{d^2 x_\prime}{dt^2} + m \cdot \frac{d^2 x'_\prime}{dt^2} - m \cdot \frac{d^2 \xi_\prime}{dt^2} \\ \frac{d^2 (y_\prime)}{dt^2} &= \frac{d^2 y_\prime}{dt^2} + m \cdot \frac{d^2 y'_\prime}{dt^2} - m \cdot \frac{d^2 \eta_\prime}{dt^2} \\ \frac{d^2 (z_\prime)}{dt^2} &= \frac{d^2 z_\prime}{dt^2} + m \cdot \frac{d^2 z'_\prime}{dt^2} - m \cdot \frac{d^2 \vartheta_\prime}{dt^2}\end{aligned}\right\} \ldots .. (6)$$

und wenn man hier auf beiden Seiten zweimal hintereinander integrirt, so ergeben sich mit Einführung der erforderlichen Constanten, die Gleichungen (5).

§ 11.

Hiernach lässt sich nun die Genauigkeit der Methode leicht beurtheilen, denn die Gleichungen (5) gelten nur mit derselben Annäherung mit welcher die Gleichungen (6) gelten, die noch nicht bis auf die erste Potenz der Masse des störenden Planeten richtig sind. Bis zu diesem Grade der Genauigkeit ist nämlich:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2(x_\iota)}{dt^2} &= \frac{d^2 x_\iota}{dt^2} + m\frac{d^2 x'_\iota}{dt^2} - m\frac{d^2 \xi_\iota}{dt^2} - k^2\left(\frac{(x_\iota)}{(r)^3} - \frac{x_\iota}{r^3}\right)\\ \frac{d^2(y_\iota)}{dt^2} &= \frac{d^2 y_\iota}{dt^2} + m\frac{d^2 y'_\iota}{dt^2} - m\frac{d^2 \eta_\iota}{dt^2} - k^2\left(\frac{(y_\iota)}{(r)^3} - \frac{y_\iota}{r^3}\right)\\ \frac{d^2(z_\iota)}{dt^2} &= \frac{d^2 z_\iota}{dt^2} + m\frac{d^2 z'_\iota}{dt^2} - m\frac{d^2 \vartheta_\iota}{dt^2} - k^2\left(\frac{(z_\iota)}{(r)^3} - \frac{z_\iota}{r^3}\right)\end{aligned}\right\}\dots\dots(7)$$

und man erhält aus diesen Gleichungen durch zweimalige Integration, bis auf die erste Potenz der Masse genau:

$$\left.\begin{aligned}(x_\iota) - x_\iota &= (x'_\iota - x'_0 - a_1 t)m - (\xi_\iota - \xi - \xi_1 t)\,m - k^2\iint\left(\frac{(x_\iota)}{(r)^3} - \frac{x_\iota}{r^3}\right)dt^2\\ (y_\iota) - y_\iota &= (y'_\iota - y'_0 - b_1 t)m - (\eta_\iota - \eta - \eta_1 t)\,m - k^2\iint\left(\frac{(y_\iota)}{(r)^3} - \frac{y_\iota}{r^3}\right)dt^2\\ (z_\iota) - z_\iota &= (z'_\iota - z'_0 - c_1 t)m - (\vartheta_\iota - \vartheta - \vartheta_1 t)\,m - k^2\iint\left(\frac{(z_\iota)}{(r)^3} - \frac{z_\iota}{r^3}\right)dt^2\end{aligned}\right\}\dots\dots(8)$$

Die Doppel-Integrale auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in diesen Gleichungen (8) sind es durch welche die Gleichungen (5) müssen vervollständigt werden und deren Auslassung bei einer Anwendung auf die Bahn eines der kleinen Planeten einen bedeutenden Einfluss nach sich ziehen kann. Wenn die Nichtaufnahme dieser dritten Glieder auch nicht immer eine so beträchtliche Abweichung vom richtigen Resultate fürchten lässt, wie sich bei der Vesta im obigen Falle herausstellt, so wird doch die Vernachlässigung dieser Glieder bei dem gegenwärtigen Standpunkte der beobachtenden und rechnenden Astronomie keineswegs gestattet sein.

§ 12.

Betrachtet man die Differenzialgleichungen (7), so zeigt sich, dass eine fortgesetzte directe Entwickelung der Functionen nach Potenzen der Zeit hier ebensowenig mög-

lich ist, als eine directe Anwendung von mechanischen Quadraturen, da auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens die unbekannten Grössen noch selbst vorkommen, indem der zweite Differenzialquotient dieselben involvirt.

Wenn man der bequemen Übersicht wegen in gewöhnlicher Weise die Störungen der Coordinaten durch ξ, η, ζ bezeichnet und jetzt unter x, y, z die Coordinaten für den Fall der rein elliptischen Bewegung versteht, so wie unter r und ϱ die von diesen in bekannter Weise abhängigen Grössen, so ist, bis auf die erste Potenz der Masse genau:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2\xi}{dt^2} &= -\frac{k^2}{r^3}\left(\xi - 3\frac{x}{r}\delta r\right) + \frac{m k^2 (x'-x)}{\varrho^3} - \frac{m k^2 x'}{r'^3} \\
\frac{d^2\eta}{dt^2} &= -\frac{k^2}{r^3}\left(\eta - 3\frac{y}{r}\delta r\right) + \frac{m k^2 (y'-y)}{\varrho^3} - \frac{m k^2 y'}{r'^3} \\
\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= -\frac{k^2}{r^3}\left(\zeta - 3\frac{z}{r}\delta r\right) + \frac{m k^2 (z'-z)}{\varrho^3} - \frac{m k^2 z'}{r'^3}
\end{aligned}\right\} \dots\dots (9)$$

wo bekanntlich

$$\delta r = \frac{x}{r}\xi + \frac{y}{r}\eta + \frac{z}{r}\zeta.$$

Da für $t = 0$ die Grössen ξ, η, ζ und ebenso die ersten Differenzialquotienten derselben in Beziehung auf die Zeit, verschwinden, so machen sich jene Grössen erst in den Coefficienten von t^4 in der nach den Potenzen von t fortschreitenden Reihe bemerkbar; allein da sie selbst unbekannt sind, so muss hier die directe Entwickelung unterbrochen werden, und eine indirecte Methode zur Bestimmung dieses und der folgenden Coefficienten eintreten. Bei der Complication des vierten und der folgenden Differenzialquotienten, scheint das nun anzuwendende Näherungs-Verfahren bequem, wenn man die Reihen-Entwickelung nur bis zu dem Gliede fortsetzt, bis zu welchem sie direct zu machen ist, also bis t^3 inclusive, — den daraus hervorgehenden Theil des Betrages der Störungen ermittelt, und dann von dem ersten Gliede auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in den Gleichungen (9), bosonders Rechnung trägt, welches, da die Störungen dann bereits näherungsweise bekannt sind, durch mechanische Quadraturen geschehen kann.

§ 13.

Die beiden ersten Glieder auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in (8) geben zu einer besondern Betrachtung Gelegenheit. Da nämlich

$$\xi = x' - x_0;\ \eta = y'_0 - y_0;\ \vartheta = z'_0 - z_0$$
$$\xi_1 = a_1 - A_1;\ \eta_1 = b_1 - B_1;\ \vartheta_1 = e_1 - C_1$$

für $t = 0$ bekannt sind, so sind auch die Elemente einer idealen Bahn, welche man von dem gestörten Planeten um den störenden als Centralkörper beschrieben sich denken kann, zu ermitteln, und aus diesen die für die Zeit t geltenden Coordinaten ξ_t, η_t, ϑ_t. Für die wirkliche Anwendung wird es wohl immer bequem sein das zweite Glied nach den Formeln

$$-(\xi_t - \xi - \xi_1 t) = \frac{m k^2}{1.2} \frac{\xi}{\varrho^3_0} t^2 + \frac{m k^2}{1.2.3} \left(\frac{\xi_1}{\varrho^3_0} - \frac{3 \xi h}{\varrho^5_0}\right) t^3$$
$$-(\eta_t - \eta - \eta_1 t) = \frac{m k^2}{1.2} \frac{\eta}{\varrho^3_0} t^2 + \frac{m k^2}{1.2.3} \left(\frac{\eta_1}{\varrho^3_0} - \frac{3 \eta h}{\varrho^5_0}\right) t^3$$
$$-(\vartheta_t - \vartheta - \vartheta_1 t) = \frac{m k^2}{1.2} \frac{\vartheta}{\varrho^3_0} t^2 + \frac{m k^2}{1.2.3} \left(\frac{\vartheta_1}{\varrho^3_0} - \frac{3 \vartheta h}{\varrho^5_0}\right) t^3$$

zu berechnen, wie auch in dem obigen Beispiel für Vesta geschehen, allein die Denkbarkeit einer directen Bestimmung aller Glieder mit Ausnahme der drei Doppel-Integrale in (8) kann nicht geleugnet werden.

Die Einführung der Bahn, welche ich eine ideale genannt habe, hat für den ersten Augenblick etwas Befremdendes. Indessen ist bekannt, dass schon *Laplace* als er den Kometen von 1770 durch *Burckhardt* neu berechnen liess, diejenige Bahn in Betracht zog, welche dieser Komet um den Jupiter als Centralkörper beschrieb, als er in seine Anziehungs-Sphäre eintrat. Auch dort wurden die Elemente der relativen Bahn um den störenden Planeten berechnet aus den Coordinaten und den Differenzialquotienten derselben für eine bestimmte Epoche. Wenn die Beobachtungen, wie bei den meisten Kometen nur einen kurzen Zeitraum umfassen, so werden wie bereits § 8 angedeutet wurde, die letzten Glieder auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in den Gleichungen (8) in der Regel nur einen geringen Einfluss ausüben, und das Störungs-Problem in Bezug auf Kometen würde dann näherungsweise als durch endliche Ausdrücke lösbar zu betrachten sein.

§ 14.

In Bezug auf das obige Beispiel lasse ich der Vollständigkeit wegen die Coordinaten des Jupiter und der Vesta, welche bei der Berechnung benutzt wurden, hier folgen:

0^h mittl. Pariser Zeit.	Jupiter			Vesta		
	x'	y'	z'	x	y	z
1853 Aug. 21	− 0,47772	− 5,24040	+ 0,0286615	− 0,770912	+ 2,399441	+ 0,0276551
Sept. 11	0,32108	5,24498	0,0251270	0,970769	2,310666	0,0545297
Octb. 2	0,16415	5,24484	0,0215697	1,162556	2,202766	0,0809523
„ 23	− 0,00707	5,23997	0,0179930	1,344539	2,076303	0,1066919
Nov. 13	+ 0,15002	5,23033	0,0143999	1,514964	1,932002	0,1315140
Dec. 4	+ 0,30697	− 5,21593	+ 0,0107937	− 1,672090	+ 1,770754	+ 0,1551812
„ 25	0,46363	5,19675	0,0071777	1,814206	1,593622	0,1774552
1854 Jan. 15	0,61986	5,17280	+ 0,0035554	1,939647	1,401855	0,1980979
Febr. 5	0,77552	5,14406	− 0,0000705	2,046820	1,196893	0,2168744
„ 26	0,93047	5,11056	0,0036965	2,134212	0,980377	0,2335548
März 19	+ 1,08454	− 5,07229	− 0,0073187	− 2,200435	+ 0,754147	+ 0,2479180
April 9	1,23759	5,02929	0,0109339	2,244238	0,520245	0,2597551
„ 30	1,38948	4,98155	0,0145388	2,264557	0,280910	0,2688737
Mai 21	1,54006	4,92911	0,0181301	2,260534	+ 0,038568	0,2751019
Juni 11	1,68918	4,87200	0,0217042	2,231565	− 0,201189	0,2782940
Juli 2	+ 1,83670	− 4,81025	− 0,0252577	− 2,177332	− 0,444622	+ 0,2783349
„ 23	1,98245	4,74390	0,0287870	2,097834	0,679884	0,2751460
Aug. 13	2,12630	4,67299	0,0322885	1,993426	0,907061	0,2686896
Sept. 3	2,26809	4,59758	0,0357589	1,864836	1,123221	0,2589734
„ 24	2,40768	4,51773	0,0391946	1,713184	1,325485	0,2460542
Octb. 15	+ 2,54494	− 4,43346	− 0,0425922	− 1,539985	− 1,511065	+ 0,2300401
Nov. 5	2,67972	4,34485	0,0459483	1,347143	1,677361	0,2110914
„ 26	2,81186	4,25199	0,0492591	1,136922	1,822013	0,1894198
Decb. 7	2,94122	4,15495	0,0525213	0,911925	1,942970	0,1652852
1855 Jan. 7	3,06766	4,05379	0,0557314	0,675014	2,038544	0,1389916
„ 28	+ 3,19105	− 3,91861	− 0,0588860	− 0,429274	− 2,107457	+ 0,1108802
Febr. 18	3,31127	3,83947	0,0619821	− 0,177932	2,148875	0,0813219
März 11	3,42819	3,72648	0,0650166	+ 0,075723	2,162418	0,0507082
April 1	3,54164	3,60976	0,0679852	0,328411	2,148166	+ 0,0194420
„ 22	3,65150	3,48941	0,0708848	0,576935	2,106634	− 0,0120720
Mai 13	+ 3,75767	− 3,36551	− 0,0737128	+ 0,818253	− 2,038753	− 0,0434362
Juni 3	3,86003	3,23818	0,0764664	1,049525	1,945819	0,0742678
„ 24	3,95845	3,10754	0,0791413	1,268168	1,829447	0,1042064
Juli 15	4,05281	2,97373	0,0817355	1,471883	1,691520	0,1329188
Aug. 5	4,14301	2,83687	0,0842456	1,658674	1,534127	0,1601034
„ 26	+ 4,22894	− 2,69708	− 0,0866689	+ 1,826866	− 1,359516	− 0,1854932
Sept. 16	4,31050	2,55451	0,0890024	1,975094	1,170033	0,2088563
Octb. 7	4,38758	2,40930	0,0912438	2,102304	0,968087	0,2299973
„ 28	4,46010	2,26155	0,0933897	2,207734	0,756098	0,2487558

Über

den Hemmungsprozess in der Antherenbildung

von

H. Gieswald, Dr. phil.

Im Allgemeinen beruht die richtige Erkenntniss einer Sache auf der Kenntniss ihrer Vollendung und ihrer Entstehung, besonders jedoch auch in der Beobachtung der in der Mitte liegenden Zwischenstufen. Eine solche Zwischenstufe ist in der Entwickelung der Anthere das in der Metamorphose begriffene Staubblatt, das nicht seine Vollendung, weder als Blumenblatt, noch als Staubblatt, erreicht. Es dürfte daher nicht uninteressant erscheinen, dieses Übergangsstadium, diesen Hemmungsprozess in der Antherenbildung, näher zu untersuchen, zumal er uns über manche Erscheinungen, die in der normalen Form schwer zu deuten sind, Aufschluss geben wird.

Vor allen Dingen wird aber bei diesen Untersuchungen eine Kenntniss der normalen Antherenentwicklung vorausgesetzt und eine Bekanntschaft mit den verschiedenen Ansichten der Beobachter verlangt werden. Es soll daher eine Zusammenstellung der bei den folgenden Beobachtungen berücksichtigten Schriften vorausgeschickt, und somit nicht etwa Anspruch auf eine vollständige Aufzählung aller darüber geschriebenen Arbeiten gemacht werden.

Wir können uns nicht mit den über Zellentheorie im Allgemeinen erschienenen Schriften beschäftigen, da sie uns zu weit führen würden, zumal die Ansichten speciell über die Pollenzelle und ihre Entwickelung sehr verschieden und die Anzahl der darüber gelieferten wissenschaftlichen Schriften keine geringe ist. Wir gehen deshalb über die Ansichten eines *Hooke (Mikrographia 1667)* und *Malpighi (Anatomia plantarum 1675—1679)*, welche die Zellen zuerst als geschlossenen Schlauch (utriculus) betrachteten, oder eines *Grew (Anatomie des plantes. Leide 1685)*, der die Zellen mit Bläschen, ähnlich dem Bierschaume, vergleicht, oder des *C. Fr. Wolff (Theoria generationis. Halae 1774)*, der die Zellen für hohle Räume einer homogenen Masse hält — wir gehen über diese Ansichten hinweg, indem wir die weiteren Entwicklungen, die aus den Beobachtungen hervorgehen, als bekannt voraussetzen und wenden uns speciell zu den Untersuchungen über die Pollenzellen. —

Wenn Nägeli (Zur Entwickelungsgeschichte des Pollen. Zürich 1842) *Koelreuter (Versuche und Beobachtungen über das Geschlecht der Pflanzen. Leipzig 1761)* als den ersten bezeichnet, der, durch die Beobachtung geleitet, dass beim Aufschwellen der Pollenkörner im Wasser an bestimmten Stellen kegelförmige Auswüchse hervortreten, vermuthete, dass das Pollenkorn aus 2 Häuten bestehe, so möchte ich die bereits 1737 in Leipzig erschienene Dissertatio von *Ludwig et Haase: „De sexu plantarum"* der erwähnten vorausschicken, weil sich in ihr ganz interessante Beobachtungen über die Geschlechte der Pflanzen früher vorfinden. — 1790 tritt *Gleichen* mit: *Microscop-Untersuchungen der Zeugungstheile der Pflanzen. Nürnberg,* auf, der die Pollenzelle genau untersucht und nur eine Membran (exine Fritsche) erkennt. — In demselben Jahre erscheint auch *Göthe's: Metamorphose der Pflanzen. Gotha 1790,* in der, wie bekannt, das Blatt als das Wesentliche der Pflanze hingestellt wird, eine Ansicht, die wohl noch jetzt gilt, für und gegen die aber schon häufig gesprochen und die in der neuesten Zeit durch *Daniel Möller* in Upsala *(Bot. Zeitung 1856)* bekämpft wird, da seiner Ansicht nach die Knospe die Stelle des Blattes einnehmen soll. — 1793 trat *Ch. K. Sprengel* mit guten Beobachtungen auf, und veröffentlichte: *das entdeckte Geheimniss der Natur im Bau und in der Befruchtung der Blumen, Berlin.* Ihm folgte *Medicus: Beiträge zur Pflanzen-Anatomie, 1799,* und *J. Senebier* mit seiner *Physiologie végétale. Genève 1800,* in der, trotz vieler guten Beobachtungen, doch eigenthümliche Ansichten über den Pollen vorkommen, die insofern mit den Aussprüchen *Buillard's, Hedwig's (De fibrae vegetabilis et animalis ortu 1789)* und *Du Hamel's* übereinstimmen, als der Staub an dünnen, zerreisslichen Fäden hängend gedacht wird. — Sehr gründlich sind die Beobachtungen der Spiralfaserzellen im Allgemeinen, und namentlich in den Antheren, wenn auch in der Deutung ihres Nutzens, ähnlich wie es *Comparetti* und *Carolo* machen, zu weit gegangen wird, somit den Ansichten *Geoffroy's,* die in den Nachrichten der Akademie, 1711, enthalten sind, gehuldigt wird. — *Th. v. Saussure* trat mit seinen *chemischen Untersuchungen über die Vegetation* auf und eröffnete rühmlichst eine Bahn, die später noch vielfach betreten wurde. 1806 veröffentlichte *L. C. Treviranus* seine Arbeit: *Vom inwendigen Bau der Gewächse. Göttingen,* ein Jahr nach ihm *K. A. Rudolphi: Anatomie der Pflanzen,* in demselben Jahre publicirte auch *D. H. F. Link: Grundlehren der Anatomie und Physiologie der Pflanzen,* 1811 *Treviranus: die Beiträge zur Pflanzenphysiologie* und 1812 *J. J. P. Moldenhawer* seine: *Beiträge zur Anatomie der Pflanzen. Kiel.* — *D. G. Kieser* stellte in: *Memoire sur l'organisation des plantes,* die in Harlem 1812, und in: *Grundzüge der Anatomie der Pflanzen,* die in Jena 1815 erschienen, seine eigenthümlichen Ansichten über den Bau der Zelle auf, und 1816 veröffentlichte *P. Keith: A system of physiological botany. London.* Im Jahre 1820 erscheint von *A. Henschel* eine Schrift: *Von der Sexualität der Pflanzen,* der im Jahre 1828 von demselben Verfasser einige neue Beobachtungen, als: *Nachricht von einigen die Bestäubung der Pflanzen betreffenden Versuchen* hinzugefügt werden. Mittlerweile sind 1821 von *Autenrieth: De discrimine sexuali plantarum,* 1822 von *Treviranus: Die Lehre vom Geschlechte der Pflanzen,* erschienen, und 1824 ist von *Amici* eine Arbeit veröffentlicht, in der wohl zum erstenmale die Pollenschläuche an Portulacca oleracea

aufgefunden sind. Amici nahm eine äussere mehr oder weniger dicke Haut, die glatt oder mit Warzen bedeckt ist, und eine innere dünne durchscheinende Membran an. Seine Entdeckungen bestätigte *Adolphe Brongniart* durch seine Untersuchungen, die er auch an andern Pflanzen anstellte *(Mémoire d. l. Génér. et le Dév. de l'Embr. d. l. vég. phan. 1827).* Über den Inhalt der Pflanzenzelle erschien 1828 von *Meyen* und im folgenden Jahre die berühmte Arbeit *Robert Brown's: Microscopical observations on the particles contained in the pollen of plants. 1829,* der sich 1832: *Observations on the organs and mode of fecundation in Orchideae and Asclepiadeae. London,* anschloss, und in welchem wohl zuerst dem Zellkerne (nucleus) die gebührende Aufmerksamkeit geschenkt wurde, so dass diese Untersuchungen die Basis für spätere *(Schleiden in Müllers Archiv. 1838)* bildeten. In den Jahren von 1830 bis 1839 erschienen von *Meyen: Phytotomie. Berlin 1830,* dann: *Neues System der Pflanzenphysiologie* und: *Über die Secretionsorgane der Pflanzen.* 1830 wurde die Arbeit des *Purkinji*: *De cellulis antherarum fibrosis. Vratisl.,* veröffentlicht.— 1832 erschien *De Candolle: Physiologie végétale,* die später von Roeper in's Deutsche übersetzt wurde, und im darauf folgenden Jahre: *Fritsche: De plantarum polline. Berl. 1853.* In dieser Arbeit wies der Beobachter nach, dass die Ansicht der Physiologen, welche den Inhalt der Pollenzelle für Spermatozeen gehalten, eine falsche gewesen und dass nur Amylumkörnchen mit Molecularbewegung, gemischt mit Öltröpfchen und Schleim, vorhanden seien. Er erkannte nicht nur die Intine und Exine, sondern auch die bisweilen vorkommenden 4 Häute: Intine und Exintine, Intexine und Exine. — In demselben Jahre erschien von *de Mirbel: Recherche sur le Marchantia,* in der er auf die Mutterzellen und Tochterzellen, die in den Antheren vorkommen, ohne ihnen gerade diese erst später eingeführten Namen zu geben, aufmerksam machte. Er hat die von Adolphe Brongniart veröffentlichten Untersuchungen über die masse pollinique zu Grunde gelegt. 1834 tritt *Hugo v. Mohl* mit seinen Untersuchungen: *Über den Bau und die Formen der Pollenkörner,* auf, 1835 *Treviranus* mit der *Physiologie der Gewächse,* und in demselben Jahre erscheint auch wiederum von *Mirbel* unter dem Titel: *Ex. crit. d'un passage du Mém. de Mr. H. Mohl,* eine Abhandlung, in der er auf die Ähnlichkeit der Spore und des Pollenkornes aufmerksam macht. 1837 erscheint: *Physiologie végétale par Raspail,* in demselben Jahre: *Globules sortant du stygmate du Pacokia Cretica par M. Wydler* und auch eine Abhandlung von *Schleiden* in *Wiegmanns Archiv,* die durch gemeinschaftliche Untersuchungen mit *Vogel,* als: *Entwicklung des Pollen in der Leguminosenblüthe* erweitert in den *Actis. Acad. C. L. von 1838* enthalten ist.—*Endlicher* trat 1838 mit einer Arbeit: *Neue Theorie der Pflanzenzeugung* auf und *Kützing* veröffentlichte in der *Linnaea* 1841 einen Aufsatz, in dem zuerst wohl der Primordialschlauch erkannt, aber die später von Mohl ihm zuertheilte eigenthümliche Eigenschaft übersehen ist, so dass er als Amylidzelle beschrieben wird. Im folgenden Jahre veröffentlicht *Nägeli: Zur Entwicklungsgeschichte des Pollens bei den Phanerogamen. Zürich 1842,* eine 36 Seiten lange Schrift, in der namentlich die damals neuesten Untersuchungen *Meyens* in dessen Physiologie nochmals geprüft werden und den dort complicirten Darstellungen eine bessere Übersicht gegeben wird. Auch *Th. Hartig* tritt 1842 mit einer *neuen Theorie der*

Befruchtung auf. 1843 erscheint von *Karsten: De cella vitali*, eine Abhandlung, die insofern interessant ist, als der Verfasser die seit R. Brown und andern älteren Botanikern feststehenden Thatsachen darin angreift und u. a. dem Zellkerne jene ihm zur Zellenbildung als nothwendig anerkannte Existenz bestreitet. Dieser Ansicht wird ebenfalls von *Hartig: Beiträge zur Entwicklungsgeschichte der Pflanzenzelle. Bot. Zeitung 1855,* gehuldigt.— Auch der Primordialschlauch (Schleimschicht) wird von Karsten erkannt, jedoch für eine secundäre Zelle insofern gehalten, als er behauptet, die Schleimschicht schiebe sich, nachdem die Membran entstanden, zwischen Inhalt und Membran ein.— Auch *Hartig* erkennt in der 1844 erschienenen Schrift: *Das Leben der Pflanzenzelle,* den Primordialschlauch in den Zellen saftiger Früchte, nennt ihn aber Ptychode,—eine Benennung, die er jetzt noch beibehalten,—versteht aber bei den Holzzellen unter demselben Namen eine ganz andere, aus Zellstoff bestehende Membran, die innerste Verdickungsschicht der Zellwand, so dass dadurch in die Ptychode-Theorie Verwirrungen hereingebracht werden. Diese Wirren beseitigt *Mohl* durch eine in die *botanische Zeitung von 1844* eingesandte Abhandlung, in der er zuerst seine gründlichen Untersuchungen über den Primordialschlauch veröffentlicht. — Bekanntlich sind die Resultate dieser Beobachtung in der neuesten Zeit durch *Pringsheim* angegriffen, der die Umwandlung des Primordialschlauches in die Zellwand gesehen zu haben glaubt. In Folge dieses Angriffes ist von *Hugo v. Mohl* eine Entgegnung in der *Bot. Zeitung von 1855* enthalten. Im Jahre 1844 erscheint auch von *Unger: Über merismatische Zellbildung bei der Entwicklung des Pollens,* gleichzeitig beginnt die Herausgabe der von *Nägeli* und *Schleiden* redigirten *Zeitschrift für Botanik.* — 1846 macht *Unger* seine *Grundzüge der Anatomie und Physiologie der Pflanzen* bekannt, und in demselben Jahre *J. B. Barisch: Observationes phytotomicae. Halae.*— 1850 erscheint von *H. Schacht: Die Entwicklungsgeschichte des Pflanzen-Embryo,* in der sorgfältige Untersuchungen namentlich auch über den Primordialschlauch angestellt sind; ebenso *Mulder: physiologische Chemie,* und eine neue, verbesserte Auflage von *Schleiden's Grundzüge der Botanik.*— 1851 erscheint von *Mohl: Grundzüge der Anatomie der vegetabilischen Zelle,* eine Arbeit, in der namentlich dem Zellkerne, der aus dem Protoplasma hervorgeht, so wie dem Protoplasma und dem Cytoblastema, besondere Aufmerksamkeit geschenkt wird. Auch *Alexander Braun* weiset in der *„Verjüngung in der Natur," Leipzig. 1851,* die Richtigkeit der von Mohl beobachteten Thatsache nach, dass der Primordialschlauch in allen Fällen früher, als die eigentliche Zellmembran entstehe.— 1852 erscheinen: *Die Pflanzenzelle* von *H. Schacht* und in der *Bot. Zeitung* Aufsätze von *W. Hofmeister: Zur Entwickelungsgeschichte der Zostereen,* von *H. Karsten: Entwicklung der Loranthaceen.* In der *Linnaea: Ein kleiner Beitrag zur Entwicklungsgeschichte des Pollen von H. Gieswald.* der *Bot. Zeitung von 1853* erscheint von *Mohl*: *Über die Zusammensetzung der Zellmembran aus Fasern.* 1854 von *Hartig: Über die Function des Zellkernes,* und *R. Neumann: Über Antherae anticae und posticae und deren Übergänge in einander*; eine Arbeit, in der der Verfasser den Ansichten R. Brown's, H. v. Mohl's, Röper's und Schleiden's beistimmt. 1855 erscheinen *Hartig: Beiträge zur Entwicklungsgeschichte der Pflanzenzelle, Mohl: Über den Primordial-*

schlauch und *über den Bau des Chlorophyll's.* In dem letzteren Aufsatze wendet sich Mohl gegen die Theorie, welche die Bläschennatur des Chlorophylls — wie sie von Nägeli, später von Göppert, Cohn und Hofmeister (Untersuchungen höherer Cryptogamen) aufgestellt — vertheidigt. Auch mit der von Mulder aufgestellten chemischen Theorie ist Mohl nicht einverstanden. Zu erwähnen ist noch die in den Actis. Academ. Caesareae Leopoldino-Carolinae pars 25 im Jahre 1855 erschienene Abhandlung von *Th. Gümbel: Ueber das Spreitekorn und das Pollenkorn,* in der der Verfasser die Nothwendigkeit erklärt, einen morphologisch wie physiologisch begründeteren andern Ausdruck an die Stelle von „Spaltöffnungen“ zu setzen. Er hat Anfangs den Namen „Kornzelle“ (Flora 1854 Nro. 7) gewählt, dann aber die Bezeichnung „Spreitekorn“, „Thallophyse“ für geeigneter gehalten, so dass dieser Ausdruck für „Stomata“, „Hautdrüsenzellen“ *(Nägeli)*, „glandes corticales *(Saussure)*, „glandes epidermoidales“ *(de la Metherie)* gilt. — Der schon früher erwähnte: *Versuch zu einer Berichtigung der Metamorphosenlehre* erschien 1856 von *Daniel Müller.* — Diese angeführten Arbeiten sind den folgenden Beobachtungen im Allgemeinen zum Grunde gelegt und vorkommende Citate auf sie bezogen. —

Die Umwandlung der Staubblätter in Blumenblätter, durch welche die gefüllten Blüthen erzeugt werden, ist häufig von den Morphologen beobachtet, und die äusserlich wahrnehmbaren Erscheinungen sind vielfach gedeutet worden — *Agardh* und *Endlicher* betrachten das Staubblatt als ein Axenorgan und die Staubfäden für einen Ast, der in einer gewissen Höhe zwei opponirte Blätter trägt, welche sich mit Kelch- und Blumenblättern kreuzen, mit ihrer Mittelrippe an den Ast (filamentum) angewachsen sind und sich, wie *Agardh* behauptet, mit ihrer lamina seitwärts und einwärts angebogen haben, um die Antheren-loculamenta zu bilden. Nach *Endlicher* dagegen rollen sie sich zu demselben Zwecke nach aussen um, und wachsen mit ihren Rändern an ihre eigene Mittelrippe an. — *Decandolle* glaubt, der Staubfaden sei ein Blatt, dessen Ränder sich gegen die Mittelrippe hin umschlagen, so dass auf diese Weise die Antherenfächer gebildet würden; er glaubt ferner, dass wenn die Antheren in Carpelle übergehen, die Pollenkörner sich in ovula verwandeln. — *Ernst Meyer*, *Röper*, *Schleiden*, *Mohl* und mit ihnen einige andere lassen die beiden Antheren durch Anschwellung der Seitenhälften des in die Anthere verwandelten Blattes entstehen; demnach sind ihrer Ansicht nach

die loculamente als Aushöhlungen im Blattparenchym, das mit veränderten Parenchymzellen (Pollenzellen) gefüllt ist, zu betrachten, und die Suturen der Antheren entsprechen den Blatträndern. *Hugo v. Mohl* zweifelt, ob die Ansicht, dass die Nath der Anthere dem Blattrande entspreche, in allen Fällen richtig und führt dagegen an, dass bei der gefüllten Blüthe von Rosa, Papaver und Nigella die vordern und hintern Antherenloculamente nicht so einander gegenüber liegen, dass die ersteren auf der obern, die letzteren auf der untern Fläche sich befinden, sondern dass beide auf der obern Fläche sich bilden, und zwar zwei nahe der Mittelrippe des Blattes, zwei andere, oben freilich weiter davon entfernt, unten jedoch mit einander verbunden.

Die folgenden an Antheren-Missbildungen angestellten Untersuchungen werden uns schliesslich Resultate liefern, die uns zu einer bestimmten Deutung führen werden. Da aber die äussere Form durch die Anordnung und Entwickelung der im Innern angelegten Zellen bedingt wird, wollen wir die einzelnen Zellen, wie sie im normalen Zustande auftreten, näher in's Auge fassen, und dann die dabei auftretenden Hemmungserscheinungen in ihrem Ursprunge, und die Folgen ihrer Einwirkungen auf die Pollenzellen zu ermitteln suchen.

Die Mutterzellen.

Bevor wir zu der Entwickelung der Zellen übergehen, sei es gestattet, eine kurze Beschreibung der äusserlich wahrnehmbaren Umwandlungen der Anthere voranzuschicken. Dabei sei gleichzeitig bemerkt, dass die Untersuchungen an Knospen von 2''', und an Antheren von 0,25''' Durchmesser, theils um die normale Form, theils um die Metamorphose schon in diesen ersten Stadien der Entwickelung zu untersuchen, angestellt wurden. — Bei dem ersten Beginnen der Umwandlung wird die sonst mit einer kleinen Rückenfurche versehene Anthere nur an der Basis ganz abgeflacht, die Mitte und die Spitze zeigen durchaus keine wahrnehmbaren Veränderungen. Erst später breitet sich die Basis des Connectivums in eine Fläche allmählig aus und stellt bald die Mittelrippe einer kleinen Blattfläche dar. Das Filamentum breitet sich ebenfalls, wenn es pfriemförmig ist, allmählig aus und zeigt das Bestreben, die Breite des unten erweiterten Mittelbandes anzunehmen. Die vier Loculamente erscheinen an der Spitze dicht aneinander gelagert, an der Basis jedoch von einander getrennt und nach dem Rande der grüngefärbten Blattfläche hingeschoben (Fig. 1). Während nun das Connectivum

sich immer mehr ausdehnt und die Blattfläche immer grösser erscheint, bildet sich das, bisher nur in der Anlage bestehende Gefässbündel des Connectivums allmählig ganz und gar aus, und man beobachtet kleine Nebengefässbündel (später Blattrippen), die von der Mittelrippe, dem Gefässbündel des Connectivums, aus jederseits in die Blattfläche hinein oder ihr resp. parallel laufen. Man sieht deutlich, dass die Umwandlung entweder durch Dehnung der seitlichen Connectivum-Zellen auf Kosten der hinteren oder der vorderen zwei Loculamente geschehen, oder die Verwandelung gleichmässig in Bezug auf alle vier Fächer fortgeschritten ist. — In beiden Fällen hat also die Umwandlung von vorneherein konstant zwei Richtungen eingeschlagen; einmal nämlich hat sich die Blattfläche stets zuerst an der Basis entwickelt, und die Metamorphose ist dann langsam nach der Spitze hin fortgeschritten (eine Thatsache, die durch das Erscheinen der gelb gefärbten rudera der thecae an der Spitze der Blattfläche bestätigt wird Fig. 2, 3, 4, 5), gleichzeitig hat dann aber auch eine Veränderung des Zellgewebes vom Gefässbündel des Connectivmus aus, links und rechts nach den Blatträndern hin, stattgefunden. — Dieses sind die im Allgemeinen äusserlich wahrnehmbaren Umänderungen, die, wie es auch später die anatomischen Untersuchungen bestätigen werden, insofern auf einem Hemmungsprozesse in der Zellenentwickelung beruhen, als die Fortbildung der höheren modificirten Parenchymzellen (die Pollenzellen), die der Anlage nach vorhanden, durch die Bildung von Blattparenchymzellen gehindert wird. — Es ist also selbstverständlich hier statt des Staubblattes mit einem differenzirten Zellenstrange, den Pollenzellen, ein Blumenblatt ohne jenen Zellenstrang, aber mit modificirten Parenchymzellen angelegt, und die eben vorhin beschriebenen Erscheinungen erhalten daher rückwärts ihre Deutung: die Pollenzellen sind an den Spitzen der Blätter entwickelt, dann tritt aber die fernere Entwickelung nur mehr dem Rande näher auf. Dadurch erscheint der übrige Theil des Blattes, in dem nur Parenchymzellen sind, als Blattfläche, natürlich mit kleinen Blattrippen durchzogen, und es hat also thatsächlich das Entgegengesetzte von der äusserlich wahrnehmbaren Erscheinung stattgefunden, weil die Bildung der modificirten Parenchymzellen von der Spitze nach der Basis, von dem Rande nach der Mittelrippe hin, vorgeschritten ist. Somit hat sich nicht das Blatt, d. h. die Parenchymzelle, auf Kosten der Pollenzelle, sondern umgekehrt die letztere durch Umwandlung der ersteren gebildet. — Dasselbe findet auch statt, wenn das metamorphosirte Staubblatt nicht nur eine Fläche, sondern mehre Blattflächen zeigt (Fig. 6 bis 15), oder gespalten erscheint, und in diesen Fällen ergab die bei weitem grösste Zahl der

Beobachtungen, dass die Antherennath dem Blattrande entspricht. Nur in seltenen Fällen (*Fig. 12 und 14*) wurden Ausnahmen, von denen später die Rede sein soll, beobachtet. —

Diesen äusseren mannigfachen Formverschiedenheiten analog sehen wir auch auf Querschnitten von metamorphosirten Staubblättern die verschiedenartigsten Zellen der Form und dem Inhalte nach. Das Chlorophyll, welches den Hauptbestandtheil der Zelle im Allgemeinen bildet, wird entweder garnicht verändert, und Querschnitte zeigen überall homogene Zellen, so dass sich ein vollständiges Blatt entwickelt, oder die Umwandlung geht vollständig vor sich, und dann bildet sich die normale Anthere, oder es geschieht endlich eine theilweise Verwandlung des Chlorophylls, an der nur einige Zellen Theil nehmen, und wir erblicken die zu untersuchende Übergangsform zwischen dem normalen Blatte und dem normalen Staubblatte. Betrachten wir, ehe die einzelne Zelle näher untersucht wird, etwa auf sechs schematisch von der Basis nach der Spitze des Blattes gelegten Schnitten im Allgemeinen die Zellen, so sehen wir:

I. an der Basis des metamorphosirten Blattes ein bereits ausgebildetes Gefässbündel (im normalen Zustande nur die Anlage zum Gefässe), umlagert von fast homogenen, sich bis zum Rande erstreckenden Zellen, die hier und dort kleine Gefässbündel verrathen.

II. Etwas höher zeigt der Querschnitt nicht mehr vollständig gleichgebildete Zellen, sondern näher dem Rande liegen mehre dem Inhalte nach vom andern Gewebe verschiedene Zellen, wie es scheint modificirte Parenchymzellen, ähnlich den Centralzellen (Urmutterzellen) des Pollen;

III. Der nächst höher gelegene Schnitt zeigt am Rande Pollenmutterzellen, mehr dem Gefässbündel zu dagegen Zellenräume, deren Inhalt aus umgewandeltem Chlorophyll, ähnlich wie die Centralzellen, bestehen.

IV. Ein höher gelegter Schnitt zeigt die dem Rande genäherten, in Theilung begriffenen Mutterzellen und seitlich von ihnen modificirte Parenchymzellen verschiedener Art.

V. Mehr der Spitze zu ist die Theilung der Mutterzellen vor sich gegangen, und der die Pollenzelle producirende Cytoblast ist zu erkennen.

VI. Ein Schnitt durch die Spitze zeigt vollständig entwickelte Pollenzellen.

Es ist klar, dass diese an der Spitze gelegenen Zellen, die in dem zweiten bis sechsten Querschnitte erwähnten Stufen der Entwickelung durchlaufen haben, aber es zeigt sich

häufig, dass die auf diesen Querschnitten beschriebenen Zellen sich nicht weiter entwickeln, sondern bis zu einem bestimmten Stadium entwickelt, in ihrer fernern Ausbildung gehemmt bleiben. Diese Erscheinung documentirt sich äusserlich durch eine grünlich-gelbe Farbe, während die normalen Pollenzellen vollständig entwickelt gelb erscheinen. —

Zwischen den Zellgeweben der normal gebauten Anthere und den in der Metamorphose begriffenen macht sich von vorneherein ein Unterschied sofort bemerkbar. Vor allem gewinnen bei der normalen Bildung die Centralzellen und mit ihnen später die Mutterzellen und die Pollenzellen die Oberhand und dehnen sich auf Kosten der peripherischen Zellen, von denen bekanntlich mehre Reihen resorbirt werden, und der Connectivzellen aus. Dagegen bleiben die Centralzellen, und mit ihnen die Mutterzellen des in der Metamorphose begriffenen Blattes mehr zusammengedrückt und werden weniger ausgebildet, theils weil auch die Resorbtion der sie umgebenden Zellen nicht stattfindet. Diese Hemmung kann nur dadurch erklärt werden, dass die Parenchymzellen schon der Anlage nach das Übergewicht erlangt haben, und durch den Stoffwechsel bedingt die Ernährung, und somit auch die Ausbildung der Pollenmutterzelle im Allgemeinen eine andere, als es im normalen Zustande wird. Während bei der Anthere das Zellgewebe sich schon in der Anlage in fünf centrale, senkrechte Zellenreihen differenzirt und z. B. ein Staubbeutel von 0,25‴ Durchmesser bereits ein feinkörniges Granulum in einzelnen Zellen (den Urmutterzellen) zeigt, Fig. 16, verschwindet bei den in der Metamorphose begriffenen Beuteln dieser Unterschied des Zelleninhaltes oftmals ganz, und man erblickt, wie schon in I. bemerkt, an der Basis gewöhnlich homogene Zellen, die das Gefässbündel umgeben. Alle diese Zellen sind mit Chlorophyll gefüllt und zeigen nicht, wie im normalen Zustande, die Bildung von Zellen in Zellen. Dieser Mangel der Erzeugung entsteht aber meiner Meinung nach durch den Mangel an Cytoblasten, und dieser wieder durch die chemische und physikalische Beschaffenheit des Zelleninhaltes. Es ist somit wohl einleuchtend, dass der Hemmungsprozess durch die überwiegende Bildung von Chlorophyll in allen Theilen der Pflanze, namentlich auch, wie es sonst nicht geschieht, in den Staubblättern — die sonst in ihren Central-Pollenzellen eine protoplasmatische Substanz produciren — eingeleitet wird. — Die von Mohl über das Chlorophyll angestellten Untersuchungen kann man, wenn die bereits modificirten Parenchymzellen, die mit einem Cytoblasten versehen sind, untersucht werden, nur bestätigen. Über die Ansicht Nägelis, gegen die freilich Mohl auftritt, erhält man durch

diese Untersuchungen kein Urtheil, weil das Object ein Studium des anatomischen Baues nicht gut zulässt. — Bekanntlich hält Nägeli das Chlorophyll ähnlich dem Zellkerne und dem Amylum für ein Bläschengebilde, das nicht etwa als eine Vacuole, sondern als eine Zelle mit einer eigenthümlichen Membran und einem der Veränderung unterlegenen Inhalte betrachtet werden muss. — Wenn nun hier auch nicht der anatomische Bau studirt werden kann, so muss man doch die von Mohl bei Anthoceros gemachten Beobachtungen: „der Farbestoff, das Chlorophyll nämlich, sei an eine den Zellkern umhüllende Protoplasmamasse gebunden", bestätigen, denn diese Wahrnehmung kann man machen, so oft sich der Untersuchung modificirte Parenchymzellen, bei denen das Chlorophyll sich noch nicht vollständig umgewandelt zeigt, darbieten. Ebenso bestätigen sich die von Mohl bei Zygnema wahrgenommenen Erscheinungen, nach denen das Chlorophyll in der Zelle eine peripherische Schicht, vom Zellkerne entfernt, bildet. Stets erscheinen die Chlorophyllkörnchen an der innern Seite des Primordialschlauches angeheftet.— Es dürfte ausserdem aus den hier auftretenden Erscheinungen hervorgehen, dass das Chlorophyll eine dem Protoplasma verwandte Substanz ist, da die Umwandlung des Blattgrüns in protoplasmatische Bläschengebilde hier direct, ohne vorher in Amylum übergegangen zu sein, vor sich geht. — Dadurch wird allerdings ein Widerspruch gegen Mulder erhoben, der zu beweisen sucht, dass die Bildung der grünen, aus Wachs und Farbestoff bestehenden Substanz der Chlorophyllkörner mit einer von aussen nach innen vorschreitenden Umwandlung und dem endlichen Verschwinden der Amylumkörner verbunden sei. — Seiner Ansicht nach soll in dieser Umwandlung des Amylums in Wachs eine reichliche Ausscheidung von Sauerstoff begründet sein, und es sollen die Pflanzen nicht darum Sauerstoff aushauchen, weil sie grün sind, sondern weil sie grün werden, indem sie unter dem Einflusse des Lichtes beständig neuen Farbestoff und das mit demselben verbundene Wachs aus Amylum bilden. — Reagentien zeigen wohl nie Amylumkörnchen bei dem Umwandlungsprozesse des Chlorophylls in Protoplasma und Cytoblastema, jenen schleimig flüssigen und körnig congulirten Massen, und somit dürfte, ebensowenig wie zu der Rückbildung des Blattgrün in Kernbläschengebilde eine Bildung von Stärke nöthig ist, auch umgekehrt bei der Umwandlung des Zelleninhaltes zu Chlorophyll eine Amylumbildung unnöthig sein. Häufig wird bei vielen Zellen, die eben in ihrer Entwicklung dann auch gehemmt werden, nicht vollständig das Chlorophyll in Granulum umgewandelt, und es tritt dann dieselbe Erscheinung ein, welche Mohl bei Anthoceros beobachtet hat, indem er anführt, dass bei dieser Pflanze die Protoplasma-

masse, welche bei allen Pflanzen den nucleus umhüllt, zu einer besondern Entwicklung gelangt, und dass mit ihr der grüne Farbestoff verbunden ist. — Mohl hat nicht durch die Beobachtung feststellen können, ob das Chlorophyll auch die Substanz des nucleus durchdringt. Meinen Untersuchungen nach ist es in dem vorliegenden Falle nie vorgekommen, sondern wenn auch die sonst mit spiegelglatter Oberfläche versehenen Kernbläschengebilde häufig weniger glänzend, weil sie weniger lichtbrechend, erscheinen und der Cytoblast durch sie verdeckt wird, so ist letzterer selbst, als Bläschengebilde im Sinne Mohl's, ungefärbt aufgetreten. Man wird leicht einsehen, welche wichtige Rolle bei dem metamorphosirten Staubblatte das Chlorophyll spielt, denn je nach seiner vollständigen oder unvollständigen Umwandlung in Protoplasma, sei es in den frühesten Stadien der Entwicklung oder in spätern, wird die Zelle getheilt werden und Pollenzellen produciren, oder mehr oder weniger ungetheilt bleiben und dann eine verschiedene Mittelstufe zwischen Blattzelle und Pollenzelle einnehmen. Somit beruht meiner Ansicht nach im Wesentlichen der Hemmungsprozess in dem Beharren des Chlorophylls in seiner ursprünglichen Zusammensetzung, die Bildung der Pollenzellen des metamorphosirten Staubblattes in der vollständigen Umwandlung des Blattgrüns in protoplasmatische und cytoblastematische Substanzen. —

In allen Fällen, in welchen, durch die Umwandlung des Chlorophylls veranlasst, die Centralzellen und Mutterzellen productionsfähig erscheinen, tritt auch ein nucleus auf, der gleichzeitig Cytoblast und nicht nur, wie Hartig annimmt, Metacard ist. Ihn umgiebt ein Primordialschlauch, der, wenn mehre Cytoblasten erscheinen, um sie herum eingefaltet ist, so dass die Tochterzellen Producte des Primordialschlauches sind, die durch die Einschnürung desselben aber nur unter Mitwirkung der Cytoblasten entstanden sind. Sollten diese bei der Bildung gleichgültig sein, wie Hartig es annimmt, so ist nicht die Thatsache zu begreifen, dass der nucleus immer in dem lumen der Zelle liegt und nicht auch ausgeschlossen erscheint. Bei den abortirenden Cytoblasten (Fig. 17), wie sie Nägeli nennt, ergiebt das Resultat der Beobachtungen umgekehrt, dass nuclei vorhanden sind, um welche keine Membran, keine Einschnürung wahrzunehmen ist, so dass statt der regelmässigen ausgebildeten vier Zellen alsdann nur drei oder weniger erscheinen. — Diese abortirenden nuclei nimmt man in dem metamorphosirten Zustande häufiger als im normalen wahr, allein auch hier bestätigt sich das eben Gesagte, und es scheint, dass an dieser Erscheinung die mangelhafte Umwandlung des ursprünglichen Zelleninhaltes Schuld ist. Überhaupt stellt sich immer mehr, wie man es hier sehen kann,

heraus, dass der Zelleninhalt bei der Bildung neuer Zellen nicht die ihm früher zugetheilte passive Rolle spielt, sondern er im Gegentheil einen vorzugsweise thätigen Antheil nimmt. Nicht die Zellenwand, wie es früher Mirbel und Meyen behaupteten, durchfurcht den Zellenraum, sondern der Inhalt, höchstens mit Hülfe der Wandung, schnürt sich ab und bewirkt Veränderungen, die nicht als eine mechanische Folge der Umwandlung der Zellenmembran, sondern als ein Erzeugniss des Inhaltes angesehen werden müssen.— Hat sich das Protoplasma nur in geringem Grade erzeugt, so fehlt der sonst Mutter- und Tochterzellen producirende Cytoblast ganz und gar, und es bildet sich keine neue Zelle, sondern bei der Sprengung der Zelle tritt das Granulum unregelmässig heraus. Hieraus geht offenbar hervor, dass nicht nur im Allgemeinen durch Concentration eines Theiles des Protoplasma der Zellkern sich bildet, sondern dass auch eine bestimmte Menge dieses Inhaltes vorhanden sein muss, um überhaupt bildungsfähig zu sein, ja mir scheint es sogar nöthig, dass Protoplasma- und Cytoblastema-Bläschen vorhanden sein müssen, die ich in diesem Falle nicht unterscheiden konnte, um productiv zu sein. Wie der nucleus sich aus dem Inhalte bildet, habe ich nicht beobachten können und scheinen die Ansichten Hartig's über diesen Punkt mehr aus der Phantasie, als aus reellen Beobachtungen, hervorgegangen zu sein. — Der Primordialschlauch ist zwar unter obwaltenden Umständen zu unterscheiden, zeigt aber nicht, wie im normalen Zustande, eine körnige Beschaffenheit seiner Oberfläche und liegt, überhaupt nicht so dehnungsfähig wie sonst, der Zellenwandung, von der er schwer zu trennen, dicht an. — Anders verhält es sich in den Fällen, in welchen die protoplasmatische Bildung so weit fortgeschritten, dass ein nucleus entstanden ist. Er liegt immer innerhalb des Primordialschlauches und zeigt nucleoli, so dass nach meinen Beobachtungen die Deutungen Hofmeisters: die nucleoli seien secundäre Producte des primären nucleus, in Frage gestellt und den entgegengesetzten Ansichten Schacht's und andern beigetreten wird. Reagentien, wie Jod und Schwefelsäure, zeigen häufig einen Mangel an Stickstoff im Zelleninhalte und im Primordialschlauche an. In diesem Falle ist die fernere Entwicklung der Zelle eine nicht so lebhafte, wie sie es bei einem reichlich mit Stickstoff versehenen Inhalte ist. Der primäre laterale Kern wird bisweilen nicht verflüchtigt, so dass der secundäre centrale nucleus häufig verkümmert erscheint, oder garnicht erzeugt und somit auch keine weitere Theilung wahrgenommen wird. In dieser Beziehung dürfte Hartig wohl Recht haben, wenn er den nucleus als Metacard insofern betrachtet, als er durch seine Auflösung zur Ernährung der Zelle beiträgt. Wenigstens ergiebt die Beobachtung, dass,

wenn eine Auflösung oder Verflüchtigung des Cytoblasten stattfindet, eine rege Lebensthätigkeit der Zelle nicht abgesprochen werden kann. — Bei der stickstoffarmen Zelle geht ferner die Verdickung der Zellenwände, die durch Anlagerungen neuer Schichten an die innere Zellwand unter Mitwirkung der Zellenmembran und des Primordialschlauches bewirkt wird, nur langsam vor sich. Diese Anlagerungen, welche oft schichtenweise erscheinen, zeigen dann nicht jene gallertartige, das Licht röthlich brechende Beschaffenheit, sondern erscheinen unelastisch und grün gefärbt, weil, wie schon früher erwähnt, jedenfalls Chlorophyll zwischen oder in dem Primordialschlauche und der Protoplasma-Substanz gelagert ist. — Dass unter diesen Umständen die Beschaffenheit der Zellenmembran sehr verschieden ercheint, gewöhnlich dünn und unelastisch, während sie im normalen Zustande verdickt und sehr elastisch ist, lässt sich somit wohl einsehen. — Vor allen Dingen wird man die Wichtigkeit des Zelleninhaltes, als des primären Gebildes, beachten müssen; aus ihm bildet sich der Cytoblast, der nicht nur, wie Wimmel meint, bei der Theilung des Zelleninhaltes eine grosse Rolle zu spielen scheint, sondern gemeinschaftlich mit dem Primordialschlauche als das Vehikel der Zellenbildung angesehen werden muss. Als ein Product des Zelleninhaltes ist das secundäre Gebilde „der Primordialschlauch“ und als tertiäres das die Bildung der neuen Zelle beschliessende Glied „die Membran“ zu betrachten. — Der lebensfähige Cytoblast attrahirt das Congulum und bald zeigt die körnige Beschaffenheit der umgebenden Schicht, dass sich die Schleimschicht (Nägeli), der Beobachtung nach ohne mit einer Membran umgeben zu sein, gebildet habe. — Bringt man Salpetersäure hinzu, so wird die Zelle aufgebläht, zersprengt und das Granulum gruppenweise zerstreut. Aus dieser gruppenweisen Zertheilung des Inhaltes möchte ich auf die, bereits an einigen Stellen vor sich gegangene, Membranbildung schliessen und den Beobachtungen nach annehmen, dass die Membran theilweise entstehe, zuerst und am Deutlichsten in der Nähe des Cytoblasten, dessen Lage übrigens für die Zellenbildung ganz gleichgültig erscheint, auftrete und dann in ihren einzelnen Stücken, die sich nach der Menge des anliegenden Granulum bald stärker bald schwächer entwickelt, mit einander verwachse. — Dass die Membran nicht überall von gleicher Dicke am Anfange ihrer Bildung erscheint, kann man namentlich auch an den in der Bildung gehemmten Zellen beobachten. —

Die Tochterzellen (Spezialmutterzellen).

Je häufiger genaue Untersuchungen über die Tochterzellen angestellt sind, um so verschiedenartigere Resultate sind aus den Beobachtungen hervorgegangen. — Während Nägeli behauptet, die Spezialmutterzellen entständen nicht direct um einen Cytoblasten, sondern um den ganzen körnigen Inhalt, in dessen Mitte ein freier Cytoblast liege, indem sie aus der gummihaltigen Flüssigkeit coaguliren, greift Wimmel, und zwar ganz mit Recht, diese Deutung Nägeli's an und leugnet ganz und gar das Vorhandensein der Tochterzellen, indem er sie nur als gallertartige Producte der Mutterzellen betrachtet wissen will und somit eine Behauptung wiederholt, die bekanntlich Schleiden schon früher aufgestellt hat. — Die Deutung Nägeli's ist unrichtig, weil nie, namentlich nicht bei der Pollenbildung, ohne Cytoblast, sondern allein um den körnigen Inhalt, Zellen entstehen. Er war zu diesem Resultate durch seine nicht genauen Beobachtungen gelangt, nach welchen höchst selten der Cytoblast ein parietaler, sondern immer ein centraler ist. — Schon früher — und die jetzigen Beobachtungen bestätigen es — habe ich nachgewiesen, dass stets ein wandständiger nucleus vorhanden ist, wenn das in reichlichem Maasse vorhandene körnige Granulum ihn schwer erkennen lässt, und dass nach einiger Zeit, in welcher auch der Inhalt durchsichtiger geworden, der Cytoblast in der Mitte liegt. — Meiner Meinung nach jedoch ist der Cytoblast, er liege, wo er wolle, der Erzeuger der Pollenzelle und nicht der Specialmutterzelle. — Gegen Wimmels sehr sorgfältige Beobachtungen muss ich bemerken, dass es inconsequent erscheint, wenn er ohne Weiteres die Tochterzellenbildung leugnet und doch zugesteht, dass die Specialmutterzellen eine Membran zeigen, die sich gegen Reagentien, wie z. B. Kali, ebenso wie die Membran der Mutterzellen und Pollenzellen verhält. — Obwohl ich nun auch der Ansicht Schleiden's und Wimmel's bin, glaube ich doch, und zwar gerade aus den, bei den in der Bildung gehemmten Zellen gemachten Beobachtungen eine andere Deutung den wahrzunehmenden Erscheinungen geben zu müssen. — Von der Thatsache ausgehend, dass, wie eben vorhin erwähnt, bei der Zelle der Inhalt das primäre, der Primordialschlauch, der diesem normal zusammengesetzten Inhalte entsprechend, zur Faltung und Abschnürung (endogene Zellenbildung) bestimmt ist, das secundäre ist, lehrt die Beobachtung nicht nur, dass die Membran das tertiäre Gebilde ist, sondern dass, ehe sie sich bildet, durch die verschiedenartige Lebensthätigkeit des Primordialschlauches, unter Mitwirkung des

granulösen Inhaltes und des nucleus Schichten abgelagert werden, von denen namentlich die nach der Mutterzellenwand hin abgelagerte zur membranartigen Schicht verdichtet wird, während die nach innen hin gelegenen mehr gelatinös bleiben und die innerste zur Membran der von den Cytoblasten gebildeten Pollenzelle wird (Fig. 19). — Ganz ähnlich hat Pringsheim bei den Oedogonien die mit Chlorophyll durchsetzten Anlagerungen in den Zellen als von dem Primordialschlauche ausgehend und durch ihn gebildet gedeutet. Man kann somit Pringsheim, wenn auch vielleicht nur in diesem Falle Recht geben, wenn er den Primordialschlauch als eine aus dem übrigen Protoplasma ausgeschiedene Schleimschicht betrachtet, die nur durch die Einwirkung der Reagentien entstehe, welche die Erhärtung der Schicht veranlasse und das täuschende Aussehen einer Membran erhalte. Hier bei den fertig gebildeten Tochterzellen ist man wenigstens nicht im Stande, den Primordialschlauch von der Zellwand, wie es sonst bei zwei glatten Häuten der Fall ist, zu trennen. — Allerdings wird man aber auf der andern Seite doch gegen die allgemeine Deutung Pringsheim's einwenden müssen, dass der freie Primordialschlauch als ein organisirtes Umhüllungsorgan betrachtet werden müsse, das freilich meiner Ansicht nach sehr modificirt und mit verschiedenen Functionen begabt auftritt. — Nicht immer sehen wir die Schleimschichten regelmässig an einander gelagert, sondern häufig bilden sich auch anastomosirende Fäden (Fig. 18) aus dem Protoplasma unter Mitwirkung des Primordialschlauches, denn sie verlaufen nicht, wie Wimmel angiebt, in den Primordialschlauch, sondern in die Wandung, wenigstens in die zarten zur Wandung gehörigen Schichten. — Auch Nägeli hat sie beobachtet und als abortirende Mutterzellen beschrieben. Jedoch nennt er sie spiralig und porös verholzt, was meiner Ansicht nach ein Irrthum zu sein scheint, indem er die allerdings etwas härtere Zellenmembran, durch welche die anastomosirenden Fäden durchscheinen, bezeichnet (Fig. 18 A). — Mit der Annahme Pringsheim's, dass der Primordialschlauch sich vollständig in die Zellwandung umwandle, könnte man hier insofern einverstanden sein, als man annehme, dass er sich vollständig contrahire und nur nach der Mutterzellenwandung hin, jedoch nicht gleichzeitig nach innen Schichten absondere, so dass er, im innern Zellenlumen liegend, sich einschnüre und Membran der sich bildenden Pollenzelle werde. Es lässt sich aber diese Deutung nur immer schwer aufstellen und kann eben so richtig als falsch sein, da die Beobachtung über den Verbleib des Primordialschlauches nichts ergiebt. Soviel ist gewiss, dass die Tochterzellen nicht von der Wand der Mutterzellen zu trennen sind, und wie es mir scheint liegt der Grund dieser Erscheinung darin, dass

die Membran der Tochterzelle, da sie nur durch Verhärtung einer und zwar der nach aussen hin abgesonderten Schicht des Primordialschlauches entstanden ist, mit der nach aussen hin gelegenen Schicht zusammenhängt und somit unzertrennlich ist. — Durch diese Deutung lässt es sich auch erklären, dass der Primordialschlauch durch Reagentien bei der Schichtenablagerung nicht zu erkennen ist, während die Membran, welche vor der Sprengung der Zelle und dem Heraustreten des Inhaltes wohl erkannt wird, nach dem Austritte weder bei dem Inhalte noch bei den zurückgebliebenen Mutterzellen erscheint. — Durch das Produciren der Schichten ist gewissermassen der Primordialschlauch in die Ablagerung aufgegangen und daher verschwunden; eine Membran ist somit nicht producirt, sondern da nur die Verdichtungsstellen durch Reagentien dunkler gefärbt werden, kann man nur von einer membranartigen Schicht sprechen, die, sobald der Inhalt herausgetreten ist, verschwindet, weil die Verdichtung aufgehört hat. — Wenn Wimmel mit Schleiden die schichtenweisen Ablagerungen in den Mutterzellen und Specialmutterzellen durch Ausdehnung der Pollenzelle entstehen lässt, so ist diese Deutung wohl schwer zu begreifen, da sie ein stossweises, periodisches Wachsen voraussetzt, bei dem jedesmal eine neue Gallerteanlagerung condensirt werden muss. Jedenfalls hat Wimmel Recht, wenn er, wie es auch die Zeichnung lehrt, angiebt, die vermeintlichen Specialmutterzellen Nägeli's seien nicht immer geschlossen, sondern treten als unvollständige Ringe heraus; darüber geben namentlich die gehemmten Zellen Aufschluss (19 C), indem sie den Mangel an Productionskraft sowohl des Primordialschlauches wie des Inhaltes nachweisen, da beide nicht die Schicht gleichmässig ringsherum, sondern unregelmässig und nur theilweise zu produciren im Stande sind. Auch die von Nägeli beobachteten dunkeln Linien, die er als Scheidewände betrachtet, lassen sich ebenso nur durch Condensirung der vom Primordialschlauche gebildeten Schichten, die da, wo sie an einander liegen, stärker markirt sind, erklären. Häufig erblickt man — jedoch immer nur, wenn nuclei vorhanden sind — Ablagerungen in den Mutterzellen, ohne dass sich vollständige Einschnürungen zeigen. Die Ablagerungen sind homogen und lassen nicht Unterschiede erkennen, aus denen man schliessen könnte, dass die Schichtungen zusammengesetzt und theils Erzeugnisse der Membran, theils des Primordialschlauches seien. Da die Membran durch Kali gefärbt wird und auch sonst die durch sie erzeugten Schichten mit gefärbt werden, hier jedoch ein wesentlicher Unterschied in der Färbung wahrzunehmen ist, so halte ich die Schichten für ein Erzeugniss des Primordialschlauches sowohl aus chemischen, und weil sie auf dieselbe Weise das reflectirte

Licht durchlassen, auch aus physikalischen Gründen. Ich bin deshalb der Ansicht, dass hier, wo eine Mehrung der Zellen durch Abscheidung zu Tochterzellen stattfindet, vermittelst des nucleus eine Abschnürung des Primordialschlauches hervorgerufen wird, an der auch die nach der Membran hin abgelagerten Schichten theilnehmen, ohne dass die starre Zellwandung sich in's Zellenlumen in die erweiterten Einfaltungen der Ablagerungsschichten hineinstreckt. Überhaupt scheint die Zellwand nicht weiter productionsfähig, da auch sonst die in der Bildung gehemmten Mutterzellen, bei welchen eine normal gebaute Wandung stets vorhanden, productiv sein müssten. Ebensowenig ist auch der Primordialschlauch allein, wie es hier scheint, zur Erzeugung geeignet, denn auch er ist normalmässig vorhanden, durch Alkohol von der Zellwand ablöslich, aber unfähig Ablagerungen, die sich später abschnüren könnten, zu erzeugen. — Gleiches ist auch wohl schon von Nägeli bei den Siphoneen und Conferven beobachtet und von Mohl gegen die Ansicht Hartig's behauptet worden. — Es treten in diesen in der Bildung gehemmten Zellen auch häufig zwei primäre Cytoblasten, ganz analog den in der normalen Bildung bei den Monocotyledonen vorkommenden, auf, die sich durch den Primordialschlauch hier aber nicht, wie es sonst der Fall, vollständig abschnüren, sondern nur eine kleine Einschnürung bilden. Auf diesem Punkte der Entwicklung bleiben sie dann stehen, indem die secundären nuclei, die sonst auch eine secundäre Abschnürung des Primordialschlauches und auch bisweilen eine Verflüchtigung der zuerstentstandenen Cytoblasten bedingen, sich nicht ausbilden (Fig. 20). Wenn somit schon vorhin angeführt wurde, dass die Verflüchtigung der Cytoblasten auf ein reges Productionsvermögen der Zelle schliessen lasse, so giebt zu dieser Behauptung eine andere, in den Mutterzellen auftretende Erscheinung noch mehr Anlass. Es ist dieses das schwer zu erklärende Auftreten bläschenartiger Gebilde (Fig. 21), die in normal gebauten Mutterzellen, sobald sie einige Zeit hindurch in Wasser gelegen, erscheinen. Nägeli und Schleiden haben schon früher diese Bläschen als transitorischen Zellenbildungsprozess beschrieben und auch in der neuesten Zeit sind sie von Hofmeister und Sanio — von letzterem bei der Sporenentwicklung von Equisetum palustre — beobachtet worden. Dass man es nicht mit Vacuolen, die durch Eindringen von Wasser entstanden, zu thun hat, ist vollständig richtig, denn sie zerplatzen nicht, sobald sie aus der gesprengten Mutterzelle hervortreten; dagegen möchte ich sie als grössere protoplasmatische Kugeln mit körniger Oberfläche versehen, in die Wasser gedrungen, betrachten, wie sie unter andern Umständen auftretend von Alex. Braun — in den Berichten der Berliner Akademie der

Wissenschaften, Mai 1852 — beschrieben worden sind. Ich sehe mich deshalb zu dieser Deutung genöthigt, weil in den gehemmten Zellen nie diese Bläschen auftreten und eben wohl nur aus dem Grunde, weil hier die Protoplasma-Masse, die wie ich früher dargethan zu haben glaube, durch Umwandlung des Chlorophyll entstanden ist, nicht die normale Beschaffenheit wie in den productiven Mutterzellen erreicht hat. — Man wird somit, durch das Vorhergehende geleitet, die Beobachtungen Ungers zu würdigen wissen, wenn auch die Deutung keine richtige zu sein scheint. Er sagt (Merismatische Zellenbildung): „Es entstehen in der Mutterzelle zarte Streifen, welche durchsichtige Streifen sind und die Körnermassen in mehre Parthien sondern. Diese Wände werden durch Wasser aufgelöst, sind also von Gummi. Bald verdicken sich die Wände und werden fest. Der erste Ansatz zur wahren Membran geschieht von den Wänden aus, dem Mittelpunkte zu. Es krystallisiren vorspringende Leisten und von diesen krystallisirt die Haut nach innen zu, so dass ein stufenweiser Fortgang stattfindet.“ — Man erkennt wohl hierin das wahre Verhalten des Primordialschlauches, der von der Wand nach innen zu sich abschnürt. — Ebenso sind die Beobachtungen Mirbel's und Meyen's: „Scheidewände wüchsen vom Rande aus in die Mutterzellen hinein“, aufzufassen und als Einstülpungen des Primordialschlauches und der durch ihn erzeugten Ablagerungen zu betrachten.

Die Pollenzellen.

Über die Pollenzellen lässt sich im Allgemeinen insofern nichts Neues sagen, als, wenn sie überhaupt erzeugt werden, sie normal gebildet sind und in den meisten Fällen wenigstens Cytoblasten besitzen und Pollenschläuche zu treiben im Stande sind, wie man es ersehen kann, wenn sie in eine Zuckerlösung oder in den aus der Blüthe von Hoya carnosa bereiteten Saft gelegt werden. Die heraustretende Fovilla zeigt die auch im normalen Zustande vorkommenden Substanzen, wie Schleim, Öltröpfchen und Amylum und auch die viscinartige Masse, welche beim Hinaustreten sich zusammenballt, gerinnt und die Bläschen- und die mit ihnen verwandten Gebilde wie mit einem dünnen Netze umgiebt, scheint in dem nöthigen Grade ausgebildet zu sein. — Dass man die einzelnen kleinen Bläschen für ölartige Substanzen halten muss, zeigt auch hier, selbst wo oft nur die Pollenzelle in der gehemmten Entwicklung auftritt, die Beobachtung, so dass man den schon früher von Senebier aufgestellten Behauptungen, der das be-

fruchtende und das ätherische Fluidum unterschied, beitreten und die Annahme Bulliard's, dass der Inhalt ein; „mucilage limpide" sei, bestreiten muss. —

Wenn diese Entwicklung der Pollenzelle, wie sie eben angegeben, sowohl in der normalen wie in der gehemmten Bildung, namentlich bei den Monocotyledonen Tulipa, Narcissus ect., als die am häufigsten vorkommende betrachtet werden muss, so zeigen sich, namentlich bei den in ihrer Entwicklung gehemmten Dicotyledonen-Antheren, auffallende Verschiedenheiten. Öffnet man eine metamorphosirte Anthere einiger Cruciferen (ich beobachtete es einige Male an Brassica und Matthiola, Fig. 25), so kann man den ganzen Strang von Pollenzellen, die von einer Spiralfaserschicht umgeben sind, herausziehen. Schon das äussere Ansehen verräth eine Eigenthümlichkeit, wie sie sonst nie wahrzunehmen, indem die Pollenkörner wie mit einem weissen zarten Filzgewebe umgeben, grau-weiss erscheinen. Die genaue Beobachtung zeigt, dass es kleine Filzfäden sind, die aus den Pollenkörnern, ganz analog den Pollenschläuchen, getreten sind. — Lange habe ich diese Bildungen nicht begreifen können, bis Gümbel seine Beobachtungen über das Spreitekorn veröffentlichte. — Es würde zu weit führen und hier überflüssig erscheinen, die interessanten Resultate der Untersuchungen Gümbels anzuführen, deshalb sei nur erwähnt, dass er Gleiches an Paeonia (Fig 15 A. B. und Eig. 22 und 23) beobachtete und dieselben Erscheinungen, wie auch ich sie einmal an derselben Pflanze wahrzunehmen Gelegenheit hatte, vorfand. — Nachdem Gümbel die verschiedenen Entwickelungsstadien des Spreitekornes kennen gelernt, lehrt die weitere Beobachtung, dass die spezifische Weiterentwicklung desselben von dem Orte seines Vorkommens sehr abhängig ist. Gümbel hat nachgewiesen, dass sich Spreitekörner (die Definition des Spreitekornes nach Gümbel ist vorne in der Einleitung gegeben) auch auf innere Wandungen bilden, und somit die nahe Beziehung mit dem Pollenkorne dargethan. Allein ein Gegensatz beider Gebilde tritt lebhaft wieder hervor, indem das Spreitekorn eine Centralzelle ist, von der die Bildung der Oberhautzellen ausquillt, während das Pollenkorn als das Glied einer innern Wandung, deren einzelne Zellen den organischen Verband aufgegeben haben, um eine andere Art von Zellen austreten zu lassen, erscheint. — Wenn man nun auch schon in der normalen Anthere die in der Grösse sehr verschiedenartig gebildeten Pollenkörner beobachten kann, so zeigt ihr Bau nicht jene Differenzen, wie ich sie in den Pollenzellen, die sich in metamorphosirten Staubblättern gebildet, sah. Ich beobachtete namentlich auch in den kleineren Körnern zarte Bläschen, von welchen aus jene vorhin erwähnten Fäden ihren Ursprung nahmen. Gümbel hat

dieselbe Erscheinung an vielen Pollenkörnern, die auf die Oberhaut und die Haare von Pflanzen gefallen waren, wahrgenommen und behauptet, dass sich im Innern des Kornes, sobald es auf die Epidermis gelangt, eine junge Generation von kleineren Sporen entwickele. — Ich habe das Verhalten von Pollenkörnern im Allgemeinen, wenn sie mit der Epidermis der Pflanzen in Berührung kommen, nicht untersucht und glaube, wie es Gümbel gezeigt, dass eine solche Degeneration auch bei jedem Pollenkorne vorkommen könne, indess spreche ich hier nur von den von mir beobachteten Fällen bei den metamorphosirten Staubblättern. Hier beobachtete ich in der Anthere selbst jenen Vorgang, wie er sich nach Gümbel sonst wohl nur ausserhalb zeigt, indem diese Fäden, die ich ebenfalls Pollenschwamm oder Karposma nennen will, mit einander verfilzt waren und der sonst im normalen Zustande äusserlich gelb gefärbten Antherenepidermis ein mattes grünlich-gelbes Aussehen gaben. — Gümbel hat entschieden Gleiches an Vicia tricolor beobachtet. Er legt einen Querschnitt durch die Anthere und findet rechts und links vom Gefässbündel das Parenchym massig entwickelt, in der Mitte Höhlen, die mit einer eigenen Haut ausgekleidet sind. Es sind dieses meiner Ansicht nach die umgewandelten und früher bereits vielfach besprochenen Zellen, die des verschiedenen, modificirten Chlorophyll-Inhaltes wegen, wie mit einer eigenen Haut ausgekleidet erscheinen; vielleicht auch sind es jene Zellengruppen, die später in Spiralzellen umgewandelt die Räume umgeben, in denen sich, wie Gümbel an Paeonia beobachtet, Pollen-Sporen bilden. Dass Gümbel eine ähnliche Erscheinung, wie ich sie an den Cruciferen und auch an Paeonia wahrgenommen, ebenfalls an letzterer Pflanze beobachtet hat, dafür scheint Folgendes zu sprechen: Er sagt, pag. 414: „Am Vorderrande des Blattes ist die Blattmasse wulstig aufgetrieben, und als hätte man hier im Kleinen das Bild von grossen, durch innere Brandbildung aufgetriebenen Massen, so sehr gleicht dieses Vorkommen einem brandigen Gebilde". Auch die Zeichnung Gümbels, die des Vergleiches wegen sich in Fig. 15 B. vorfindet, spricht für meine Deutung und besitzt die grösseste Ähnlichkeit mit dem von mir beobachteten metamorphosirten Blatte der Paeonia. — Auch die Querschnitte, die Gümbel durch dieses Blatt legt, und die Fig. 22 und 23 wiedergegeben sind, lassen insofern keinen Zweifel über die von mir gegebene Deutung zu, als sie nur zeigen, wie es schon früher durch Beobachtungen nachgewiesen, dass überall im Blattparenchym theils ganze Gruppen, theils einzelne von den Zellen metamorphosirt, die Inhaltsmassen in Cytoblastema verwandelt und somit productionsfähig werden. — Diese Räume, welche der Metamorphose unterliegen, werden

von Gümbel mit „Höhlen“ bezeichnet, und somit unterscheidet er vollständig gebildete Höhlen, also solche Zellen, die vollständig umgewandelt, und unvollständige Höhlen, die in ihrer Weiterentwicklung gehemmt sind. — Was die Entwicklung dieser eigenthümlichen Pollenzellen, Pollen-Sporen nach Gümbel, betrifft, habe ich Unterschiede zwischen der normalen Entwicklung und dieser aus den Mutterzellen nicht auffinden können, und nur die fertig gebildeten Zellen haben Verschiedenheiten wahrnehmen lassen. — Ich will es nicht unterlassen, hier auf eine eigenthümliche Erscheinung aufmerksam zu machen. Nägeli (Entwicklungsgeschichte pag. 20) erwähnt, dass er in den Pollenzellen, ebenfalls wie in den Mutterzellen, einen transitorischen Zellenbildungsprozess auftreten gesehen und widerruft dieses von ihm vielfach besprochene Factum, wahrscheinlich weil ihm bei späteren Untersuchungen diese Erscheinung nicht vorgekommen, in seiner „Zeitschrift“, I. p. 65. — Seine ersten Beobachtungen sind indess meiner Ansicht nach ganz richtig gewesen, denn es treten in der That, und namentlich ist es gerade bei den metamorphosirten Staubblättern häufiger als bei normalen der Fall, Bläschengebilde — ähnlich den bereits früher bei den Mutterzellen besprochenen — in den Pollenzellen auf. Aus diesen Bläschen, die also wenigstens nicht immer wieder verschwinden, entwickeln sich jene Fäden, oder beide stehen miteinander in deutlichem Zusammenhange. Gümbel hat ebenfalls diese Bläschengebilde, wenigstens der Zeichnung nach, deutlich bei Antirrhinum wahrgenommen. Wohl mit Recht macht Gümbel auf die verschiedene Grösse der Pollenkörner aufmerksam und behauptet, dass, während nur die grössern Pollenzellen wirkliche Pollenschläuche treiben, die kleinern es nicht thun. Er führt für diese Behauptung eine grosse Anzahl von Belegen an, und die Beobachtung spricht insofern für die von mir wahrgenommene Erscheinung, als gerade bei der Metamorphose sehr wenige grosse Pollenkörner, wohl aber vorwiegend kleine mit Bläschengebilde und somit mit Karposma entwickelt werden. An diesen kleinen Pollenzellen gelang es mir nie, wie es sonst im normalen Zustande immer der Fall ist, durch eine Lösung von Jod mit verdünnter Schwefelsäure die Exine und die Intine zu beobachten, sondern es zeigte sich nur eine Membran, wie sie früher von Gleichen — nach dessen nicht richtigen Beobachtnugen nur immer eine Haut vorkommen sollte — beschrieben wurde. Bekanntlich erscheint die Pollenzelle erst frei, nachdem die Mutterzellenwandung und der Inhalt der Zelle vollständig resorbirt sind, tritt diese Resorbtion nicht ein, so erblicken wir Erscheinungen, wie sie bei den Asclepiadeen und Orchideen auftreten; ist sie nicht vollständig, so erblickt man die aus dem nicht resorbirten Reste

gebildeten Fäden, wie sie die Orchideen wahrnehmen lassen. In den metamorphosirten Antheren findet man bei genauer Beobachtung im Verhältniss häufig nicht resorbirte Mutterzellen, die dann grosse Ähnlichkeit mit den von Nägeli beobachteten, beschriebenen und Fig. 18 A. als verholzte Mutterzellen gezeichneten Zellen besitzen, indem der Inhalt ebenso wie bei diesen, fadenförmig um die Pollenzelle, die sich oft ganz verschiedenartig entwickelt hat, gelagert erscheint. Es lehrt wohl diese Erscheinung auf's Deutlichste, dass nicht Verdickungsschichten, wie Schleiden es annahm, in den Mutterzellen gebildet werden, welche jene fadenförmige Gebilde an Oenothera hervorrufen, sondern dass der Inhalt sie erzeugt. — Gerade mitten in den verfilzten Pollenzellen beobachtete ich diese grösseren, nicht resorbirten Mutterzellen, die dann allerdings selbst keine Fäden getrieben hatten, sondern frei eingebettet lagen. —

Das die Mutterzellen umgebende Zellengewebe.

Im normalen Zustande erhält man — wenn oben an der Spitze der Anthere ein Querschnitt gemacht und durch einen unten an der Basis ausgeübten Druck die Mutterzellen herausgetrieben werden — nie einzelne, freie Zellen, sondern man findet einen Zellenstrang, der durch eine zarte Zellenschicht dicht umschlossen und somit zusammengehalten wird (Fig. 16 B). Dieser Zellenstrang hat im Allgemeinen die Form eines Kegels und ist schematisch in Fig. 16 A. dargestellt, indem unten die Anzahl der Zellen grösser, als an der Spitze ist. Die einzelnen Zellen dieses Gewebes haben die verschiedenartigsten Formen bei verschiedenen Pflanzen, und will ich hier nicht näher darauf eingehen, da in der einen Abhandlung in der Linnaea, pag. 127, ganz speciell darüber berichtet ist. Nur soviel sei hier bemerkt, dass diese Zellenschicht, die später resorbirt wird, meistens auch in den metamorphosirten Blättern gebildet wird und im Allgemeinen aus sechseckigen oder polyedrischen Zellen besteht. Später nehmen sie eine mehr ellipsoidische Form an, indem die Wände zarter und dünner werden, und verschwinden bei der Resorbtion der Mutterzellen gänzlich. — Auf's Neue bestätigt die Beobachtung, dass auch bei den metamorphosirten Staubblättern, wo sich diese Zellen bilden, sie auf's Engste mit den Mutterzellen zusammenhängen, so dass durch sie die Mutterzellen zusammengehalten werden und die Annahme, dass von den Mutterzellen eine klebrige Masse bereitet werde, durch die sie aneinander gekettet würden, über-

flüssig, ja vielleicht ganz falsch ist. Durch einen Querschnitt, den man durch die Anthere legt, werden sie leicht zerrissen, die Zellwände treten dann hervor und haben scheinbar das Aussehen von Spiralfasern, die herumgelagert sind. Irre ich nicht, so hat auch Wimmel dieses so zu sehen geglaubt und in der Zeichnung dargestellt. Mirbel hat dieser Zellenschicht in den ersten Stadien ihrer Entwicklung einige Aufmerksamkeit geschenkt, später aber, wie es Text und Abbildungen zeigen, sie nicht weiter beobachtet. Nägeli hat sie ganz übersehen und nur die Entwicklung der folgenden Zellschichten verfolgt. — Auch in diesem Falle kann man die Behauptung wagen: „Die Zellenwände zweier neben einander gelagerter homogenen Zellenreihen stehen in innigerem Zusammenhange, als die Wände nicht homogener Zellen". Denn insofern haben wir es hier mit homogenen Zellen zu thun, als beide, Mutterzellen und das umgebende Gewebe, transitorische sind und auch beide durch Druck, sowohl im normalen Zustande von den peripherischen Zellschichten, als hier von den Blattparenchymzellen leicht zu trennen sind. Diese die Mutterzellen enge umschliessende Zellenschicht ist, wie früher erwähnt, meistens vorhanden, immer wenigstens, wenn die Pollenzellen am Blattrande entwickelt sind, häufig auch, wenn sie in der Mitte des Blattes sich zeigen, also nach Gümbel Höhlen bilden. Ich vermisste sie, wenn nur einzelne Parenchymzellen umgewandelt waren. Auch Gümbel scheint sie der Zeichnung nach im erstern und ebenfalls nicht im letztern Falle gesehen zu haben. Wo sie vorhanden sind, werden sie bisweilen auch resorbirt, so dass die Pollenzelle an Raum gewinnt, wo sie bleiben, hört die Ausdehnung der Zelle auf, da die umliegenden Parenchymzellen nicht resorbirt werden, und es erklärt sich hieraus, dass im Allgemeinen in den innerhalb des Blattes gelegenen Räumen nur kleine Pollenkörner entwickelt werden, die man dann von dem verhärteten Gewebe umgeben, als einen Strang herausziehen kann. Vielleicht liegt gerade in dieser anormalen Bildung des peripherischen Gewebes der Mutterzellen und somit auch in der modificirten Ernährung der Zellen die Umwandlung, die in den kleinern, in den Höhlen gebildeten Pollenzellen, vor sich geht, zumal nicht nur diese Zellenschicht, sondern auch die andern darauf folgenden umgewandelt erscheinen. — In der normalen Anthere umgeben zehn Zellenreihen die Mutterzellen, von denen fünf resorbirt werden, so dass, wenn die Pollenkörner vollständig ausgebildet sind und im Begriffe stehen, herauszutreten, dann nur noch die erste und zweite Zellenschicht vorhanden sind, selten die dritte erscheint. Die Schichten gruppiren sich nun im Allgemeinen von aussen nach innen in folgender Ordnung:

I. Zellenschicht.	a. Epidermisschicht, einreihig, tangential.	
II. Zellenschicht.	a. radial, zweireihig (auch einreihig).	
	b. tangential, zweireihig.	
III. Zellenschicht.	a. tangential, zweireihig,	später resorbirt.
	b. radial, einreihig,	später resorbirt.
IV. Zellenschicht.	a. tangential, zweireihig,	später resorbirt.

Diese Zellenschichten werden durch die Zeichnungen Fig. 29 bis 32 erläutert. — In der zweiten Zellenschicht ist es namentlich die Radialschicht, welche die Aufmerksamkeit eines Purkinje und anderer tüchtiger Forscher auf sich zog, denn sie verwandelt sich in die Spiralfaserschicht, die wir später noch genauer betrachten wollen. Diese Anordnung der Schichten, die sich einmal in radialer, dann in tangentialer Richtung vermehren, das Entstehen und Verschwinden der Cytoblasten, Alles lässt auf ein reges Zellenleben schliessen, das sich natürlich auch den Pollenzellen mittheilt (Fig. 30 a. c.), oder auch durch sie hervorgerufen wird. Die Tangentialschicht (Fig. 30 g.) zeichnet sich durch einen stark granulirten Inhalt, durch Reichthum an Stickstoff aus, und ebenso ist es mit den daneben gelagerten Schichten (Fig. 30 d. e.). Charakteristisch ist die Umwandlung der normal gebauten Zellwände der zweiten Schicht in Spiralzellen, die in Fig. 32 b. c. angedeutet sind. Sie geht ungefähr in derselben Zeit vor sich, in der die Resorbtion der Mutterzellen begonnen hat und das anliegende Gewebe ebenfalls zu verschwinden anfängt, so dass später nur zwei oder drei Schichten (Fig. 31 e. d. g.) ausser der Epidermisschicht auftreten. Dass oft nur eine Schicht, oft mehre Zellenreihen in Spiralzellen verwandelt werden, will ich als bekannt voraussetzen, und sind von mir früher (Linnaea pag. 136 bis 140) speciell mehre Pflanzenfamilien in Bezug auf diese Umwandlung untersucht worden, die sich unmittelbar den Beobachtungen Geoffroy's — in den Nachrichten der Akademie 1711 — Du Hamel's, Senebier's, Corolo's, Comparetti's und Purkinje's anschlossen. Die Resultate, welche auch durch die an metamorphosirten Staubblättern angestellten Untersuchungen bestätigt werden, könnte man kurz so zusammenfassen:

1. Die Spiralfasern sind als secundäre Schichten der Zellenmembran zu betrachten.
2. Die Fasern hängen auf's innigste mit der Zellenwandung zusammen, so dass sie als verwachsen mit ihr erscheinen, bilden sich aber selten in der Epidermis.
3. Die Spiralfasern sind an keine bestimmte Form gebunden, sondern erscheinen bald ringförmig, bald offen u. s. w., je nach verschiedenen Pflanzen, die ihrerseits bald eine oder mehre Zellenreihen umwandeln.

4. Immer liegen jedoch die Fasern auf der innern Zellwand und ihre bald stumpfen bald spitzen Enden ragen in die Zellenlumina hinein. —

Bei den metamorphosirten Staubblättern treten nun in Bezug auf die Bildung und Umwandlung der die Pollenzellen umgebenden Zellenschichten die mannichfachsten Modificationen auf. Selten habe ich jene regelmässige Lagerung der Schichten, wie sie an den normalen Antheren erscheinen, wahrnehmen können, es war nur einige Male bei Monocotyledonen in den Fällen zu beobachten, in welchen die Pollenzellen nahe dem äussern Blattrande lagen, und auch hier waren die sonst mit Cytoblasten reichlich versehenen Zellen (Fig. 30 a. c.) rudimentär insofern gebildet, als sie kleiner und ohne Cytoblasten erschienen. Sie werden zwar resorbirt, allein da die Pollenzelle sich deshalb nur wenig ausdehnen kann, treten die thecae wenig hervor. Gewöhnlich werden aber die anliegenden Zellen nicht resorbirt, sondern nur zusammengedrückt, so dass sie vollständig verdickt erscheinen. Immer ist dieses der Fall in den Höhlen, namentlich, wenn nur einige Zellen umgewandelt sind, in der Regel beobachtete ich es auch, wenn die Pollenzellen am innern Blattrande gebildet waren (Fig. 15, Fig. 9). Merkwürdigerweise geht aber die Umwandlung der Zellen in Spiralfaserzellen, mit Ausnahme der Fälle, in denen der Pollen in Höhlen gebildet wird, immer vor sich, so dass im Allgemeinen die ganze Zellenschicht, welche der zweiten Schicht der normalen Bildung entspricht, also nicht nur die zweireihige radiale, sondern auch die zweireihige tangentiale umgewandelt wird. Die Beobachtung der Verwandlung der Blattparenchymzellen in Spiralfaserzellen lieferte im Wesentlichen keine Unterschiede von der der Antherenzellen in diese Schichten, nur werden die Antherenklappen im Verhältnisse bedeutend gross und öffnen sich so stark, dass die Enden oft fast eine gerade Linie bilden, weil, wie eben erwähnt, die Umwandlung so bedeutend ist, dass selbst Zellen des Connectivums modificirt erscheinen. — Bilden sich in der Mitte des Blattparenchyms Pollenzellen aus, so drücken sie gewöhnlich die zunächst liegenden zusammen, und nur sehr selten verwandelt sich eine Schicht peripherischer Zellen in Spiralfasern, eine Erscheinung, die nicht zu den absonderlichen gehört, da Spiralfaserzellen im Blattparenchym auftreten und auch unter andern Umständen schon früher von Schleiden (Grundzüge 1846 pag. 193) beobachtet wurden. — Wenn es gelungen ist, die Unterschiede zwischen den in der normalen und der metamorphosirten Anthere sich entwickelnden Zellenreihen hervorzuheben, wird man die verschiedene Ernährung der Pollenzelle in beiden Fällen erkennen und daraus wohl leicht ersehen, dass vielleicht allein durch den ge-

ringeren Stoffumsatz, der durch die eigenthümliche anormale Zellbildung herbeigeführt wird, die Bildung der Pollenzelle insofern modificirt wird, als sie unentwickelter bleibt und zur Bläschenbildung hinneigt. In den Fällen, in welchen im metamorphosirten Blatte Zellenschichten resorbirt werden, findet man häufig grössere Pollenzellen, die Schläuche zu treiben vermögen, in den Höhlen und Randzellen jedoch, in welchen keine Resorbtion stattfindet, sind wohl vorzugsweise nur Pollenzellen mit Bläschengebilden vorhanden. —

Die Epidermiszellen der Anthere.

Während bei der normalen Antherenbildung in der frühesten und auch in der spätern Zeit der Entwicklung in den Epidermiszellen Zellenbildungen in der Art vor sich gehen, dass neue Cytoblasten gebildet werden, die tangential gelagerte Zellen erzeugen, hört bei den metamorphosirten Staubblättern dieses rege Zellenleben schon frühe auf, indem der Zelleninhalt, der sonst aus stickstoffhaltigem Schleim und Öltröpfchen besteht, verändert wird. Es treten Farbebläschen auf, die je nach der verschiedenen Farbe, der Anthere eine bestimmte, oder wenn sie mit einander gemengt erscheinen, eine Misch-Farbe ertheilen. Geht die Pollenbildung in Höhlen vor sich, so erscheint die Epidermis oft farblos, ja bisweilen ist sie ganz vertrocknet, und beweist wohl, zumal wenn die anliegenden Parenchymzellen ebenfalls zerstört sind, dass die Bildung des Karposma's hinderlich, ja vielleicht der Grund der Zerstörung gewesen ist. Neumann (Botanische Zeitung) hat bei seinen Untersuchungen, als er einen Querschnitt durch ein metamorphosirtes Staubblatt legte, der Zeichnung und dem Texte nach dasselbe wahrgenommen, indem er von weissen Zellen, welche die modificirte Anthere bilden, spricht. Es sind dieses die eben erwähnten Epidermis und Parenchymzellen, die nach der Entfernung des Karposma's zurückgeblieben sind. — Fast immer erscheint die Epidermis, wie es im normalen Zustande wohl selten beobachtet wird, mit vielen Spaltöffnungen bedeckt und documentirt dadurch wohl deutlich, dass sie ein Product des Blattes, das sie in dieser Anzahl ebenfalls zeigt, und nicht speciell der Anthere ist. Dadurch wird aber auch die Ansicht Henslow's aus Cambrige, der noch eine ganz für sich bestehende, einfache äussere Membran über den Epidermiszellen beobachtet haben will, widerlegt, indem die Spaltöffnungen nie aus einer Membran, sondern aus Zellen, nach den Untersuchungen Gümbels, auf die ich hier wiederum verweisen muss, hervorgehen

und nach denen auch die von Nägeli beobachteten Hautdrüsen zu deuten sind. — Da wo gewissermassen eine Wucherung der Spiralfaserschichten stattfindet, wird auch die Epidermisschicht mit umgewandelt, so dass den Beobachtungen Schleidens, der auch bei der normalen Bildung diese Erscheinung beobachtet haben will, hier gewiss nicht zu widersprechen ist. In der Regel zeigen dann aber diese Epidermiszellen, wie es sonst gewöhnlich in den anliegenden Oberhautzellen des Blattes der Fall ist, nicht Scheiben aus Chlorophyll, in deren Mitte ein Zellkern mit Amylumkörnchen umgeben liegt, sondern einen granulösen, dem der Radialschichten ähnlich aussehenden Inhalt. —

Das Connectivum und die Scheidewände der Anthere.

Während im Allgemeinen in der normalen Antherenbildung die Zellen des Connectivums sich durch eine grüne, vom reichlich abgelagerten Chlorophyll herrührende, Farbe von den, des granulösen Inhaltes wegen, grau erscheinenden Scheidewandzellen unterscheiden, hören diese Unterschiede in den metamorphosirten Blättern ganz auf, da ein gleichmaschiges Gewebe die umgewandelten Zellen umgiebt, und nur selten einige dieser, das Zellengewebe bildende, Maschen, wie es sonst nicht ganz normal ist, in Spiralzellen umgewandelt werden (Fig. 25). Von einer proportionalen Entwicklung der Connectivum-, Scheidewand- und Antherenzellen, so dass die einen sich nicht auf Kosten der andern entwicklen und ausdehnen, ist bei der Metamorphose wohl nie die Rede, sondern es praedominiren immer entweder die ersteren, (Fig. 26. 27. 28.) oder im Verhältnisse die letztern (Fig. 25). Wenn man auch bei der normal entwickelten Anthere Erscheinungen dieser Art, — z. B. bei Commelina, wo die Antheren-Loculamenta bedeutend gross, oder bei Trapaeolum, bei dem die Connectivum-Zellen sehr gross und die Scheidewände sehr breit erscheinen — vorkommen, so gehören sie nicht zu den regulären Bildungen, ähnlich wie die Auswüchse, die vom Connectivum ausgehen, z. B. das rostellum der Orchideen, die Flügel-Fortsätze der Violeen, die Klappe der Asclepiadeen und Apocyneen, die federartige Wucherung des Connectivums bei Oleander u. s. w. — Bei der Metamorphose ist aber eine Wucherung so zu sagen das Gewöhnliche. Vor allen Dingen scheint aber die Anlage und mit ihr die fernere Bildung des Connectivgefässes insofern von grosser Wichtigkeit zu sein, als sie für die Form, sowohl der normalen Anthere, als auch des metamorphosirten Blattes, massgebend ist.

Bildet sich das Blattparenchym ganz entschieden nach einer Richtung, die Blüthenaxe als festen Punkt betrachtet, aus, also wendet es sich der Axe ab, so werden die antherae posticae der normalen Form gebildet, oder es erscheint bei der Metamorphose die Bildung von vier Fächern auf der untern Blattseite (Fig. 14 A). wie es Mohl an Rosa beobachtet hat und mir nach langem vergeblichen Suchen an dieser Pflanze dieselbe Erscheinung wahrzunehmen geglückt ist. Wendet sich das Blattparenchym der Axe zu, so entstehen anderseits die antherae anticae, wie sie in halb normaler, halb metamorphosirter Form bei Nuphar auftreten. Entwickelt sich endlich das Parenchym gleichmässig, so dass das Gefässbündel in der Mitte bleibt, so entsteht die am häufigsten vorkommende Form der Anthere, der auch die gewöhnliche Erscheinung bei der Metamorphose insofern entspricht, als auf beiden Blattseiten die Pollenzellen gleichmässig hervortreten, (Fig. 1 bis 13) oder wenn Theilungen in der Blattfläche entstanden, in den einzelnen Theilen abgelagert sind. (Fig. 27). — Eine Theilung des Blattes in mehre einzelne Theile, die am Connectivum zusammentreffen, kommt häufig vor und man beobachtet Formen, in welchen ein Blatt mit vier Loculamenten auf derselben Fläche und solche, in denen vier Blätter mit je einem Loculamente (Fig. 10. 11.) und ihre Combinationen vorkommen, also 4 Blätter ohne Bildung von Pollenzellen (Fig. 15. A), vier Blätter, von denen eins 2 Pollenstränge trägt (Fig. 13.) u. s. w. Eigenthümlich ist die Bildung des Pollenstranges in Fig. 9, wo er selbständig, ohne bis zu Ende am Blattrande zu verlaufen, feststeht und durch die sehr verdickten Spiralfaserzellen namentlich gehalten wird. Die nähere Beobachtung lehrt, dass der Blattrand früher bis zur Spitze der Anthere vorhanden war, später aber vertrocknete, so dass sich, wenn auch nicht scharf markirt, ein neuer Rand bildete. — Ich will hier nicht näher auf die Bildung der Antherenformen eingehen, da mein verehrter Freund Neumann in der Botanischen Zeitung genaue Beobachtungen über die vorhinerwähnten Bildungen der Staubblätter und namentlich auch über deren Übergänge, die nicht zu den Seltenheiten gehören, veröffentlicht und Resultate geliefert hat, die um so interessanter sind, als sie den complicirtesten Antherenformen der Cucurbitaceen und ähnlicher durch stichhaltige Deutungen ihren richtigen Platz in der Reihe der verschiedensten Staubblattformen anweisen. —

Kehren wir nun aber zum Anfange zurück, und werfen nochmals einen Blick auf die früher angeführten Deutungen der Antherenbildung, so werden wir, sowohl durch die Entwicklungsgeschichte der normalen Anthere, als auch die des metamorphosirten Staubblattes geleitet, den Ansichten Agardt's und Endlicher's wie auch der des Decandolle

nicht beitreten können. Gerade das metamorphosirte Blatt scheint mit seinen nunmehr wohl hinlänglich betrachteten Bildungen der Pollenzellen den Beweis zu liefern, dass sich die Lamina eines Blattes nicht seitwärts und einwärts umbiegen dürfen, um Antherenloculamente zu erzeugen, ebensowenig wie sie mit ihren Rändern nicht an die Mittelrippe anwachsen dürfen um nach Endlicher und Decandolle Antheren zu erzeugen. Ich will hier nicht viel Worte machen und Schritt vor Schritt die Deutungen dieser Männer widerlegen, sondern glaube, dass der beste Gegenbeweis aus den Consequenzen, welche aus dem Vorhergehenden resultiren, geliefert wird. — Auf der andern Seite aber ergiebt die Untersuchung eine Bestätigung der Ansichten Meyers, Röpers, Schleidens u. s. w. insofern, als die grosse Menge der einzelnen Erscheinungen zeigt, dass die Antherennath dem Blattrande entspricht, und die beiden Antheren durch Anschwellung der Seitenhälften des in die Anthere verwandelten Blattes entstehen, so dass die Loculamente Aushöhlungen im Blattparenchym, gefüllt mit veränderten Parenchymzellen (Pollenzellen), sind. — Dass diese letzte Deutung gerade durch die in der Metamorphose begriffenen Staubblätter bestättigt wird, ist wohl einzusehen und sind im Vorhergehenden so schlagende Beweise dafür geliefert, dass es neuer Argumente nicht mehr bedarf. — Dass aber die Sutur der Anthere dem Blattrande entspreche, lehrt die Beobachtung, indem entweder in den Fällen, in welchen jede Blattfläche eine Antherenanschwellung zeigt (Fig. 1 bis 8) keine Sutur auf der Blattoberfläche aufzufinden ist, wohl aber die thecae sich dem Blattrande nähern, um dort eine Nath zu erzeugen. (Fig. 1 und Fig. 5). Am deutlichsten zeigen dieses Erscheinungen, wie sie in Fig. 8., Fig. 10, 11 und 12 wiedergegeben sind, ganz eigenthümlich erscheint ein allerdings nur einmal an Matthiola beobachteter Fall, der Fig. 15 gezeichnet ist und ein anderer, der durch Fig. 9 darzustellen versucht worden ist. Man sieht hier ein etwas verdicktes Blatt, das auf seinem obern Rande gelblich gefärbte thecae zeigt, die nach unten hin mit einer Reihe, ebenfalls am Rande liegender, ovula in Verbindung stehen. Die Lage und die Anzahl der Antheren einerseits, und das verdickte Blatt anderseits zeigen, dass man es mit einer Missbildung, einer Verwachsung wenigstens zweier Blätter, durch die wahrscheinlich auch die so eigenthümliche Lage der Antheren herbeigeführt ist, zu thun hat. Wenn man dieses Blatt, als carpellum betrachtet, so glaube ich hier einen ganz analogen Fall, wie er von Decandolle beobachtet, vorzuführen, indem dieser die Meinung ausspricht, dass, wenn die Antheren in Carpelle übergehen, die Pollenkörner sich in ovula verwandeln. Dass aber hier, aus Analogien geschlossen, die Antheren sich

am Rande hinziehen würden, ist ganz natürlich, und es muss die Reihe der ovula als Fortsetzung der Pollenstränge betrachtet werden. — Ob eine directe Umwandlung des Pollens vor sich geht und wie die Metamorphose eingeleitet wird, habe ich zu beobachten nicht Gelgenheit gehabt. — Wenn nun v. Mohl in seiner „Dissertion über die Umwandlung von Antheren in Carpelle“ sagt: Es ist mir mehr als zweifelhaft, ob die Ansicht, dass die Nath der Anthere dem Blattrande entspreche, in allen Fällen richtig ist, so scheint er meiner Ansicht nach das Gesetz im Allgemeinen anzuerkennen, will aber nur auf einzelne Ausnahmefälle aufmerksam machen, und man wird ihm in der That beistimmen müssen, wenn man, wie schon früher erwähnt, die allerdings selten auftretende Erscheinung bei Rosa, (Fig. 14. A), das Analogon zu den antheris posticis beobachtet, oder bei andern Blättern Fig. 12 und Fig. 13 — (bei letzterer ist die eine Blatthälfte in drei Lappen getheilt, von denen der eine, ähnlich wie Fig. 12, zwei thecae zeigt) — Ähnliches wahrnimmt. Man wird ihm beipflichten müssen, da, — wie es auch Neumann, der gegen die Ansicht Mohls streitet, nicht deuten kann, — man auf der andern Seite bei Nuphar im normalen Zustande, das Analogon zu den antheris anticis erblickt. — Diese Ausnahmefälle wird man somit immer zugestehen müssen. —

Aus dem Vorhergehenden liesse sich Folgendes zusammenfassen:

1. Das Staubblatt ist ein Blattorgan und wächst als solches durch Zellenbildung.
2. Während im normalen Zustande das Zellgewebe sich in 5 senkrechten Reihen differenzirt, so dass eine zum Connectivum, die andern 4 zu loculis werden, tritt in der gehemmten Bildung eben diese Differenzirung nicht normal auf, sondern geht erst später durch Umwandlung des Zelleninhaltes von Zellenreihen oder einzelner Zellen vor sich.
3. Das differenzirte Zellgewebe der 4 loculi wächst dann im Allgemeinen durch Zellenbildung in seiner ganzen Masse bis zur völligen Ausbildung, bleibt aber bisweilen auch unausgebildet zurück.
4. Im normalen Zustande bilden sich im konisch-cylindrischen Strange (Fig. 16 A.), durch Bildung von Zellen in Zellen, die Mutterzellen (in den Centralzellen); im gehemmten fällt diese bestimmte Form fort, und es bilden sich unregelmässig geformte Schläuche, die mehr oder weniger an die Normalform erinnern.
5. Bei der später productionsfähigen Zelle wird der Inhalt der ursprünglichen Zelle in Cytoblastema- und Protoplasmamasse verwandelt.

6. Das für die Pollenzelle normale Zellenleben beginnt durch Ablagerung von Schichten, die sich an den nunmehr freier horvortretenden Primordialschlauch ansetzen. —
7. Es beginnt die Abschnürung des Primordialschlauches, mit und vor ihr treten Erscheinungen auf, die auf ein reges Zellenleben schliessen lassen, z. B. transitorische Zellen, Cytoblasten u. s. w.
8. Es bildet sich die Pollenzelle, die immer mehr ausgedehnt, den Inhalt der Mutterzelle comprimirt und sich mit einer später resorbtionsfähigen Schicht des Zelleninhaltes umgiebt, die früher als Spezialmutterzelle beschrieben ist.
9. Es bilden sich zwei verschiedenartige Pollenzellen aus, nämlich solche, die grösser sind und Pollenschläuche treiben und andere, kleinere, die eigenthümliche Bläschengebilde zeigen und dann Filzfäden (Karposma) entwickeln. —
10. Durch Resorbtion der Mutterzellenwände und des von ihnen umschlossenen Inhaltes wird die Pollenzelle frei.
11. Das die Pollenmasse im normalen Zustande umgebende Zellgewebe vermehrt sich durch Zellenbildung und differenziirt sich in mehre Partieen. Im gehemmten Zustande ist nicht immer in den, die Pollenzellen umgebenden, Geweben ein so reges Leben, sondern durch Ausdehnung der Pollenzellen werden die anstossenden Zellen comprimirt, so dass sie an Elasticität verlieren und härter werden. Desshalb
12. tritt auch nicht immer eine Resorbtion des umgebenden, radial und tangential gelagerten und im raschen Zellenbildungsprozesse begriffenen innersten Zellgewebes auf, namentlich nie in der Höhlenbildung.
13. Die mittlere Schicht, die sonst mit Amylum gefüllt, dieses resorbirt und sich in Spiralfasern auflöst, tritt entweder garnicht auf (in den Höhlen), oder es nehmen mehre Schichten, sogar die des Connectivum, theil und viele Zellenschichten werden in Spiralfaserzellen verwandelt.
14. Die Epidermal-Schicht, tangential gelagert, wird selten in Spiralfasern verwandelt, zeigt aber Spaltöffnungen und Hautdrüsen. —

Erläuterung der Abbildungen.

Fig. 1 bis 15. Verschiedene Entwicklungsstufen der Antheren im Verhältnisse zur Blattfläche.

Fig. 1 bis 5. Metamorphosirte Staubblätter von Monocotyledonen, namentlich Narcissus, Galanthus ect.

a. äusserlich meist gelb gefärbte thecae.

Fig. 6, 7, 8. Blätter von Papaver und Matthiola.

a. gelbgefärbte thecae.

Fig. 9. Zwei aneinanderliegende Blätter von Matthiola.

a. thecae, b. die auf dem Rande der obern Blattfläche c. liegenden thecae ihrer Lage nach allein gezeichnet, — c. der obere Blattrand mit den gelb gefärbten thecis, — d. ovula an den Rand geheftet

Fig. 10 und 11. Blätter von Papaver und Rosa.

Fig. 12 und 13. Blätter von Matthiola.

Fig. 14. Blatt von Rosa.

A. hintere Fläche, a. thecae.

Fig. 15. Blatt von Matthiola.

15 A. Blatt von Paeonia (nach Gümbel).

15 B. Blatt ebenfalls von Paeonia (nach Gümbel).

a. gelblich gefärbte thecae.

Fig. 16. Durchschnitt einer jungen Anthere von Lilium, deren Durchmesser 0,25'''. Eine grünlich-schwarze, körnige Zellgewebsmasse in der Mitte. a. die Anlage zum Gefässbündel (Connectivum), b. die Stellen, an welchen später die loculi auftreten, sind feinkörniger und heller.

16 A. Die senkrechte centrale Zellenreihe der Mutterzellen schematisch dargestellt. Unten ist die Anzahl der Zellen grösser als an der Spitze, die Form also konisch-cylindrisch.

16 B. Sechs Mutterzellen aus einer Anthere von 0,50''' Durchmesser sind freigelegt und erscheinen mit einer feinen Zellschicht, die fest in den jüngern Zuständen anhaftet, später resorbirt wird, umgeben (corfer. Fig. 29 und Fig. 30 b.).

Fig. 17. Mutterzellen mit 3 Tochterzellen. Die vierte ist und wird nicht ausgebildet, obgleich der Cytoblast mit nucleolis versehen vorhanden ist. Abortirender Cytoblast Nägeli's.

Fig. 18. Mutterzelle. Der Inhalt ist zu anatomosirenden Fäden aufgelöst und daher nicht productiv; er zeigt einen nucleus mit nucleolis.

18 A. Abortirende, spiralig und porös verholzte Mutterzellen von Citrus aurantium nach Nägeli, längerer Durchmesser 0,013'''.

Fig. 19. Mutterzellen. Tochterzellen. Pollenzellen.

19 A. von Althea rosea.

a. Mutterzellen, b. Spezialmutterzellen, c. Pollenzellen mit Cytoblast.

19 B. von Cucurbita mit abgelagerten Schichten,

a. Mutterzellen, b. Spezialmutterzellen, c. Pollenzellen mit Cytoblast zeigen Querscheidewände.

19 C. a. b. Unvollständig gebildete (gehemmte) Tochterzellen, die ringförmig angelegt, jedoch nicht geschlossen sind.

Fig. 20. Mutterzelle mit zwei Cytoblasten, im Hemmungsstadium, die des mangelhaften Granulums wegen den Primordialschlauch nicht einschnüren und deshalb auch keine secundäre Einschnürungen zeigen.

Fig. 21. Mutterzellen mit bläschenartigen Gebilden.

A. und B. vom Verfasser an Cucurbita beobachtet.

a. Raum, durch Eindringen von Wasser gebildet, b. Bläschen-Gebilde.

C. von Sanio an Equisetum palustre beobachtet.

b. Bläschen-Gebilde, das mit hellerem Granulum als die Umgebung ausgefüllt ist.

Fig. 22. Stellt nach Gümbel einen Theil des Querschnittes dar, der von Fig. 15 A. a., vom Saume genommen ist. a. b. c. sind nach Gümbel Hohlräume, in welchen Blüthenstaub unter der Form von Sporen enthalten ist. —

Fig. 23. stellt ebenfalls nach Gümbel einen Durchschnitt der eben erwähnten (wie Gümbel angiebt gleichsam brandigen) Stelle dar. Man sieht einen Raum mit Blüthenstaub in Form von Sporen dargestellt.

Fig. 24. Querschnitt eines metamorphosirten Staubblattes.

a. Gefässbündel, b. Pollenzellen, c. langgestreckte Pollenzellen im Fortsatze gelegen.

Fig. 25. Querschnitt eines zweiten metamorphosirten Blattes im spätern Stadium.

a. Gefässbündel, b. Pollenzellen, die theilweise langgestreckt erscheinen, c. Farbebläschen, d. Spiralfaserzellen.

Fig. 26. Querschnitt eines metamorphosirten Staubblattes, entsprechend dem Blatte Fig. 2.

a. Gefässbündel (Mittelrippe), b. langgestreckte Pollenzellen.

Fig. 27. Querschnitt eines metamorphosirten Staubblattes, entsprechend dem Blatte Fig. 10 und 11.

Fig. 28. Querschnitt eines metamorphosirten Staubblattes, entsprechend dem Blatte Fig. 14.

a. Mittelrippe, b. und c. Pollenzellen.

Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32. } Querschnitte einer normal gebildeten Anthere.

Fig. 29. a. Pollenzellen mit Cytoblasten. — Frühes Stadium in der Entwicklung.

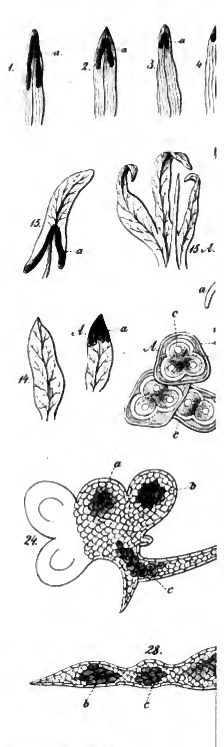
b. peripherisches Gewebe, tangential gelagert.

Fig. 30. a. Pollenzellen. b. Peripherische Tangentialschicht. c. Radial gestreckte Zellenschicht mit Cytoblasten. d. und e. Zwei Schichten, die später in Spiralfaserzellen umgewandelt werden. f. Epidermiszellen mit Hautdrüsen. g. Tangentialschicht.

Fig. 31. a. Epidermiszellen mit Farbebläschen. b. und c. Zellenschichten, die in Spiralfaserzellen umgewandelt sind. d. Peripherische Tangential-Zellenschicht. e. und f. Ort, wo früher radiale Zellenschichten lagen (Fig. 30 c.), die jetzt resorbirt sind. Der Raum ist durch Pollen-Mutterzellen ausgefüllt. g. Pollen-Mutterzellen.

Fig. 32. f. Epidermiszellen mit Hautdrüsen. c. d. g. Die drei Zellschichten, analog Fig. 30, vor der Umwandlung. Die andern Schichten sind resorbirt.

Danzig, Druck von A. W. Kafemann.


1.
a.
2.
a
3.
a
4
15.
a
15 A.
a
14.
A.
a
c
A.
c
24.
a
b
c
28.
b
c
H. Griewald ad nat. del.

Beitrag zur Bernsteinflora

von

A. Menge.

Vorwort.

Mehr als vier jahre sind verflossen seit herr geheimrath Goeppert in den Monatsberichten der berliner Academie (Über die Bernsteinflora von Dr. H. R. Goeppert Berl. 1853) eine übersicht der in meiner sammlung von bernsteinen enthaltenen pflanzenreste gab, von denen 163 arten, grösztentheils neue, wissenschaftlich bestimmt werden konnten. Die sammlung ist inzwischen nicht unbedeutend gewachsen und ohne die einzelnen stücke mit vielleicht nicht immer zutreffenden namen hier aufzuzählen, will ich einige wenige derselben beschreiben, wobei ich jedoch die hoffnung nicht aufgebe, dasz Goeppert, der die palaeontologie alljährlich durch so viele gediegene abhandlungen und werke bereichert und fördert, auch einst noch musze für die bearbeitung der bernsteinflora finden werde und dasz dann die hier gegebenen bruchstücke vervollständigt und in das ganze gehörig eingereiht werden können.

Einleitung.

Die palaeontologie der pflanzen ist in mehrfacher beziehung für den menschlichen geist anregend und belehrend. Indem sie uns nach und nach ein bild des ganzen pflanzenreichs aufrollt, zeigt sie uns erstens, dasz dieselbe idee der schöpfung, welche sich in der jetzt lebenden pflanzenwelt ausprägt, sich schon in der ersten zeit ihrer entstehung ankündigt, dasz jedoch die gattungen und arten jeder gröszern erdbildungsperiode nach den einflüssen der erde und des himmels verschieden waren. Die übergangszeit, welche vielleicht noch einen für das licht undurchdringlichen und die erdoberfläche verhüllenden dunstkreis hatte, war der erzeugung von land und luftpflanzen nicht günstig, und beschränkte sich hauptsächlich auf meeresalgen (Fucoiden); desto üppiger und massenhafter schossen diese in der Steinkohlenperiode auf und die erde war damals an einzelnen stellen einem ungeheuren treibhause gleich. Vorzüglich waren es Farn und mit den farn verwandte familien, Stigmarien, Sigillarien, Lepidodendren und Calamiten, welche in überschwenglicher masse wasserreiche buchten und thäler erfüllten. Um diese zeit war noch aller kohlenstoff, der jetzt in den ungeheuren steinkohlengebirgen abgelagert ist, als kohlensäure mit der luft gemengt oder auch an wasser und lockere erde gebunden, das innere erdfeuer verbreitete glühende wärme nach der oberfläche und die heisze luft war mit wasserdämpfen übersättigt. In den folgenden zeitperioden verminderte sich die kohlensäure, die wärme der erde und luft und somit auch die feuchtigkeit der letztern nahmen allmälig ab, und niemals wieder hat die erde eine gleiche pflanzenfülle wie in der steinkohlenzeit hervorgebracht. Aber auch die meisten gattungen und arten konnten unter so veränderten bedingungen des wachstums nicht mehr bestehen, nur wenige gattungen giengen aus einer periode

in die andere über und es entstanden neue formen durch die in die erde gelegte schaffende kraft. Die massenhaftigkeit der wenigen gesellig wachsenden pflanzenarten verschwindet, aber es mehrt sich die zahl und mannigfaltigkeit der gattungen und arten. Die schöpfung begann mit den einfachsten pflanzenformen, den im wasser wachsenden algen, entwickelte dann durch macht der erdwärme riesenhafte gefäszcryptogamen und erhob sich unter der herrschaft des tagesgestirns zur bildung der schönsten und zartesten formen der mono- und dicotyledoneen. Die erdwärme trieb starres holz und saftiges laub, die sonnenstralen lieszen krautartige pflanzen mit zarten blättern, farbigen blumen und süszen früchten sich entfalten. Erst mit der Kreideperiode beginnt die erzeugung von samenpflanzen mit mehrblättriger blumenkrone, steigt dann bedeutend in der Molasseperiode und geht noch wachsend allmälig in die Jetztzeit über. Mit dieser vervielfältigung der formen theilt sich jetzt zugleich die erdoberfläche in besondere vegetationsbezirke, deren jeder seine nur ihm angehörige gattungen und arten hat, während unter dem vorherrschenden einflusze der erdwärme die flora der ganzen erdoberfläche eine gleichmäszige war.

Der bernstein gehört wahrscheinlich der jüngsten tertiären zeit an, da in ihm bis jetzt keine einzige pflanze gefunden ist, welche in der miocenen oder eocenen braunkohle vorkommt. Zur pliocenen periode möchte ich auch die erdige braunkohle rechnen, welche an verschiedenen punkten in Preussen vorkommt und die wahrscheinlich die erzeugerin des bernsteins war. Sie enthält Holztheile von pinus, abies, taxus und andern holzartigen pflanzen, aber keine blätter oder blattabdrücke und hin und wieder spuren von bernstein. Die erdige braunkohle findet sich wie der bernstein nur auf secundärer lagerstätte. Die wellen, welche die holz- und blatttheile zerrieben, und endlich sinken lieszen, hielten den ölhaltigen leichtern bernstein noch eine zeitlang schwimmend, bis zuletzt auch dieser zugleich mit feinem thon und schlamme sich absetzte und von späteren gröszeren wellen mit sande überschüttet wurde.

Zwei fragen nun scheinen mir für die bernsteinzeit von besonderer wichtigkeit zu sein; erstens, war das clima, als der bernstein sich erzeugte, in den betreffenden gegenden ein tropisches oder doch dem tropischen sich näherndes; und zweitens geht die ähnlichkeit bei einigen eingeschlossenen pflanzen mit den lebenden so weit, dasz wir sie für dieselben erklären können? Ich masze mir nicht an, beide fragen erledigen zu können. da der bernstein über einen groszen theil der erde verbreitet ist und ich nur den preussischen und seine einschlüsze einigermaszen kenne. Was jedoch den letztern an-

betrifft, so sind die in ihm eingeschlossenen pflanzengattungen im allgemeinen und ganzen die noch jetzt in der nördlich gemäszigten zone Europas vorkommenden, einige wenige sind ausgestorben, andere haben ihre nächsten verwandten in andern erdgürteln, kältern oder wärmern, die man vielleicht als nachzügler des groszen ausgewanderten heeres der frühern zeit, die an besonders günstigen orten zurückgeblieben sind, anderntheils als vorposten und hinüberstreifer eines rauhern himmels ansehen kann. Zu den letztern kann man die von Goeppert (bernsteinflora s. 21) angeführte, jetzt dem polarkreise angehörige Andromeda ericoides, zu den erstern eine zu den lorbeerartigen pflanzen gehörende art rechnen, die ich weiterhin näher beschreiben will. Ein wärmeres clima läszt sich aus diesen vereinzelten überläufern eben so wenig herleiten, als ein kälteres, aber auch wol nicht eine verbreitung der bernsteinwälder über jene zonen hin, so lange die zahl der hinweisenden pflanzen so klein ist und nicht bernsteinlager selbst in den bezüglichen erdtheilen gefunden werden. Die beantwortung der zweiten frage über gleichheit oder verschiedenheit der arten ist viel schwieriger, da die übereinstimmung in vielen fällen so grosz und die abweichung so gering ist, dasz Goeppert, einer der grószten kenner der vorwelt wie der jetzigen pflanzenwelt, keinen anstand genommen hat, hier die identität auszusprechen. Zwei beispiele einer bedeutenden übereinstimmung werden sich unter den gleich zu beschreibenden pflanzen vorfinden, ohne dasz ich jedoch aus diesem zusammentreffen im einzelnen auf völlige gleichheit des ganzen zu schlieszen wage. Vielleicht aber laszen sich jene arten als die grundformen und urbilder der mit ihnen übereinstimmenden jetzigen ansehen und könnte man ihnen dann allenfalls denselben speciesnamen beilegen, sie jedoch noch durch zufügung eines zweiten bestimmungswortes, etwa protypus oder protogaeus, unterscheiden. Ich meine dabei nicht, dasz alle gattungen und arten aus einer urgattung oder art durch umänderung in einzelnen oder allen theilen hervorgegangen seien, sondern dasz die schöpferische kraft der natur in die pflanzen, wie in die organischen naturkörper überhaupt, ein dem innern wesen derselben entsprechendes streben nach veredlung und vervollkommnung gelegt habe, wie es etwa in dem übergange der wurzelblätter in stengel und blumenblätter ausgesprochen ist, und dasz eine gattung oder art erlösche und aussterbe, wenn das ziel dieses strebens erreicht ist oder was dasselbe ist, unter den obwaltenden äuszern naturbedingungen nicht länger bestehen kann. Das aussterben von thiergattungen, wie des Dinornis, Didus, der Rhytina und der voraussichtliche untergang von Apteryx, Notornis, Ibex und selbst der von einigen oder auch allen

farbigen menschenstämmen scheint mir, wenn gleich durch äuszere umstände früher oder später veranlaszt, im plane der schöpfung begründet zu sein. Für das aussterben von pflanzen der jetztzeit finden wir freilich weder im alluvium noch in der geschichte belege, allein die holzigen und hartrindigen gewächse, von denen sich erkennbare überbleibsel in den torfmooren finden, sind für den kurzen zeitraum der geschichte zu zählebig und beschreibungen älterer zeit zu unbestimmt, um folgerungen daraus herleiten zu können. Jene veredelung und verschönerung kann ebensowol mit einer ausdehnung und vergröszerung als einer verfeinerung und verminderung einzelner theile verbunden sein, obgleich wir gewohnt sind das plumpe und ungeheure, elephanten und rhinocerosartige als vorweltlich anzusehen. Die blumenblätter vieler pflanzen sind nicht blos durch ihre zartheit und farbe sondern auch durch gröszern umfang von den obern stengel und kelchblättern unterschieden und somit kann die kleinheit mancher vorweltlichen pflanzentheile keinen grund gegen obige annahme abgeben. Wir können uns die schaffende und erhaltende macht des weltalls nicht ohne stets fortdauernde thätigkeit denken; das ziel dieser thätigkeit kann für unsern winzigen planeten, übereinstimmend mit den frühern vorgängen in seiner bildungszeit, nur vervollkommnung jedes einzelwesens wie des groszen ganzen sein, und vervollkommnung ist ohne gleichzeitige formänderung nicht möglich, da das innere mit dem äuszern naturgemäsz stets im einklange steht.

I. Sphaerophorus moniliformis. *M.*

Thallus fruticulosus, ramosus, articulatus, articulis compresso-globosis, ramis apice conicis, furcatis, divergentibus. — Planta minima, crustacea, in forma caespitis apicem surculi Thuiae occidentalis obtegens, coloris brunei.

Ein krautartig verästeltes, gegliedertes lager, die glieder zusammengedrückt kugelförmig, die ästchen an der spitze kegelförmig, gabelig und auseinandergehend. Ein kleines krustenartiges, bräunliches pflänzchen, rasenförmig auf den endblättchen eines kleinen zweiges von Thuia occidentalis aufsitzend.

Es ist allerdings sehr fraglich, ob das pflänzchen zu Sphaerophorus gerechnet werden kann, da weder diese gattung noch irgend eine andere der flechten, soweit mir bekannt ist, ein gegliedertes lager hat. Sie scheint hier jedoch ihre nächsten verwandten zu haben und da keine apothecien vorhanden sind, habe ich keine neue gattung daraus bilden wollen. Die gliederung ist, soviel sich ersehen läszt, nicht blosz äuszerlich und die pflanze somit den algen ähnlich. Die glieder sind perlartig, in den stämmchen und hauptzweigen ziemlich von gleicher grösze, an den kegelförmigen endzinken allmälig an grösze abnehmend. Die substanz ist offenbar hart und krustenartig und die farbe scheint auch im leben bräunlich gewesen zu sein. Der ganze kleine rasen, der etwas über ein millimeter in der breite hat, bekleidet ringsum zwei offenstehende endblättchen eines Thuiazweiges, der Thuites kleinianus Goep. (Organ. überreste im bernstein I. 162. tab. V. fig. 6, 7.) oder nach späterer bestimmung (bernsteinflora p. 12.) Thuia occidentalis anzugehören scheint. Die kleinen stämmchen liegen meistens der blattfläche an, die endzweige jedoch gehen zinkenartig in die höhe. Wegen dieser art des aufliegens und wachsens habe ich es vorgezogen das pflänzchen zu sphärophorus zu stellen, obgleich es durch seine verästelung auch an Cornicularia erinnert. Die zuverläszigkeit in der anreihung vorweltlicher pflanzen an die lebenden geht, meiner ansicht nach, im allgemeinen nicht weiter, als die übereinstimmung der erkennbaren merkmale reicht; einige unsicherheit wird in den meisten fällen noch vorhanden sein, da fast nie eine vollständige pflanze vorliegt. — Nebenbei liegen zerstreute häufchen jener so oft vorkommenden büschelförmigen oder sternförmigen haare, die man einer vorweltlichen eiche zutheilt.

II. Taxoxylum electrochyton. *M.*

Truncus teres, strictus, medulla tenui, ligni stratis concentricis densissimis, cortice subcrasso; cellulis parenchymatosis, undique porosis, fibrillis spiralibus instructis; radiis

medullaribus simplicibus, cellulis 1—5 superimpositis, crebris; ductibus succiniferis numerosis. — Stirps longitudinis 70 $^{mill.}$, diametri 12 $^{mill.}$, succino inclusa.

Der stamm drathrund und ganz gerade, das mark dünn, die holzringe kreisförmig, concentrisch und sehr eng; die holzfasern nach allen seiten porös und im innern mit spiralfasern ausgekleidet; die markstralen einfach, aus 1 bis 5 übereinander liegenden zellen gebildet und häufig. Zahlreiche mit bernstein angefüllte gänge.—Der stamm hat eine länge von 70 $^{mill.}$; im durchmesser (ohne die über 1 $^{mill.}$ dicke rinde) 12 $^{mill.}$, und ist von bernstein umflossen.

Das abgebildete stammstück war bis auf seine vortretenden enden von bernstein eingeschloszen, letzterer wurde jedoch durch die neugier eines bernsteinarbeiters grösztentheils abgesprengt, so dasz jetzt nur noch ein gröszeres schaliges stück, das sich mit anhängender rinde von dem stamme gelöst hat, und sich demselben genau anschlieszt, davon übrig ist. Der abgeschlagene bernstein hat beim abspringen zugleich einen theil des holzes mit fortgerissen (Fig. 3. a.). Um die jahresringe deutlicher zu erkennen, sägte ich das stämmchen durch; das holz, obgleich ursprünglich wol sehr hart, war doch stellenweise mürbe und liesz sich nur schwer poliren. Auf der geglätteten ebenen fläche sind schon mit bloszem auge, besser jedoch bei einiger vergröszerung, 15 Jahresringe deutlich zu unterscheiden, nach dem mark und dem äuszeren umfange hin, sind sie jedoch schwer zu erkennen und mögen ihrer etwa 20 auf einem radius von 6 millimetern liegen, so dasz mehr als drei auf 1 mill. kommen (Fig. 4. b.). In den jahresringen bemerkt man zahlreiche feine punkte (Fig. 4. e.) fast alle von gleicher grösze, die mit bernsteinfädchen oder stäbchen angefüllte gänge sind. Sie liegen meistens auf den durchsetzenden markstralen. Unter dem microscop zeigen sich die um ein solches bernsteinstäbchen liegenden zellen verschoben (Fig 5. a.), ein beweis, dasz die bernsteinflüssigkeit in dem canale auch schon während des lebens einen druck auf das zellgewebe ausgeübt hat und man kann schwerlich den ganzen angefüllten raum als eigentlichen harzkanal ansehn. Im längsschnitte gelingt es wol das bernsteinstäbchen zu erhalten, aber nicht das umliegende zellgewebe. Auszer diesen feinen bernsteintheilchen liegen in dem holze zwischen den jahresringen noch einzelne schelfrige oder schalige, gröszere bernsteinstücke (Fig. 3. d. d. und Fig. 4. d.).

Die langgestreckten holzzellen oder gefäsze sind bedeutend lang, zo dasz man selten das zugespitzte ende sieht, und wie queer- und längenschnitte zeigen (Fig. 4. u. 6. a - a') bald enger bald weiter, ohne dasz man diese verschiedenheit auf rechnung des alters der schichten schreiben kann. Die mehr nach innen liegenden zellen zeigen sich fast alle spiralförmig gestreift, mit sich kreuzenden fasern weniger die der rinde zunächst liegenden. Die durchkreuzung der fasern rührt von dem durchscheinen der tiefer liegenden windungen her. Die windungen liegen oft eng an einander und berühren einander oder lassen einen zwischenraum zwischen sich, durch den die aufliegende zellenwand sich erkennen läszt, wenn man zufällig eine zelle der länge nach durchschneidet (Fig. 7.). Da die zellhaut stets etwas gelblich gefärbt ist und von abgelagerten stoffen etwas gekörnelt erscheint (Fig. 6. u. 8.), so ist sie leicht von der spiralfaser zu unterscheiden. Sowol auf der den markstralen als der dem äuszern umkreise zugewendeten seite kommen grosze, von einem einfachen oder doppelten hofe eingefaszte poren vor. Sie liegen meisten in einfacher (Fig. 6. u. 8. a'), selten in doppelter reihe (Fig. 8. a''), nicht immer in gerader linie, bald einander näher bald entfernter, auch nicht immer gleichgrosz und genau kreisrund. Selbst an den spiralig gestreiften zellen sieht man sowol bei der lebenden taxus baccata als bei dieser vorweltlichen art zahlreiche poren, was der gewöhnlichen annahme von

entstehung und bildung der poren zu widersprechen scheint. Die markstralen bilden eine einfache reihe von 2 bis 5 übereinander liegenden zellen, doch so dasz die dreizahl die häufigere ist, und die fünfzahl nicht überschritten wird. Sie enthalten auf dem radialschnitte (Fig. 6. b.) einfache rundliche oder eiförmige poren in zwei etwas ungeordneten horizontalen reihen und bedecken einzeln zu zweien, dreien oder vieren den durchschnitt einer unterliegenden parenchymatösen zelle. Weder in den horizontalen noch in den schrägen durchschnittslinien der wände konnte ich spaltendurchschnitte erkennen, woran offenbar die verwitterung derselben schuld ist, da auf einem horizontalen stammschnitte (Fig. 4. b.) sich die poren zeigen.

Von der lebenden taxus baccata unterscheidet sich diese art dadurch, dasz bei baccata alle holzzellen auf den radialen wie peripherischen schnitten gestreift sind, die faserwindungen unregelmäsziger fortgehen und mit der längenachse einen stumpfen oder fast rechten winkel bilden, so dasz sie oft ringförmig erscheinen, während sie bei electrochyta unter spitzem winkel gegen die achse gerichtet sind. Auch sind bei unserer lebenden art die poren sparsamer, kleiner und meistens elliptisch, rechts oder links gerichtet. An eine identität beider ist daher wol nicht zu denken. Übereinstimmung zeigt sich bei beiden in der form der bald engern bald weitern holzzellen, die bei der fossilen art allerdings weniger angefüllt sind, was jedoch von theilweiser zerstörung des stoffes herrühren kann. Übereinstimmung besteht ferner in der enge der aufeinanderfolgenden jahresringe des holzes. Ich zähle auf einem stücke von baccata, das mit dem bernsteinstamme ganz gleichen durchmesser hat, 20 jahresringe und eben so grosz war die zahl der bei diesem gefundenen.

Bemerken will ich hier noch, dasz sich durchschnitte frischer holztheile, wie auch andere präparate sehr schön aufbewahren lassen, wenn man sie auf einem glastäfelchen zuerst mit einer recht dicken lösung von gummi arabicum und dann mit einem glimmerblättchen oder deckgläschen belegt. Ist die lösung gehörig dick, so zeigen sich nach dem eintrocknen durchaus keine luftblasen, das präparat liegt klar da, hält sich unverändert und kann durch auflösung des gummis leicht wieder in seinem ursprünglichen zustande hergestellt werden. Auch bernsteineinschlüsze, die der oberfläche zu nahe liegen, werden durch einige tropfen dieser gummilösung auch ohne deckglas klar und gegen weiteres verderben geschützt.

III. Camphora protypa. *M.*

Perigonium sexpartitum, laciniis oblongis, pagina superiore villosis, inferiore glandulosis; Stamina novem, lacinias subaequantia; sex exteriora filamentis filiformibus, antheris rectangulis planis, basi adnatis, poris quatuor ellipticis interne dehiscentibus, valvulis reflexis persistentibus; tria interiora, filamentis supra basin ad latera glandulis duobus instructis, antheris rectangulis poris et valvulis quatuor externe sese aperientibus; staminodia tria clavata. Pistillum unum, staminibus aliquantulum minus, stylo cylindrico, stigmate dilatato obtuso. Pedunculus corolla triplo longior. — Longitudo staminum 2 $^{\text{mill.}}$, diameter perigonii expansi 6 $^{\text{mill.}}$

Blumenhülle sechstheilig, mit länglichen auf der innenseite zottigen, auf der auszenseite drüsigen blatttheilchen. Neun staubgefäsze, fast so lang wie die blumenhülle, die sechs äuszern mit fadenförmigen fäden und länglich viereckigen, flachen, am grunde angewachsenen staubbeuteln, die sich mit vier elliptischen löchern und zurückgeschla-

genen, stehenbleibenden klappen nach innen öffnen, die drei innern staubgefäsze oberhalb des grundes an beiden Seiten mit einer drüse versehen, mit vierseitigen, mit vier löchern und klappen sich nach auszen öffnenden antheren. Drei kleine keulenförmige fadenkörper (staminodia). Ein einfacher stempel etwas kleiner als die staubgefäsze, mit cylindrischem stiel und erweiteter stumpfer narbe. — Ein blumenstiel, dreimal so lang als die blume. — Länge der staubgefäsze 2 mill., durchmesser der flach ausgebreiteten blume 6 mill.

Es kann zweifelhaft sein, ob die blüte zu Camphora oder zu Cinnamomum gerechnet werden musz, da die drei innern knopfförmigen staminodien, die bei camphora vorkommen, bei dieser sonst durchaus klar im bernstein liegenden blüte nicht zu sehen sind, allein sie können im grunde des kelchs verborgen sein. Die tiefgehende theilung der hülle scheint mir anzudeuten, dasz hier nicht das ganze perigonium, sondern nur der grund desselben die reife frucht umgeben hat und da auch in allen übrigen theilen gröszere übereinstimmung mit camphora besteht, habe ich keinen anstand genommen sie dieser gattung zuzuzählen. Leider hab ich mir keine blüte der lebenden Camphora officinarum Nees. zur vergleichung verschaffen können und mich mit den oberflächlichen abbildungen der blüthentheile bei Heyne (Arzneigewächse. Berlin 1834. 3. bd. und denen von Otto Berg (Charakteristik der für die arzneikunde und technik wichtigen pflanzen genera. Berlin 1846. tab. 26.), die sehr naturgetreu und genau zu sein scheinen, begnügen müssen. Nach letztern zu urtheilen, ist die übereinstimmung unserer pflanze mit Camph. off. sehr grosz, und sind die abweichungen nicht bedeutend. Die blatttheile der hülle sind bei der bernsteinart etwas länglicher und die geraden oder verschieden gebogenen und gekrümmten steifen haare bedecken die innenseite nur bis zur hälfte. (Fig. 12. a.) Die drüsen der unbehaarten äuszern seite geben sich unter dem microscop als runde dunkle punkte zu erkennen. (Fig. 12. b.) Undeutlich sieht man drei hauptnerven durch die blattfläche hindurchgehn (Fig. 10.). Die staubfäden sind unbehaart und scheinen weniger stark zu sein wie die der officinellen art, ebenso die länglich viereckigen staubbeutel kleiner und an den ecken weniger abgerundet (Fig. 10.). Durch vergröszerung erkennt man die rundlichen zellen der staubbeutel (Fig. 11.). Die sonderbaren seitendrüsen der drei innern staubgefäsze, scheinen mir von je zwei unfruchtbaren staubgefäszen, die mit den fruchtbaren verwachsen sind, herzurühren.

Herr bernsteinhändler Jantzen ist so glücklich gewesen, ein blatt aufzufinden, was, wenn nicht zu der beschriebenen art, doch zu derselben gattung zu gehören scheint und hat mir erlaubt dasselbe abzuzeichnen. Es ist meines wissens das gröszte blatt, welches je im bernstein gefunden ist. In der 13ten und 14ten Figur ist dasselbe in natürlicher grösze von der untern und obern seite, mit genauem verlauf der nerven, soweit derselbe zu erkennen ist, dargestellt. Das blatt ist gestielt eiförmig, am rande etwas ausgeschweift, netzartig geadert, fast lederartig, auf der obern seite schwach glänzend, auf der untern matt und wie es scheint drüsig. Aus dem mittlern hauptnerv entspringen etwas oberhalb seines eintritts in das blatt zwei starke, nach der spitze hin gehende, jedoch schon ein drittel vor derselben endende, seitennerven, die man gewöhnlich ebenfalls als Hauptnerven ansieht (was durch die dreitheilung mancher blätter bei lebenden laurus-arten gerechtfertigt erscheint). Die secundären nerven gehen unter winkeln von 45° bis 50° von den hauptnerven aus, und die ternären und quaternären bilden, so weit sie erkennbar sind, ein netzartiges gewebe mit ungleichen maschen. Alle gefäszbündel treten auf der untern seite stärker aus der blattfläche hervor als auf der obern. Die spitze des blattes fehlt. — Länge des blattes (ohne spitze) 40 mill., gröszte breite 25 mill. länge des blattstiels 13 mill.

Die familie der lebenden lorbeerartigen gewächse, die mein stets hoch verehrter Lehrer G. Nees von Esenbeck in einer meisterhaften monographie in 45 gattungen mit etwa 400 arten beschrieben hat, läszt sich in zwei gröszere abtheilungen bringen, von denen die eine Asien bis zum fünf und vierzigsten grade n. br., die andere Amerika vom fünf und dreiszigsten grade s. br. bis zum fünf und dreiszigsten gr. n. br. bewohnen. Auch in rücksicht ihrer chemischen und medicinischen bestandtheile lassen sie sich in zwei gruppen ordnen, von denen die eine einen kampferartigen stoff, die andere ein ätherisches, zimmetähnliches öl in blüten, blättern, rinde oder holz erzeugen. Die Camphora officinarum wächst in China und Japan und hat sich über diesen bezirk hinaus nicht verbreitet. Das vorkommen einer nahe verwandten art im bernstein ist daher jedenfalls merkwürdig, wie man sich dasselbe auch erklären mag.

IV. Calluna primaeva. *M.*

Fig. 15 — 17.

Foliolis ovato-triquetris, quadrifariam imbricatis, margine subciliatis. — Longitudo folioli 1 mill., latitudo 0,5 mill. Latitudo surculi 1 mill.

Mit eiförmig-dreieckigen, vierreihig und schuppig über einander liegenden blättchen, die am rande meistens fein gewimpert sind. — Länge eines einzelnen blättchen 1 mill., breite 0,5 mill. Breite des zweiges 1 mill.

Ein kleiner, gebrochener blütenloser zweig, von 20 mill. länge, liegt in einem ziemlich klaren bernsteinstücke zugleich mit einem langen linienförmigen blatte, welches wahrscheinlich einer andromeda angehört hat, einem acridium, einer podura und mehrern fliegen. Von der lebenden C. vulgaris unterscheidet sich dieser pflanzenstengel vorzüglich durch die kleinheit und mehr eiförmige gestalt der blättchen, die bei vulgaris mehr länglich und von der seite gesehen fast linienförmig erscheinen. Wenn nun auch in diesen beziehungen bei vulgaris oft abweichungen vorkommen, so wag ich doch nicht auf diesen unvollständigen überrest hin die identität beider arten auszusprechen. Die borstigen wimperhärchen am rande fehlen hier zum theil und verlieren sich auch leicht am gemeinen heidekraut.

V. Erica eridanica. *M.*

Fig. 18. A. B. C. D.

Caule tereti erecto, foliis alternis linearibus patentibus, in surculis novellis confertis, in magis provectis ternis distantibus. — Long. folioli 2 mill., lat. 0,5 mill.

Stengel dratrund, aufrecht; blättchen linienförmig, abwechselnd, offenstehend, an jungen zweigen dicht gedrängt, an ältern etwas entfernt und zu dreien stehend. Länge eines blättchens 2 mill., breite 0,5 mill.

In einem klaren bernsteinstücke liegen sechs stengelbruchstücke, die erica cinerea und tetralix sehr ähnlich sind; wie weit jedoch die ähnlichkeit der ganzen pflanze gehe, kann einestheils wegen mangel der

blütentheile, anderntheils wegen des krustenartigen überzugs, der alle vorhandenen theile umhüllt nicht angegeben werden. Dieser überzug, der so oft thiere und pflanzen im bernstein bedeckt und unkenntlich macht, rührt meiner meinung nach von zufälliger feuchtigkeit oder von dem ausdringenden safte des lebend hineingeratenen körpers her.

VI. Pteropetalum palaeogonum. *M.*

Fig. 19 — 21.

Calyx quinquefidus, persistens; laciniis ovatis. Discus carnosus calycis fundum obtegens, quinquepartitus, laciniis obcordatis, in media linea elevatis. Petala quinque oblonga, basi alata, calycis laciniis alterna, duplo longiora. Stamina quinque sub disco in ejus incisuris inserta, filamentis filiformibus, calyce sublongioribus, incurvis, antheris cordatis bilocularibus. Stigma quinque partitum sessile, laciniis lineari-lanceolatis. Longitudo calycis 2,3 mill.; ejus diameter 3 mill.; long. petali 3 mill.; long. pedunculi 9 mill.

Kelch fünfspaltig stehenbleibend, mit eiförmigen lappen. Im grunde des kelchs eine fleischige fünftheilige scheibe, mit verkehrt-herzförmigen, in der mittellinie erhöhten lappen. Fünf längliche am grunde beiderseits geflügelte blumenblätter, mit den kelchblättern abwechselnd und doppelt so lang als diese. Fünf staubgefäsze in den einschnitten der scheibe und unterhalb derselben eingefügt, mit einwärts gebogenen, fadenförmigen fäden, die wenig länger sind als der kelch und herzförmigen zweifächerigen antheren. Eine fünftheilige sitzende narbe mit länglich lanzettförmigen lappen. — Länge des kelchs 2,3 mill., durchmesser desselben 3 mill., länge eines blumenblatts 3 mill., des blumenstiels 9 mill.

In einem klaren stücke bernstein liegen fünf blüten mit ihren stielen durcheinander, welche vermuten lassen, dasz die blumen in einer trugdolde oder dolde standen. Leider sind sie schon grösstentheils vermodert in den bernstein gekommen, so dasz nicht alle theile gleich gut erkannt werden können; namentlich sind die blumenblätter verschrumpft und verdreht, und nur an zweien erkennt man die angegebene gestalt. Sie erscheinen auf beiden seiten punctirt, mit schwach hervortretenden nerven. Der kelch, welcher von allen theilen am deutlichsten ist, hat dünne etwas umgeschlagene ränder und ist auf der auszenseite mit vielen querrunzeln versehn; der blumenstiel hat kleine längsfurchen; runzeln und furchen rühren vielleicht vom eintrocknen her. Wegen der sonderbaren blumenblätter und der fünftheiligen narbe, habe ich geglaubt eine neue gattung aus diesen blütentheilen aufstellen zu dürfen, die bei Evonymus wol ihre nächste verwandtschaft finden möchte.

Erklärung der Figuren.

Fig. 1. Spitze von *Thuia occidentalis* Goepp. (Thuites Kleinianus Goepp.) mit *Sphaerophorus moniliformis* theilweise besetzt; etwa fünffach vergröszert.

Fig. 2. Einzelne stämmchen stärker vergröszert.

Fig. 3. *Taxoxylum electrochyton.* Holzstämmchen in bernstein eingeschlossen in natürlicher grösze. *a.* Holz. *b.* Rinde. *c.* In das verwitterte holz eingedrungene masse, aus sandkörnchen, eisenvitriol und erdigen theilen bestehend. *d.d.* Zwei bernsteinschelfern, die zwischen den jahresringen des holzes liegen. *e.e.* Bernstein, welcher den stamm umgiebt, und theilweise abgeschlagen ist.

Fig. 4. Horizontaler querschnitt des stamms, etwas geglättet, so dasz die jahresringe deutlicher hervortreten. Nat. grösze. *a.* Mark klein und nicht sehr deutlich; *b.* Jahresringe gegen 20, von denen 15 deutlich zu erkennen. *c.* Zahlreiche markstralen, welche die jahresringe durchsetzen; *d.* Eine bernsteinschlaube zwischen zwei jahresringen. *e.e.* zahlreiche punctförmige durchschnitte von bernsteinstäbchen im holze liegend.

Fig. 5. Horizontaler querschnitt bei etwa 200maliger vergröszerung. *aa'* Holzfasern, *a* gröszere *a'* kleinere ohne bestimmte ordnung wechselnd. *b.* Durchschnitt der markstralen, in dem hier und da poren sichtbar sind.

Fig. 6. Ein mit bernstein erfüllter canal *e* neben einem markstralendurchschnitte *b.* Vergröszerung eines der bernsteinpuncte *e* in Fig. 4.

Fig. 7. Radialer längsschnitt (parallel den markstralen). *aa* Holzfasern spiralig gestreift mit poren. *bb* Markstralen mit drei oder vier einfachen zellenreihen übereinander; *b'* bogenförmige verbindung von zwei nahe übereinander liegenden zellenreihen.

Fig. 8. Einzelne parenchymatöse zellen mit zum theil durchschnittener spiralfaser, so dasz zugleich die zellenwand sichtbar wird.

Fig. 9. Peripherischer schnitt (parallel den jahresringen) *aa'* holzfasern, theils mit theils ohne spiralige streifung und poren. *bb* durchschnitt der markstralen.

Fig. 10. *Camphoru protypa*, etwa fünfmal vergröszert.

Fig. 11. Dieselbe blüte in horizontaler ausbreitung gedacht und stärker vergröszert, von oben und innen gesehn. *aaa* Zipfel der blumenhülle; *bb* die sechs äuszern, *b'b'* die drei innern staubgefäsze mit seitendrüsen am grunde. *d.* Projection des stempels und der narbe.

Fig. 12. Eine anthere von der rückenseite gesehn.

Fig. 13. Ein stück eines hüllblatts mit zottigen steifen haaren *aa,* und drüsen *bb.*

Fig. 14-15. Ein blatt, das dieser gattung und vielleicht derselben art angehört in natürl. gr. Fig. 14 von oben; fig. 15 von unten gesehn. An den leeren stellen liesz sich der verlauf der gefäsze nicht erkennen.

Fig. 16. Zweig von *Calluna primaeva* in natürl. gr.

Fig. 17. Ein theil desselben vergröszert.

Fig. 18. Ein einzelnes blättchen.

Fig. 19. *A-D.* Stengel von *Erica eridanica. A.* Spitze eines unfruchtbaren jungen zweiges; *B.* u. *C.* mittelstücke von ältern zweigen, *D.* ein stärkeres incrustirtes zweigstück.

Fig. 20. *Pteropetalum palaeogonum*, blüte von der seite gesehn in nat. gr. *a.* kelch; *b.* einzelnes blumenblatt (die übrigen sind abgefallen) *c.* ein staubgefäsz.

Fig. 21. Der kelch etwas vergröszert.

Fig. 22. Ein blumenblatt ebenso.

Fig. 23. Die blütentheile von oben und innen gesehn (ohne die blumenblätter) und vergröszert. *aa* die fünf zipfel der sitzenden narbe; *bb* eine das innere des kelchs bedeckende fünftheilige scheibe; *cc* fünf staubgefäsze, *dd* die fünf lappen des kelchs.

Bemerkungen über die schwedische Eberesche, Sorbus scandica. *Fries.*

Bei einem sechswöchentlichen aufenthalte am Ostseestrande bei Redlau im jahre 1840 wurde dieser schönlaubige schwedische baum zuerst von mir aufgefunden und zweige desselben nebst einigen andern pflanzen, die damals für Preussen noch nicht als einheimisch nachgewiesen waren, als Lobelia Dortmanni, die sich in groszer menge in dem see oberhalb Grosz Katz vorfand und Polycenum arvense, das in groszer zahl die dürren höhen von Steinberg bedeckte, in einer versammlung der Danziger naturforschenden gesellschaft vorgezeigt. Im Jahre 1843 nahm Dr. Klinsmann dieselben in seine novita atque defectus florae Gedanensis [1]) auf. Ich fand die pflanze an zwei verschiedenen stellen, zuerst als prachtvollen baum mitten im walde an den Redlauer höhen, und gewisz durch alleiniges wirken der natur ohne zuthun von menschenhand dort aufgegangen, dann in einem etwas verkümmerten jungen bäumchen dicht am rande des baches, der sich bei Redlau ins meer ergieszt, und wahrscheinlich hier angepflanzt. Beide standorte sind nunmehr zu streichen. Das junge bäumchen hat der im Frühling stark anschwellende bach fortgerissen, den gröszern baum der jetzige besitzer von Hoch Redlau mit dem ganzen walde gefällt, wobei keines baums ist geschont worden [2]). Es wird daher dem botaniker wie dem naturliebhaber nicht uninteressant sein, wenn ich einen neuen preussischen standort des baumes nachweisen kann. Vor zwei sommern hörte ich, dasz bei Kossy im Carthauser kreise ein dort unbekannter baum vorkomme und vermutete gleich, dasz es die schwedische eberesche sei, was sich dann durch blätterzweige, die ich mir bringen liesz, bestätigte. Sie steht dort an dem landwege und ist vielleicht aus dem walde hingepflanzt. Jedenfalls eignet sie sich durch ihr dunkles,

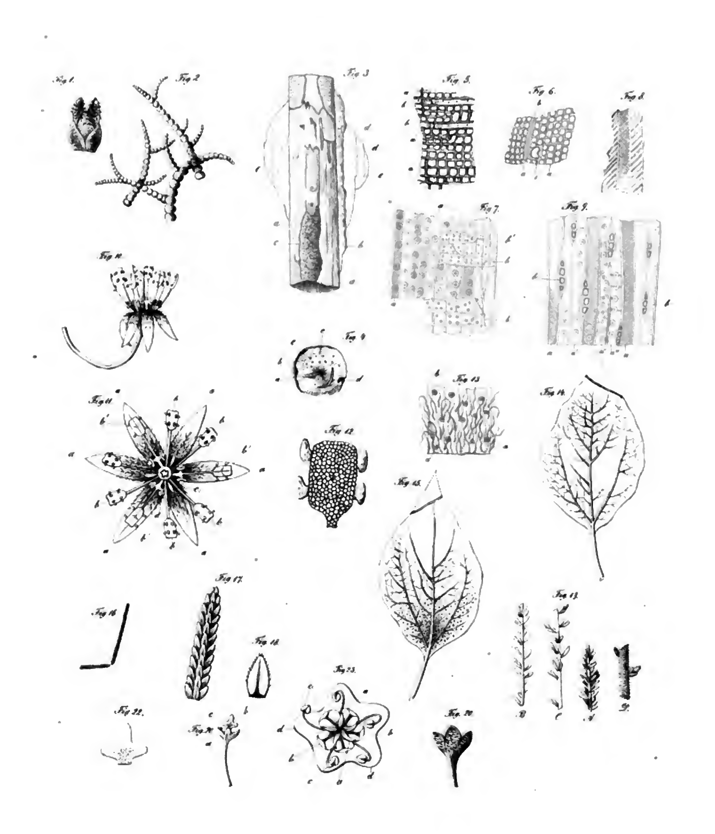
[1]) Neueste Schriften der naturforschenden Ges. in Danzig. Bd. IV. Hft. 1. Der berühmte verfasser unserer besten flora germanica, hofrath Koch führt Dr. Klinsmann als den entdecker der pflanze für Deutschland an und hat dabei übersehen, dasz Klinsmann derselben meinen namen beigefügt hat.

[2]) Tros, Rutulusve fuat, nullo discrimine agetur. Virg. Aen. 10 v. 108.

auf der untern seite mit weissem filze bedecktes blatt und ihre groszen, rothen beeren eher zum zierbaum an wegen als die gemeine eberesche. Der güte des herrn director Dr. Strehlke verdanke ich reife beeren dieses baums und will die anpflanzung hier bei Danzig damit versuchen. Mein hauptzweck bei dieser mittheilung aber ist noch ein anderer. Ich vermute nämlich, dasz die samen des baums durch drosseln (turdus viscivorus, den krammetsvogel oder irgend eine andere art) auf ihren herbstlichen wanderungen aus Schweden zu uns hinüber getragen sind. Die gerade entfernung des preussischen strandes von Gothland beträgt etwa 20, die von Oeland etwa 15 deutsche meilen, die in zwei bis drei stunden im fluge zurückgelegt werden. Verhält sich die sache in dieser art, so wäre der baum für uns als übersiedler anzusehen. Es würden sich dann gewisz noch andere sporadische standpunkte im nördlichen Pommern nachweissen lassen und vielleicht der pommersche landrücken die südliche gränze des vorkommens sein. Daher richte ich an forstbeamte und pflanzenkenner die angelegentliche bitte den vagabunden, wo er sich vorfindet, festzuhalten, aber mit schonung zu behandeln und gelegentlich über seinen aufenthaltsort mittheilung zu machen.

A. Menge.

Danzig, Druck von A. W. Kafemann.







NEUESTE

SCHRIFTEN

DER

NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT

IN

DANZIG,

SECHSTEN BANDES ZWEITES UND DRITTES HEFT.

DANZIG.

AUF KOSTEN DER NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT.

1861.

Auflösung

der

KUBISCHEN GLEICHUNGEN

durch

trigonometrische Functionen

des Kreises und der Hyperbel.

Nebst Tafeln für die letztern.

Von

Johann Friedrich Wilhelm

J. F. W. GRONAU,

Oberlehrer an der Realschule zu St. Johann in Danzig.

DANZIG.

1861.

Vorrede.

Als ich meine Abhandlung schon vollendet hatte, kamen mir die „Beiträge zur Auflösung höherer Gleichungen überhaupt und der kubischen Gleichungen insbesondere von Dr. J. P. Kulik, Professor in Prag, 1860“ in die Hände. Da die Auflösung der kubischen Gleichungen darin, wie bei mir, von neuen Tafeln, deren Ursprung auf Lambert zurückgeführt wird, abhängig gemacht ist, so glaubte ich schon, Herr Professor Kulik habe denselben Weg eingeschlagen, den ich betreten habe; allein bald fand ich, dass wir von ganz verschiedenen Gesichtspunkten ausgegangen sind. Nachdem Herr Professor Kulik nämlich gezeigt hat, dass man jede kubische Gleichung auf die Form $z^3 \pm z = \pm R$ bringen kann, gehen seine Tafeln auf den Fall $z^3 + z = \pm R$ gar nicht ein und für den andern Fall, wenn $z^3 - z = \pm R$ ist, lassen sie uns im Stich, sobald $R > 32{,}007552$ wird. Man sieht leicht ein, dass Tafeln dieser Art nur im irreducibeln Fall einer Abrundung fähig sind, weshalb auch Lambert's Skizze sich auf diesen beschränkt und nur bis $R = \frac{2}{9}\sqrt{3} = 0{,}3849002$ geht. Auch kann man durch die über diesen Grenzwerth hinaus erweiterten Tafeln Kulik's nur die reellen Wurzeln finden. Wie wenig ihm um die imaginären Wurzeln zu thun ist, kann man pag. 34 seiner Schrift lesen. Dort heisst es: „Die Tafel giebt dann nur die reelle Wurzel zwischen 1,155 und 3,2800, die imaginären Wurzeln hingegen ergeben sich aus den reellen, wenn man sie mit dem Factor $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-3})$ multiplicirt;“ was offenbar falsch ist und nur für reine kubische Gleichungen gilt. Endlich sind seine Tafeln eben nur dienlich, innerhalb der angegebenen Grenzen kubische Gleichungen zu lösen, während der Gebrauch meiner Tafeln, zu denen Lambert gleichfalls den Grundstein gelegt hat, so mannigfaltig und allgemein ist, wie der der cyklisch-trigonometrischen Tafeln. Uebrigens bin ich weit davon entfernt, durch vorstehende Bemerkungen gegen Kulik's Schrift im Ganzen auftreten zu wollen, da der Schwerpunkt der letztern anderswo liegt.

Ich habe ferner mein Bedauern auszusprechen, dass mir nicht während der Berechnung der Beispiele in § 27 und 28 Gudermann's Tafeln zu Gebote standen.

Ich will daher hier noch an zwei Beispielen eine Vergleichung zwischen seinen und meinen Tafeln anstellen und wähle dazu zunächst aus meiner Schrift pag. 34 das 10te Beispiel. Nach seiner Bezeichnung ist log 𝔖in $k = 3{,}3708655$, also nach seinen Tafeln $L\,k$ oder, wie es auch genannt wird, $k = 8{,}454852$, und log 𝔖in $\frac{k}{3} = 0{,}9213841$, dasselbe Resultat, welches ich pag. 36. Nr. 5 nach meinen Tafeln auch gefunden habe. Da hier aber die Längezahlen sehr gross sind, so soll man nach seiner Angabe eine noch grössere Genauigkeit erreichen, wenn man bei der Berechnung seine Tafeln für $L\,k + \text{Log}\, v$ zu Hilfe nimmt. Man hat in diesem Falle die Unbekannte aus folgenden Gleichungen zu finden:

$$x = \sqrt{-\frac{4b}{3}}\,.\,\text{tg}\, l\, \tfrac{1}{3}\, L\, k,\ \text{wo tg}\, k = \frac{\frac{1}{2}c}{\sqrt{(-\frac{b}{3})^3}},\ b = 3f,\ c = 2g,\ k = \omega \text{ ist.}$$

Aus log tg $k = 3{,}3708655$ folgt nach der alten Kreiseintheilung $k = 89^0\, 58'\, 32'',18682$, nach der von Gudermann vorgezogenen Centesimaleintheilung $k_1 = 99^0 97'\, 28'',9717$, $v = 2',710283$, ferner log $v = 0{,}4330147$, Log $v = 0{,}9970532$ und weil $L\,k + \text{Log}\, v = 9{,}4519048$, so ist $L\,k = 8{,}4548516$, $\frac{1}{3}\,L\,k = 2{,}8182839$. Demnach ist $\frac{L\,k}{3} + \text{Log}\, v' = 9{,}4507183$, also Log $v' = 6{,}6324344$, log $v' = 2{,}8804297$, $v' = 759',3285$, $\frac{k_1}{3} = 92^0\, 40'\, 67'',15$, $\frac{k}{3} = 83^0\, 9'\, 57'',7566$, log tg $l\,\frac{1}{3}\,L\,k$ = log tg $\frac{k}{3} = 0{,}9213840$, wie ich pag. 36, Nr. 4 mit Hilfe der Lambert'schen Formeln gleichfalls gefunden habe. Doch halte ich das vorige Resultat für richtiger.

Das zweite Beispiel entnehme ich aus Gudermann's Werk § 92. Es heisst dort: $x^3 = 20514\, x - 1988260$. Da die dieser Aufgabe entsprechende Längezahl < 2 ist, so ist Gudermann genöthigt, die auflösenden hyperbolischen Formeln in folgende cyklische umzusetzen:

$$x' = -\frac{\sqrt{\frac{4b}{3}}}{\cos\, l\, \frac{1}{3}\, L\, k},\ \left\{\begin{matrix} x \\ x'' \end{matrix}\right. = -\frac{x'}{2} \pm \sqrt{b}\,.\,\text{tg}\, l\,\tfrac{1}{3}\,L\,k\,.\,i, \text{ für } \cos k = \frac{\sqrt{(\frac{1}{3}b)^3}}{-\frac{1}{2}c}.$$

Da $b = +\,20514$, $c = -\,1988260$ ist, so findet Gudermann: log cos $k = 9{,}7549504 - 10$, $k_1 = 61^0\, 48'\, 24'',97$, $L\,k = 1{,}1644480$, $l\,\frac{1}{3}\,L\,k = 24^0\, 11'\, 22'',71$, log cos $l\,\frac{1}{3}\,L\,k = 9{,}9680745 - 10$, log tg $l\,\frac{1}{3}\,L\,k = 9{,}5998497 - 10$,

$$x' = -\,178,\ x = 89 + 57\,.\,i \text{ und } x'' = 89 - 57\,.\,i.$$

Gudermann hat also 1) k oder k_1, 2) $L\,k$, 3) $l\,\frac{1}{3}\,L\,k$, 4) cos $\frac{k}{3}$, 5) tg $\frac{k}{3}$ zu berechnen, bevor er die drei Werthe von x findet.

Ich rechne mit meinen Tafeln so: Setze ich $x = - X$, so habe ich $X^3 = 20514\ X + 1988260$ aufzulösen. Da hier $f = 6838$, $g = 994130$ ist, so erhält man $\log \mathrm{Cos}\ z = 0{,}24505$, $z' = 0{,}50571$, $\frac{z'}{3} = 0{,}16857$, $\log \mathrm{Cos}\ \frac{z}{3} = 0{,}03192$, $\log \mathrm{Sin}\ \frac{z}{3} = 9{,}59986$, $x' = - 177{,}995$, x und $x'' = 88{,}9975 \pm i\ .\ 57{,}001$. Natürlich würde die Rechnuug, mit siebenstelligen Tafeln ausgeführt, genauere Resultate geliefert haben. Ich habe also nur nöthig, mir 1) z', 2) $\mathrm{Cos}\ \frac{z}{3}$, 3) $\mathrm{Sin}\frac{z}{3}$ zu verschaffen, um x zu finden.

Endlich will ich noch in Beziehung auf die § 33 behandelten biquadratischen Gleichungen eine Bemerkung machen. Herr Vallès (Comptes rendus, 5. Juillet 1858,) hebt, den Autoren gegenüber, welche bisher über die Euler'sche Auflösungsmethode geschrieben haben, hervor, dass dieselben sich in Bezug auf die beiden in dem Ausdrucke $\pm u \pm v \pm w$ enthaltenen Systeme von je vier Auflösungen geirrt haben, wenn sie behaupteten, dass man ohne Weiteres das erste System $u + v + w$ $- u - v + w$, $- u + v - w$, $u - v - w$ zu wählen habe, wenn b, der Coefficient von x negativ ist, und das zweite System $- u - v - w$, $- u + v + w$, $u - v + w$ $u + v - w$, wenn b positiv ist, und nachdem er gezeigt hat, dass für das Beispiel $x^4 + 24\ x^2 \pm 48\ x + 52 = 0$, worin $a = 24$, $b = \pm 48$, $c = 52$, $u = \pm 1$, $v = \pm 2\ i$, $w = \pm 3\ i$ ist, gerade das Gegentheil stattfindet, giebt er folgende Regeln als untrüglich an:

Premier cas, b est positif dans l'équation proposée.

Si alors a est positif, on prendra le système (1).

Si a est négatif, on prendra le système (2), lorsque $\frac{a^2}{4} - c$ sera plus grand que zéro, et le système (1), lorsque au contraire cette quantité sera moindre que zéro.

Deuxième cas, b est négatif dans la proposée.

Si alors a est positif, on doit prendre le système (2).

Si a est négatif, on prendra le système (1) ou le système (2), suivant que la quantité $\frac{a^2}{4} - c$ sera plus grande ou plus petite que zéro.

Dass aber auch diese Regeln nicht ausreichend sind, soll gleichfalls an einem Beispiel gezeigt werden: Es sei $x^4 - 16\ x - 12 = 0$, wo $a = 0$, $b = - 16$, $\frac{a^2}{4} - c = 12$, $u = \pm 1$, $v = \pm \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$, $w = \pm \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ ist. In so fern nun der Fall $a = 0$ in seinen Regeln nicht vorgesehen ist, würde man durch dieselben keinen Aufschluss über das zu wählende System erhalten; in so fern man sich

aber erlauben wollte, Null sowohl als positiv, wie auch als negativ zu betrachten, würde man sowohl das System (1), wie auch das System (2) als Auflösungen der vorgelegten Gleichungen zu nehmen haben, was doch nicht angeht.

Die richtigen Regeln hat übrigens Förstemann schon 1836 in dem Programm des Danziger Gymnasiums bekannt gemacht, wie solches Herr Direktor Strehlke vor einiger Zeit in einer Sitzung der hiesigen naturforschenden Gesellschaft bei Erwähnung von Vallès' Notiz in Erinnerung brachte. Diese Regeln Förstemann's lauten, kurz zusammengefasst, also:

1) Wenn von den drei reellen Wurzeln der kubischen Hilfsgleichung zwei negativ sind, so wählt man das System (1), sofern b positiv ist, und das System (2), wofern b negativ ist.

2) Sind aber die Wurzeln der kubischen Hilfsgleichung anders beschaffen, so findet das Gegentheil statt.

Danzig, im Juni 1861.

Der Verfasser.

Einleitung.

§. 1. Nachdem die Griechen einige geometrische Probleme, welche bei arithmetischer Behandlung auf kubische Gleichungen geführt haben würden, durch Kegelschnitte gelöst hatten, nachdem die Araber von jeder kubischen Gleichung durch die Kegelschnitte auf dem Wege der Construction eine Wurzel gefunden hatten, dauerte es noch lange, bis die Wissenschaft durch Cardan's Formel bereichert wurde. Aber die Freude über diesen Fund war kurz, denn von allen Seiten liessen sich bald Klagen über ihre Mängel vernehmen. Was hat der Casus irreducibilis nicht für Anstrengungen hervorgerufen? Weil aber alle Bemühungen, für diesen Fall andre, reelle, geschlossene, arithmetische Ausdrücke zu finden, vergeblich waren, so liess man sich, durch Vieta veranlasst, die Einmischung der cyklischen Trigonometrie gefallen. Aber auch im reducibeln Fall konnten namentlich die Praktiker sich, mit der cardanischen Formel wegen ihrer sehr unlogarithmischen Gestalt nicht befreunden. Sie sahen es daher schon als einen Gewinn an, selbst durch Einführung von zwei Hilfswinkeln den unmittelbaren Gebrauch dieser Formel zu vermeiden, oder durch die neben den Gaussi'schen Logarithmentafeln zu gebrauchenden Hilfstafeln von Marth (Astronomische Nachrichten Nr. 1016) die cardanische Formel ganz und gar zu umgehen. Und manche Theoretiker wieder, indem sie die arithmetische Lösung des reducibeln und die trigonometrische des irreducibeln Falles als coordinirt ansahen, wurden durch den Mangel an Einheit bei diesen verschiedenen Auflösungsmethoden verletzt und suchten, besonders seitdem man angefangen hatte, das Wesen der negativen und imaginären Grössen zu ergründen, wie Wittstein (Grunert's Archiv 7, 402) und Riecke (Die Rechnung mit Richtungszahlen 1856, pag. 100), die beiden Methoden in einen künstlichen Zusammenhang zu bringen, der aber, weil er künstlich war, für die Praxis unfruchtbar blieb.

§. 2. Auch ich habe mich mit der Erforschung der Natur des Negativen und Imaginären viel beschäftigt und davon in meiner Schrift: „Ueber die Anzahl der Glieder in den Summenformeln der Progressionen 1845“ und in dem Schulprogramm:

„Ueber die allgemeine und volle Giltigkeit mathematischer Formeln, erster Theil, 1857“ Zeugniss abgelegt. Schon in der ersten Schrift habe ich auf den innigen Zusammenhang des Kreises und der gleichseitigen Hyperbel aufmerksam gemacht, noch mehr werde ich nächstens in dem zweiten, geometrischen Theil der andern Schrift, Gelegenheit haben, die Zusammengehörigkeit der beiden Kurven nachzuweisen, was immer noch nöthig zu sein scheint, weil selbst Riecke (pag. 164 gegen Max. Marie) der Ansicht ist, „dass solche Betrachtungen nicht geeignet sind, über das Wesen des Imaginären Licht zu verbreiten.“ Diese von mir behauptete Unzertrennlichkeit der beiden Kegelschnitte ist es nun, worauf die folgende Auflösung der kubischen Gleichungen beruht. Die Einheit der Methode ist im Voraus durch die Einheit der beiden Kurven gewährleistet, und wer da glaubt, dass in praktischer Hinsicht die bekannte cyklisch-trigonometrische Auflösung des irreducibeln Falles unübertrefflich ist, wird auch einräumen müssen, dass die hyperbolisch-trigonometrische Auflösung des reducibeln Falles, wie sie auf den folgenden Blättern vorgelegt werden soll, nichts zu wünschen übrig lässt, wenn man im Besitze entsprechender Tafeln ist.

§. 3. Bei diesem Unternehmen bin ich durch bedeutende Vorarbeiten unterstützt worden. Im Jahre 1730 sprach sich Moivre über den Zusammenhang beider Kurven aufs Unzweideutigste aus. (Vergl. *Montucla, Histoire des Mathématiques,* 3, *156.*) Der Pater Riccati nannte jene Hyperbel-Coordinaten schon hyperbolischen Cosinus und Sinus. Ferner rieth Lambert (*Histoire de l'Académie Royale des sciences, à Berlin, 1770, pag. 350*), die hyperbolischen Sektoren zur Auflösung des reducibeln Falls der kubischen Gleichungen zu benutzen und gab ein Bruchstück der von mir angekündigten Tafeln, indem er einen gewissen Hilfswinkel (ω) von Grad zu Grad fortschreiten liess.

Aber vor Allem habe ich die sehr gründliche und umfangreiche Arbeit Gudermann's (Journal für Mathematik von Crelle, 1830 — 1832) über Potenzialfunctionen in Erinnerung zu bringen. Daselbst findet sich ausser vielen andern vortrefflichen Sachen nicht bloss eine vollständige Auflösung der kubischen Gleichungen von der Form $x^3 = bx + c$ durch cyklische und hyperbolische Functionen, sondern auch sehr ausgedehnte Tafeln für die letztern, so dass es scheinen könnte, als wäre meine Arbeit überflüssig. Wenn ich dennoch den Muth behalten habe, mit meiner Schrift vor das Publicum zu treten, so liegt der Grund davon in Folgendem. Zunächst ist der Weg, den ich gegangen bin, von dem Gudermann's gänzlich verschieden; während Gudermann § 92 zu dem Schlusse gelangt: „Die cardanische Formel ist somit über-

flüssig", ist dieselbe bei mir Alles, insofern ich von ihr ausgehe. Ferner beschäftigt sich Gudermann mit den andern Formen der kubischen Gleichungen gar nicht; er überlässt dem Rechner, sie vorerst auf die obige Form zu bringen. Ich glaube aber nicht zu viel zu sagen, wenn ich behaupte, dass diese Reductionen mehr Zeit erfordern als die Auflösung der nicht reducirten Gleichungen nach den von mir § 26, C, D aufgestellten Formeln. Dann möchte der Umstand, dass Gudermann in seine Formeln noch andre Begriffe, wie Längezahl ($L\,k$) und Longitudinalzahl ($l\,k$), gebracht hat, die Verbreitung seiner Ideen behindert haben, während ich mich der möglichst grössten Einfachheit beflissen habe. Was endlich Gudermann's im Uebrigen sehr verdienstliche Tafeln anbelangt, so wird ihr Gebrauch für den vorliegenden Zweck wenigstens dadurch erschwert, dass sie nicht von Anfang bis zu Ende nach einem und demselben System ausgeführt sind. So lange nämlich das schon erwähnte $\omega < 74^0\,36'\,4''$ ist, muss man sich mit den die hyperbolischen und cyklischen Funktionen vermittelnden Längezahlen begnügen; erst von $L\,k$ (meinem z) $= 2$ ab, welches Argument anfänglich um 0,001, später um 0,01 wächst, geben seine Tafeln die allein schnell zum Ziele führenden hyperbolischen Cosinus und Sinus an, und für die letzten Grade des Quadranten soll man dann doch lieber sich seiner Tabellen für $L\,k + \text{Log}\,v$ bedienen, wo v das Complement von k ist. In meinen Tafeln dagegen schreitet jener Lambert'sche Hilfswinkel ω für die ersten und letzten sechs Grade des Quadranten von 10 zu 10 Sekunden und für die übrigen Grade desselben von Minute zu Minute einfach fort.

Erster Theil.

Die Trisektion.

§ 4. Wenn man zwei Linien $A\,C = x$ und $B\,C = y$ hat, welche zusammen $AB = r$ betragen, und die eine von den beiden veränderlichen Linien grösser als r wird, so muss die andere natürlich negativ werden, oder wir müssen sie, absolut genommen, von der einen abziehen. Während nun, so lange in der That $x + y = r$ ist, der gemeinschaftliche Punkt C der beiden Veränderlichen nur auf der beschränkten Strecke zwischen A und B liegen kann, ist seine Lage, sobald $x - y = r$ oder $-x + y = r$ wird, an keine Schranke gebunden, er kann auf der unbegrenzten Linie im ersten Fall u. a. in D, im andern Falle in E sich befinden. Fig. 1.

Ebenso wenn es zwei veränderliche Quadrate $C\,D^2 = x^2$ und $D\,E^2 = y^2$ giebt, Fig. 2.

die zusammen einem constanten Quadrat $CE^2 = r^2$ gleich sind, wenn also $x^2 + y^2 = r^2$ ist, so kann der durch die Seiten der veränderlichen Quadrate x und y als durch Coordinaten bestimmte Punkt E nur in dem beschränkten Umfange eines Kreises liegen, wobei x und y positiv oder negativ zu nehmen sind. So wie aber das eine Quadrat $x^2 > r^2$ wird, muss das andere hinzu zu fügende veränderliche Quadrat negativ sein, d. h. das andre veränderliche Quadrat, als absolute Grösse aufgefasst, muss von dem ersten veränderlichen Quadrate abgezogen werden, damit man das constante Quadrat r^2 erlange; es muss dann $x^2 - y^2 = r^2$ sein. In dem letztern Falle hört natürlich r auf Hypotenuse zu sein, es wird eine Cathete CB, während die Abscisse $CG = x$ die neue Hypotenuse CH wird und die andere Cathete BH die Grösse der zugehörigen und leicht zu zeichnenden Ordinate $GF = y$ angiebt. Indem dabei die Coordinaten x und y successive positiv oder negativ angenommen werden, kann F alle Punkte der zu beiden Seiten ins Unendliche sich ausdehnenden krummen Linie durchlaufen, welche man bekanntlich die gleichseitige Hyperbel nennt.

§ 5. Ich werde im Verlaufe der Arbeit sowohl beim Kreise als bei der zugehörigen gleichseitigen Hyperbel das Verhältniss $\frac{x}{r}$ durch ξ und das Verhältniss $\frac{y}{r}$ durch η bezeichnen, so dass die Gleichung des Kreises $\xi^2 + \eta^2 = 1$ und

die Gleichung der zugehörigen Hyperbel $\xi^2 - \eta^2 = 1$ ist.

Bekanntlich werden beim Kreise die Zahlen ξ und η Cosinus und Sinus des Centriwinkels $ECD = C$ oder des zugehörigen mit dem Radius $= 1$ beschriebenen Bogens $z = \frac{\pi}{180} . C$ genannt. Aber es hindert auch nichts, ξ und η den Cosinus und Sinus des entsprechenden Sektors $s = r^2 . \frac{z}{2} = \frac{r^2 . \pi}{360} C$ zu nennen und zu schreiben:

$$\xi = \cos s = \cos z, \quad \eta = \sin s = \sin z,$$

wobei die letzte Schreibart nicht sagen will, dass ξ und η Funktionen des Bogens z sind, sonders des Sektors, dessen Flächeninhalt, abgesehen von dem constanten halben Quadrat des Radius, durch die Länge des Bogens z bedingt wird. — Ebenso nenne ich $\xi = \frac{CG}{r}$ und $\eta = \frac{FG}{r}$ die hyperbolischen Cosinus und Sinus des hyperbolischen Sektors $CBF = S$, welcher von CB, CF und dem Hyperbelbogen BF eingeschlossen ist und schreibe $\xi = \text{Cos}\, S$ und $\eta = \text{Sin}\, S$. Durch die lateinischen kleinen Anfangsbuchstaben der Wörter Cosinus und Sinus soll man an den Kreis, und durch die grossen lateinischen Anfangsbuchstaben der nämlichen Wörter an die Hyperbel erinnert werden. Setzen wir nun, schon der Symmetrie wegen, auch $S = \frac{r^2}{2} . z$, wo z ein

Logarithme ist, über dessen Bedeutung wir bald sprechen werden, so können wir auch schreiben

$$\xi = \mathrm{Cos}\, z \text{ und } \eta = \mathrm{Sin}\, z,$$

was wieder sagen will, ξ und η seien Funktionen eines hyperbolischen Sektors, dessen Fläche, ausser von der constanten Potenz der Hyperbel $\left(\frac{r^2}{2}\right)$ nur von der Grösse eines gewissen Logarithmen abhängt. Bezeichnen wir den Winkel HCB, welcher der schon in § 3 erwähnte Hilfswinkel ist, mit ω, so ist

$$\frac{CH}{CB} = \sec\, \omega \text{ und } \frac{BH}{CB} = \mathrm{tg}\ \omega$$

und weil $CH = CG$ und $BH = FG$ ist, so haben wir auch

$$\mathrm{Cos}\, z = \sec\, \omega \text{ und } \mathrm{Sin}\, z = \mathrm{tg}\ \omega.$$

A. Die Trisektion des Kreissektors.

§ 6. Natürlich darf ich hier nur andeutend zu Werke gehen.

Aus der Gleichung $\sin v^2 + \cos v^2 = 1$ und aus den Gleichungen:

$$\text{(a)} \ldots \begin{cases} \sin (v + w) = \sin v \,.\, \cos w + \cos v \,.\, \sin w \\ \cos (v + w) = \cos v \,.\, \cos w - \sin v \,.\, \sin w \end{cases}$$

folgt

$$\text{(b)} \ldots \begin{cases} \sin 2\, v = 2 \,.\, \sin v \,.\, \cos v \\ \cos 2\, v = \cos v^2 - \sin v^2 = 1 - 2 \,.\, \sin v^2 = 2 \,.\, \cos v^2 - 1 \end{cases}$$

$$\text{(c)} \ldots \begin{cases} \sin 3\, v = 3 \,.\, \sin v - 4 \,.\, \sin v^3 \\ \cos 3\, v = 4 \,.\, \cos v^3 - 3 \,.\, \cos v \end{cases}$$

Aus (b) ergiebt sich für die Zweitheilung:

$$\text{(d)} \ldots \begin{cases} \sin \left(\frac{v}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos v}{2}} \\ \cos \left(\frac{v}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos v}{2}} \end{cases}$$

und aus (c) für die Dreitheilung:

$$\text{(e)} \ldots \begin{cases} \sin \left(\frac{v}{3}\right)^3 = \frac{3}{4} \sin \left(\frac{v}{3}\right) - \frac{\sin v}{4} \\ \cos \left(\frac{v}{3}\right)^3 = \frac{3}{4} \cos \left(\frac{v}{3}\right) + \frac{\cos v}{4} \end{cases}$$

Diese Gleichungen (e) für $\sin \left(\frac{v}{3}\right)$ und $\cos \left(\frac{v}{3}\right)$ werden bekanntlich nicht weiter aufgelöst, sondern das Verlangte durch die cyklisch-trigonometrischen Tafeln gefunden.

Wenn aber $\sin v$ gegeben ist, so ist nicht bloss
$v = v_1$, sondern unter andern auch $v = 180^0 - v$ und $v = -(180^0 + v)$.

Demnach ist $\frac{v}{3}$ 1) $= \frac{v}{3}$, 2) $= 60^0 - \frac{v}{3}$, 3) $= -\left(60^0 + \frac{v}{3}\right)$

(f.) und $\sin\left(\frac{v}{3}\right) =$ 1) $\sin\left(\frac{v}{3}\right)$, 2) $= \sin\left(60^0 - \frac{v}{3}\right)$, 3) $= -\sin\left(60^0 + \frac{v}{3}\right)$,

oder $\left.\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{v}{3}\right) \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\left(\frac{v}{3}\right)$.

Ebenso wenn $\cos v$ gegeben ist, so kann u. a.

v 1) $= v$, 2) $= 360^0 - v$, 3) $= 360^0 + v$ sein,

also $\frac{v}{3}$ 1) $= \frac{v}{3}$, 2) $= 120^0 - \frac{v}{3}$, 3) $= 120^0 + \frac{v}{3}$.

Weil aber $\cos\left(120^0 - \frac{v}{3}\right) = -\cos\left(60^0 + \frac{v}{3}\right)$

und $\cos\left(120^0 + \frac{v}{3}\right) = -\cos\left(60^0 - \frac{v}{3}\right)$ ist, so ergeben sich aus dem bekannten $\cos v$ für den $\cos\left(\frac{v}{3}\right)$ folgende drei Werthe: Es ist

(g.) $\cos\left(\frac{v}{3}\right) =$ 1) $\cos\left(\frac{v}{3}\right)$, 2) $= -\cos\left(60^0 + \frac{v}{3}\right)$, 3) $= -\cos\left(60^0 - \frac{v}{3}\right)$,

oder $\left.\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{2}\cos\left(\frac{v}{3}\right) \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin\left(\frac{v}{3}\right)$.

Dass die andern, hier übergangenen Werthe für v keine neuen Werthe für $\sin\left(\frac{v}{3}\right)$ und $\cos\left(\frac{v}{3}\right)$ liefern, ist bekannt genug.

B. Die Trisektion eines Sektors der gleichseitigen Hyperbel.

Fig. 3. § 7. Aus dem Scheitel A und dem beliebigen Punkte B der gleichseitigen Hyperbel fälle man auf die Asymptote die Lothe $AE \left(= CE = \frac{r}{\sqrt{2}} = c\right)$ und BD (= o) und nenne die Veränderliche $CD = u$, so folgt bekanntlich (s. Anhang) aus der Gleichung: $u \cdot o = c^2 = \frac{r^2}{2}$, dass der Raum $AEDB$ (= A) zwischen der Asymptote, der Hyperbel und den beiden mit der andern Asymptote parallelen Linien, kurz, dass $A = c^2$ Log nat. $\left(\frac{u}{c}\right) = c^2 \cdot \text{Log}\left(\frac{u}{c}\right)$ ist.

Weil aber $\triangle\ CDB = \triangle\ ACE$ ist, so ist der hyperbolische Sektor CAB, so ist $S = A$, also

$$S = c^2 \cdot \text{Log}\left(\frac{u}{c}\right)$$

Nun ist, wenn $CG = x$, $BG = y$ gesetzt wird, $x^2 - y^2 = r^2 = 2\,c^2$.

Also haben wir: $2\,u \cdot o = x^2 - y^2$.

Aber es ist tg $BCD = \frac{o}{u} =$ t und tg $ACB = \frac{y}{x} = T$.

Weil nun tg $(ACB + BCD) = \frac{T + t}{1 - t \, . \, T} = \frac{u \, . \, y + o \, . \, x}{u \, . \, x - o \, . \, y}$, und $ACB + BCD = 45^0$ sind, so ist $u \, . \, y + o \, . \, x = u \, . \, x - o \, . \, y$, oder $o = u \, . \, \frac{x - y}{x + y}$ und $2 \, u^2 \, . \, \frac{x - y}{x + y} = (x - y) \, . \, (x + y)$.

Also ist $2 \, u^2 \, . = (x + y)^2$, $u = \frac{x + y}{\sqrt{2}}$, $\frac{u}{c} = \frac{x + y}{r}$

und $S = \frac{r^2}{2} \, . \, \text{Log} \frac{x + y}{r} = \frac{r^2}{2} \, . \, \text{Log} \, (\xi + \eta)$. aber auch $S = \frac{r^2}{2} \, \text{Log.} \left(\frac{1}{\xi - \eta}\right)$.

Setzen wir noch $S = \frac{r^2}{2} \, . \, v$, so ist

$$v = \text{Log} \, (\xi + \eta), \text{ aber auch } v = \text{Log} \left(\frac{1}{\xi - \eta}\right)$$

d. h. es ist $\left.\begin{array}{l} e^v = \xi + \eta = \text{Cos } v + \text{Sin } v \\ e^{-v} = \xi - \eta = \text{Cos } v - \text{Sin } v \end{array}\right\}$ und $\left\{\begin{array}{l} \text{Cos } v = \dfrac{e^v + e^{-v}}{2} \\ \text{Sin } v = \dfrac{e^v - e^{-v}}{2} \end{array}\right\}$

wo e = 2,718281828 . . . . die Basis der natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen ist.

Ebenso ist: $\left.\begin{array}{l} e^w = \text{Cos } w + \text{Sin } w \\ e^{-w} = \text{Cos } w - \text{Sin } w \end{array}\right\}$

Gewiss ist auch: $\left.\begin{array}{l} e^{v + w} = e^v \, . \, e^w = \text{Cos } (v + w) + \text{Sin } (v + w) \\ e^{-(v + w)} = e^{-v} \, . \, e^{-w} = \text{Cos } (v + w) - \text{Sin } (v + w) \end{array}\right\}$

Nun ist aber:

$$\left.\begin{array}{l} e^v \, . \, e^w = \text{Cos } v \, . \, \text{Cos } w + \text{Sin } v \, . \, \text{Cos } w + \text{Cos } v \, . \, \text{Sin } w + \text{Sin } v \, . \, \text{Sin } w \\ e^{-v} \, . \, e^{-w} = \text{Cos } v \, . \, \text{Cos } w - \text{Sin } v \, . \, \text{Cos } w - \text{Cos } v \, . \, \text{Sin } w + \text{Sin } v \, . \, \text{Sin } w \end{array}\right\}$$

Demnach ist:

$$\text{(A.)} \left\{\begin{array}{l} \text{Sin } (v + w) = \text{Sin } v \, . \, \text{Cos } w + \text{Cos } v \, . \, \text{Sin } w \\ \text{Cos} (v + w) = \text{Cos } v \, . \, \text{Cos } w + \text{Sin } v \, . \, \text{Sin } w \end{array}\right.$$

ferner:

$$\text{(B.)} \left\{\begin{array}{l} \text{Sin } 2v = 2 \, . \, \text{Sin } v \text{ Cos } v. \\ \text{Cos } 2v = \text{Cos } v^2 + \text{Sin } v^2, \text{ und weil Cos } v^2 - \text{Sin } v^2 = 1 \text{ ist, auch} \\ \text{Cos } 2v = 1 + 2 \, . \, \text{Sin } v^2 \\ \text{Cos } 2v = 2 \, . \, \text{Cos } v^2 - 1 \end{array}\right.$$

und auch:

$$\text{(C.)} \left\{\begin{array}{l} \text{Sin } 3 v = 3 \text{ Sin } v + 4 \text{ Sin } v^3 \\ \text{Cos } 3 v = 4 \text{ Cos } v^3 - 3 \text{ Cos } v \end{array}\right.$$

Aus (B.) ergiebt sich für die Halbirung eines hyperbolischen Sektors:

$$(D.)\quad \begin{cases} \text{Sin}\left(\frac{v}{2}\right) = \sqrt{\frac{\text{Cos}\, v - 1}{2}} \\ \text{Cos}\left(\frac{v}{2}\right) = \sqrt{\frac{\text{Cos}\, v + 1}{2}} \end{cases}$$

und, was für uns die Hauptsache ist, aus (C.) für die Dreitheilung desselben:

$$(E.)\quad \begin{cases} \text{Sin}\left(\frac{v}{3}\right)^3 = -\frac{3}{4}\,.\,\text{Sin}\left(\frac{v}{3}\right) + \frac{\text{Sin}\, v}{4} \\ \text{Cos}\left(\frac{v}{3}\right)^3 = \frac{3}{4}\,.\,\text{Cos}\left(\frac{v}{3}\right) + \frac{\text{Cos}\, v}{4} \end{cases}$$

§ 8. Es kommt nun darauf an, auch hier zu einem gegebenen Sin v oder Cos v, unter Voraussetzung von hyperbolisch-trigonometrischen Tafeln die verschiedenen Werthe von Sin $\left(\frac{v}{3}\right)$ und Cos $\left(\frac{v}{3}\right)$ zu finden. Zwar sagt Klügel (II. pag. 597.):) „Ein hyperbolischer Sinus oder Cosinus gehört nur zu einem einzigen Sektor. Daher haben die Gleichungen (B und C), wenn der vielfache Sektor gegeben wird, nur einen einzigen Werth (für Sin v und Cos v)". Doch wollen wir uns dadurch um so weniger von eigener Untersuchung abhalten lassen, als er selbst sogleich hinzufügt: „oder die Gleichungen (B und C) für Sin v und Cos v haben alle nur eine einzige mögliche Wurzel".

Es kann allerdings nicht in Abrede gestellt werden, dass Sin v und das damit in Verbindung stehende Cos v nur zu einem einzigen hyperbolischen Sektor, etwa S gehören. Aber man wird auch einräumen müssen, dass Sin v und Cos v sich nicht ändern, wenn zu S noch mehrere zugehörige Kreisflächen addirt oder davon subtrahirt werden; das Zulegen und Wegnehmen muss nur so eingerichtet werden, dass dadurch der hyperbolische Sektor als solcher nicht in seiner Grösse eine Aenderung erleidet, d. h. man kann zu S hinzulegen $\pm 2\pi\,.\,\frac{r^2}{2}\,i\,.\,k$ oder $\pm 2\pi\,.\,c^2\,.\,i\,.\,k$, wo k irgend eine ganze Zahl bedeutet und $i = \sqrt{-1}$ ist; oder das zu Sin v und Cos v gehörige v ist nicht nur das unmittelbar aus S abzuleitende v, sondern wir können auch noch setzen:

$$v = v \pm 2\pi\,.\,i\,.\,k$$

Wem diese Schlussart zu gewagt erscheint, der ziehe die Arithmetik heran.

Nach § 7 ist doch v nichts anders als der Logarithme einer Zahl $(\xi + \eta =)\ \zeta$. Wenn aber Log $\zeta = v$ ist, so weiss jeder, dass auch Log $\zeta = v \pm 2\pi\,.\,i\,.\,k$ ist. Also kann v auch $v \pm 2\pi\,.\,i\,.\,k$ bedeuten.

Demnach ist $\frac{v}{3}$ nicht nur $= \frac{v}{3}$, sondern auch $= \frac{v}{3} \pm \frac{2\pi}{3}\,.\,i\,k$. und

$$\mathrm{Sin}\left(\frac{r}{3}\right) = \mathrm{Sin}\left(\frac{r}{3}\right),\ \text{auch} = \mathrm{Sin}\left(\frac{r}{3} \pm \frac{2\pi}{3} \cdot i \cdot k\right),$$

$$\mathrm{Cos}\left(\frac{r}{3}\right) = \mathrm{Cos}\left(\frac{r}{3}\right),\ \text{auch} = \mathrm{Cos}\left(\frac{r}{3} \pm \frac{2\pi}{3} \cdot i \cdot k\right).$$

Weil nun beim Kreise:

$$\begin{cases} \sin r = \dfrac{e^{ir} - e^{-ir}}{2i} \\ \cos r = \dfrac{e^{ir} + e^{-ir}}{2} \end{cases}$$

und bei der Hyperbel:

$$\begin{cases} \mathrm{Sin}\ r = \dfrac{e^{r} - e^{-r}}{2} \\ \mathrm{Cos}\ r = \dfrac{e^{r} + e^{-r}}{2} \end{cases}$$

ist, so haben wir:

$$\begin{cases} \mathrm{Sin}\,(i\,r) = \dfrac{e^{ir} - e^{-ir}}{2} = i \cdot \sin r \\ \mathrm{Cos}\,(i\,r) = \dfrac{e^{ir} + e^{-ir}}{2} = \cos r \end{cases}$$

und beiläufig auch

$$\begin{cases} \sin\,(i\,r) = i \cdot \mathrm{Sin}\ r \\ \cos\,(i\,r) = \mathrm{Cos}\ r \end{cases}$$

Hieraus und aus den Gleichungen (A) folgt:

$$\begin{aligned} \mathrm{Sin}\left(\frac{r}{3} \pm \frac{2\pi}{3} \cdot i \cdot k\right) &= \mathrm{Sin}\left(\frac{r}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3} \cdot k\right) \pm \mathrm{Cos}\,\frac{r}{3} \cdot i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3} \cdot k\right) \\ &= -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\left(\frac{r}{3}\right) \pm i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \mathrm{Cos}\left(\frac{r}{3}\right) \quad \text{für } k = 1; \\ &= -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\left(\frac{r}{3}\right) \mp i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \mathrm{Cos}\left(\frac{r}{3}\right) \quad \text{für } k = 2; \\ &= \mathrm{Cos}\,\frac{r}{3}. \quad \text{für } k = 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Cos}\left(\frac{r}{3} \pm \frac{2\pi}{3} \cdot i \cdot k\right) &= \mathrm{Cos}\left(\frac{r}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3} \cdot k\right) \pm \mathrm{Sin}\left(\frac{r}{3}\right) \cdot i \sin\left(\frac{2\pi}{3} \cdot k\right) \\ &= -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Cos}\left(\frac{r}{3}\right) \pm i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \mathrm{Sin}\left(\frac{r}{3}\right) \quad \text{für } k = 1; \\ &= -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Cos}\left(\frac{r}{3}\right) \mp i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \mathrm{Sin}\,\frac{r}{3} \quad \text{für } k = 2; \\ &= \mathrm{Sin}\,\frac{r}{3} \quad \text{für } k = 3. \end{aligned}$$

(Die höhern Werthe für k liefern nichts Neues.)

Ist also Sin r gegeben, so erhält man:

$$\text{(F.)}\ \mathrm{Sin}\left(\frac{r}{3}\right) 1) = \mathrm{Sin}\left(\frac{r}{3}\right), \left.\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right) = -\tfrac{1}{2}\,\mathrm{Sin}\left(\frac{r}{3}\right) \pm i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \mathrm{Cos}\,\frac{r}{3}\ \text{oder}$$

$$= \begin{cases} 2)\ \mathrm{Sin}\left(i \cdot 60^0 - \frac{r}{3}\right) \\ 3)\ -\mathrm{Sin}\left(i \cdot 60^0 + \frac{r}{3}\right) \end{cases}$$

und ist Cos r gegeben, so findet sich:

$$\text{(G.)}\ \mathrm{Cos}\left(\frac{r}{3}\right) 1) = \mathrm{Cos}\left(\frac{r}{3}\right), \left.\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right) = -\tfrac{1}{2} \cdot \mathrm{Cos}\,\frac{r}{3} \pm i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \mathrm{Sin}\left(\frac{r}{3}\right).\ \text{oder}$$

$$= \left.\begin{matrix}2\\3\end{matrix}\right) - \mathrm{Cos}\left(i \cdot 60^0 \pm \frac{r}{3}\right).$$

§ 9. Wir haben nun anzugeben, wie die in § 8 vorausgesetzten hyperbolisch-trigonometrischen Tafeln anzufertigen sind. So wie wir bei den cyklisch-trigonometrischen Tafeln verlangen, dass für jeden Kreissektor oder für jeden seine Grösse bestimmenden Bogen hauptsächlich der zugehörige Sinus und Cosinus berechnet ist, so müssen auch die neuen Tafeln für jeden hyperbolischen Sektor oder für den seine Grösse bestimmenden Logarithmen den zugehörigen Sinus und Cosinus enthalten. Zu diesem Ende genügen folgende drei schon von Lambert aufgestellten Gleichungen

In § 5 fanden wir: 1) $\xi = \text{Cos}\ z = \sec.\ \omega$ und 2) $\eta = \text{Sin}\ z = \text{tg.}\ \omega$.

Demnach ist $\xi + \eta = \frac{1 + \sin \omega}{\cos \omega} = \frac{(\cos \frac{1}{2} \omega + \sin \frac{1}{2} \omega)^2}{\cos \frac{1}{2} \omega^2 - \sin \frac{1}{2} \omega^2} = \frac{\cos \frac{1}{2} \omega + \sin \frac{1}{2} \omega}{\cos \frac{1}{2} \omega - \sin \frac{1}{2} \omega}$

$$= \frac{1 + \text{tg.}\ \frac{1}{2} \omega}{1 - \text{tg.}\ \frac{1}{2} \omega} = \text{tg.}\ (45^0 + \tfrac{1}{2}\ \omega).$$

Nun ist aber nach § 7 der hyperbolische Sektor

$$S = c^2\ \text{Log}\cdot (\xi + \eta) = c^2\ z,$$

also ist 3) $z = \text{Log. tg.}\ (45^0 + \frac{1}{2}\ \omega.)$

Die anzufertigenden Tafeln werden also vier Rubriken zu enthalten haben. Die erste Rubrik giebt den Hilfswinkel ω, wenigstens von Minute zu Minute fortschreitend. Lambert nennt ihn den transcendenten Winkel. Die zweite Rubrik giebt die von diesem Hilfswinkel abhängigen hyperbolischen Sektoren, ich meine die z's, die nach der Gleichung 3) zu berechnen sind; es thut der Sache aber keinen Eintrag, wenn man statt der natürlichen Logarithmen (Log) von tg. $(45^0 + \frac{1}{2}\ \omega)$ die Briggischen (log) benutzt; der hiebei begangene Fehler hebt sich meistens, weil er zweimal nach entgegengesetzter Seite hin gemacht wird; in den seltenen Fällen, wo dies nicht der Fall sein sollte, hat man den in den Tafeln befindlichen

$$\log \text{tg}\ (45^0 + \tfrac{1}{2}\ \omega)$$

noch durch den Modul des Briggi'schen Systems $M = 0{,}43429448$ zu dividiren, um z zu bekommen.

Die dritte Rubrik enthält die nach der Gleichung 1) leicht zu berechnenden

$$\log \text{Cos}\ z = \log \sec\ \omega = -\log \cos\ \omega,$$

und die vierte Rubrik gilt zufolge der Gleichung 2)

$$\log \text{Sin}\ z = \log \text{tg}\ \omega,$$

was aus den gewöhnlichen Tafeln ohne Weiteres zu entnehmen ist.

Lambert will auch noch den von ihm sogenannten gemeinschaftlichen Winkel $FCG = \varphi$ und seine Tangenten in die Tafeln hineingebracht haben. Obgleich

dies für unsere Zwecke nicht nöthig ist, so wollen wir doch im Vorübergehen nicht unbeachtet lassen, dass

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\eta}{\xi} = \frac{\operatorname{tg}\omega}{\sec\omega} = \sin\omega \text{ ist.}$$

Die Punkte K und I müssen also in gleicher Höhe über der Axe AB liegen und während ω von 0^0 bis 90^0 wächst, schreitet φ nur von 0^0 bis 45^0 fort.

C. Die Trisektion eines elliptischen Sektors.

§ 10. Da ich nur der Vollständigkeit wegen, nicht des Gebrauchs wegen den elliptischen Sektor und den Sektor der ungleichseitigen Hyperbel in Betrachtung ziehe, so werde ich mich in diesem und dem nächsten § der möglichst grössten Kürze befleissigen.

Seien a und b die Halbaxen der Ellipse, $CB = x$, $DB = y$ und der elliptische Sektor $ADC = \sigma$, so ist bekanntlich: $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$, $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ und **Fig. 4.**

$$\sigma = -\frac{a \cdot b}{2} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Beschreibt man um den Mittelpunkt der Ellipse C mit dem Radius a einen Kreis und verlängert die elliptische Ordinate BD bis E und nennt den mit dem Radius $= 1$ beschriebenen concentrischen Bogen, welcher dem Kreisbogen AE entspricht,

z, so ist $dz = -\frac{d \cdot \cos z}{\sin z} = -\frac{d \cdot \left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = -\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ und

$z = -\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, also $\sigma = \frac{a\ b}{2} \cdot z$

Es ist aber auch: $-\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\int \frac{i\,dx}{i \cdot \sqrt{a^2 - x^2}} = -i \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

$$= i \operatorname{Log}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = i \operatorname{Log}(x - i\sqrt{a^2 - x^2})$$

$$= i \operatorname{Log}\left(x - i \cdot \frac{a}{b} \cdot y\right)$$

also $\sigma = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \operatorname{Log}\left(x - i \cdot \frac{a}{b} \cdot y\right) + \text{Const.}$

Da $\sigma = o$ wird für $x = a$, so ist Const $= -\frac{a\ b}{2} \cdot i \operatorname{Log} a$.

Mithin ist $\sigma = \frac{a \cdot b}{2} \cdot i \cdot \operatorname{Log}\left(\frac{x}{a} - i \cdot \frac{y}{b}\right) = \frac{a \cdot b}{2} \cdot i \cdot \operatorname{Log}(\xi - i \cdot \eta)$, wo $\xi = \frac{x}{a}$ und $\eta = \frac{y}{b}$.

Weil aber $\xi^2 + \eta^2 = (\xi + i\,\eta)\,.\,(\xi - i\,.\,\eta) = 1$, so ist auch

$$\sigma = \frac{a.b}{2}\,i\,.\,\mathrm{Log}\left(\frac{1}{\xi + i\,\eta}\right) = -\frac{a\,b}{2}\,i\,.\,\mathrm{Log}\,(\xi + i\,\eta).$$

Demnach ist $z = i\,.\,\mathrm{Log}\,(\xi - i\,\eta)$, aber auch $z = -\,i\,\mathrm{Log}\,(\xi + i\,\eta)$: oder $i\,z = -\,\mathrm{Log}\,(\xi - i\,\eta)$ und auch $i\,z = \mathrm{Log}\,(\xi + i\,\eta)$.

d. h. $\left.\begin{array}{l} e^{i\,z} = \xi + i\,\eta = \varkappa o\varsigma\,z + i\,.\,\sigma\iota\nu\,z \\ e^{-i\,z} = \xi - i\,\eta = \varkappa o\varsigma\,z - i\,.\,\sigma\iota\nu\,z \end{array}\right\}$

Ich beabsichtige nämlich auch bei der Ellipse und der damit in Zusammenhang stehenden ungleichseitigen Hyperbel die Verhältnisszahlen ξ und η Cosinus und Sinus zu nennen, werde aber hier der Unterscheidung wegen die Wörter Cosinus und Sinus mit griechischen Buchstaben schreiben, und zwar in Beziehung auf die elliptischen Sektoren, deren Grösse von dem Kreisbogen z abhängt, mit kleinen Anfangsbuchstaben und im nächsten § für die Sektoren der ungleichseitigen Hyperbel mit grossen Anfangsbuchstaben.

So wäre denn $\left.\begin{array}{l} \varkappa o\varsigma\,z = \dfrac{e^{i\,z} + e^{-i\,z}}{2} \\ \sigma\iota\nu\,z = \dfrac{e^{i\,z} - e^{-i\,z}}{2\,i} \end{array}\right\}$

Aber ich hätte auch oben sagen können:

$$-\int\frac{d\,z}{\sqrt{a^2 - z^2}} = -\int\frac{d\,z}{i\sqrt{z^2 - a^2}} = -\int\frac{i\,.\,d\,z}{i\,i\sqrt{z^2 - a^2}} = +\,i\int\frac{d\,z}{\sqrt{z^2 - a^2}}.$$

Dies hätte auf

$$\varkappa o\varsigma\,z = \frac{e^{i\,z} + e^{-i\,z}}{2}$$

$$\sigma\iota\nu\,z = -\,\frac{e^{i\,z} - e^{-i\,z}}{2\,i} \text{ geführt.}$$

Diese doppelten Ausdrücke für $\sigma\iota\nu\,z$ bestätigen, was der blosse Anblick der Figur lehrt, dass zu jedem Cosinus $\frac{C\,B}{a}$ zwei absolut gleiche, aber an Zeichen entgegengesetzte Sinus $\left(\frac{B\,D}{b}\text{ und }\frac{B\,G}{b}\right)$ gehören. Ich werde indessen auf den zweiten Ausdruck für $\sigma\iota\nu\,z$ weiter keine Rücksicht nehmen.

Indem man nun ähnlich, wie in § 7 zu Werke geht, findet man:

$$(\alpha)\begin{cases} \sigma\iota\nu\,(v + w) = \sigma\iota\nu\,v\;\varkappa o\varsigma\,w + \varkappa o\varsigma\,v\;\sigma\iota\nu\,w \\ \varkappa o\sigma\,(v + w) = \varkappa o\varsigma\,v\;\varkappa o\varsigma\,w - \sigma\iota\nu\,v\;\sigma\iota\nu\,w. \end{cases}$$

Ferner ist, weil $\varkappa o\sigma\,z^2 + \sigma\iota\nu\,z^2 = 1$ ist,

$$(\beta)\begin{cases} \sigma\iota\nu\,2\,v = 2\,\sigma\iota\nu\,v\;\varkappa o\varsigma\,v \\ \varkappa o\varsigma\,2\,v = \varkappa o\sigma\,v^2 - \sigma\iota\nu\,v^2 = 1 - 2\,\sigma\iota\nu\,v^2 = 2\,\varkappa o\varsigma\,v^2 - 1;\text{ und auch:} \end{cases}$$

$$(\gamma) \begin{cases} \sigma\iota\nu\ 3\ v = 3\ \sigma\iota\nu\ v - 4\ \sigma\iota\nu\ v^3 \\ \varkappa o\sigma\ 3\ v = 4\ \varkappa o\sigma\ v^3 - 3\ \varkappa o\varsigma\ v, \end{cases}$$

woraus sich Gleichungen (δ und ε) für die Halbirung und Dreitheilung der elliptischen Sektoren ergeben, die gänzlich den Gleichungen (d und e) in § 6 für die Kreistheilung entsprechen und daher übergangen werden können.

D. Die Trisektion eines Sektors der ungleichseitigen Hyperbel.

§ 11. Seien a und b die beiden Halbaxen der Hyperbel und x und y die Coordinaten vom Mittelpunkt gerechnet, so ist $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ und $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Bezeichnen wir nun den zu betrachtenden Sektor mit Σ, so ist

$\Sigma = \frac{a\,b}{2}\int\frac{d\,x}{\sqrt{x^2 - a^2}} = -\frac{a\,b}{2}$ Log. $(x - \sqrt{x^2 - a^2})$ + Const., wo Const. $= \frac{a\,b}{2}$ Log. a, also $\Sigma = -\frac{a\,b}{2}$. Log. $(\xi - \eta)$, wenn wieder $\xi = \frac{x}{a}$ und $\eta = \frac{y}{b}$ gesetzt wird, aber auch $\Sigma = \frac{a\,b}{2}$ Log. $(\xi + \eta)$, weil $\xi^2 - \eta^2 = (\xi - \eta) \cdot (\xi + \eta) = 1$ ist.

Wir nehmen noch $\Sigma = \frac{a\,b}{2} \cdot z$ an, so ist:

$$1)\ z = \text{Log.}\ (\xi + \eta);\ 2) - z = \text{Log.}\ (\xi - \eta).$$

oder $\left.\begin{array}{l} e^z = \xi + \eta = Ko\varsigma\ z + \Sigma\iota\nu\ z \\ e^{-z} = \xi - \eta = Ko\varsigma\ z - \Sigma\iota\nu \end{array}\right\}$ und $\left\{\begin{array}{l} Ko\varsigma\ z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} \\ \Sigma\iota\nu\ z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2} \end{array}\right\}$.

Von hier aus ist es leicht, weiter zu finden, dass

$$(A) \begin{cases} \Sigma\iota\nu\ (v + w) = \Sigma\iota\nu\ v\ Ko\varsigma\ w + Ko\varsigma\ v\ \Sigma\iota\nu\ w \\ Ko\varsigma\ (v + w) = Ko\sigma\ v\ Ko\varsigma\ w + \Sigma\iota\nu\ v\ \Sigma\iota\nu\ w \text{ ist,} \end{cases}$$

und weil $Ko\varsigma\ z^2 - \Sigma\iota\nu\ z^2 = 1$, dass auch

$$(B) \begin{cases} \Sigma\iota\nu\ 2\ v = 2\ \Sigma\iota\nu\ v\ Ko\sigma\ v \\ Ko\varsigma\ 2\ v = Ko\varsigma\ v^2 + \Sigma\iota\nu\ v^2 = 1 + 2\ \Sigma\iota\nu\ v^2 = 2\ Ko\varsigma\ v^2 - 1, \text{ und} \end{cases}$$

$$(\Gamma) \begin{cases} \Sigma\iota\nu\ 3\ v = 3\ \Sigma\iota\nu\ v + 4\ \Sigma\iota\nu\ v^3 \\ Ko\sigma\ 3\ v = 4\ Ko\sigma\ v^3 - 3\ Ko\varsigma\ v \text{ ist.} \end{cases}$$

Zweiter Theil.

Kubikwurzelausziehung aus Binomien.

A. Aus complexen Zahlen.

§ 12. Es sei $\sqrt[3]{K+iL} = m + n\,i$, wo K, L, m, n reelle Grössen sind, dann ist auch $\sqrt[3]{K-iL} = m - n\,i$, wie schon Bombelli gezeigt hat.

Aus jeder dieser Gleichungen folgt weiter, dass

$$\left.\begin{aligned} K &= m^3 - 3\,m\,.\,n^2 \\ L &= 3\,m^2.\,n - n^3 \end{aligned}\right\},\ \text{oder}\ \left.\begin{aligned} K &= 4\,m^3 - 3\,\varepsilon\,.\,m \\ L &= 3\,\varepsilon\,.\,n - 4\,.\,n^3 \end{aligned}\right\}\ \text{weil}\ m^2 + n^2 = \sqrt[3]{K^2+L^2} = \varepsilon\ \text{ist.}$$

Nun ist beim Kreise (§ 6, c.):

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{Cos} z &= 4\cos\left(\frac{z}{3}\right)^3 - 3\cos\left(\frac{z}{3}\right) \\ \sin\zeta &= 3\sin\left(\frac{\zeta}{3}\right) - 4\sin\left(\frac{\zeta}{3}\right)^3 \end{aligned}\right.$$

Deswegen setze man $m = r\,u$ und $n = \varrho\,v$, dann gehen die Gleichungen für m und n in folgende über:

$$\left.\begin{aligned} \frac{K}{r^3} &= 4\,u^3 - 3\,.\,\frac{\varepsilon}{r^2}\,.\,u \\ \frac{L}{\varrho^3} &= 3\,.\,\frac{\varepsilon}{\varrho^2}\,.\,v - 4\,.\,v^3 \end{aligned}\right\}$$

Es hindert nichts $r^2 = \varepsilon$ und ebenso $\varrho^2 = \varepsilon$ zu setzen, so dass

$$r = \varrho = \sqrt[6]{K^2 + L^2}\ \text{ist,}$$

dann kann $\left.\begin{aligned} u &= \cos\frac{z}{3} \\ v &= \sin\frac{\zeta}{3} \end{aligned}\right\}$ vorstellen, wenn nur $\left\{\begin{aligned} \cos z &= \frac{K}{r^3} \\ \sin\zeta &= \frac{L}{r^3} \end{aligned}\right\}$ gesetzt werden darf. Und dies kann geschehen, weil sowohl $r^3 > K$, wie auch $r^3 > L$ ist.

Es ist aber $\frac{K^2}{r^6} + \frac{L^2}{r^6} = 1$, also ist auch $\cos z^2 + \sin\zeta^2 = 1$, daher $z = \zeta$.

Demnach ist $m = \sqrt[6]{K^2 + L^2}\,.\,\cos\left(\frac{z}{3}\right)$, $n = \sqrt[6]{K^2 + L^2}\,.\,\sin\left(\frac{z}{3}\right)$

Wenn aber $\cos z$ und $\sin z$, wie hier, gegeben sind, so kann (nach § 6, f und g) sowohl $\cos\left(\frac{z}{3}\right)$ als auch $\sin\left(\frac{z}{3}\right)$ einen dreifachen Werth haben. Dem zu Folge ist:

$$\text{(h.)}\ \sqrt[3]{K \pm i\,L} \left\{\begin{aligned} &= \sqrt[6]{K^2+L^2}\left[\cos\left(\frac{z}{3}\right) \pm i\sin\left(\frac{z}{3}\right)\right] \\ &= \sqrt[6]{K^2+L^2}\left[-\cos\left(60+\frac{z}{3}\right) \mp i\,.\sin\left(60+\frac{z}{3}\right)\right] \\ &= \sqrt[6]{K^2+L^2}\left[-\cos\left(60+\frac{z}{3}\right) \pm i\,.\sin\left(60+\frac{z}{3}\right)\right] \\ &\qquad \text{wobei}\ \cos z = \frac{K}{\sqrt{K^2+L^2}}\ \text{ist.} \end{aligned}\right\}$$

Die übrigen 6 Combinationen von ungleichen Winkeln oder Sektoren sind auszuschliessen, weil nur $\left[\cos\left(\frac{v}{3}\right) + i \,.\, \sin\left(\frac{v}{3}\right)\right]^3 = \cos v + i \sin v$ giebt.

Man kann zu den Gleichungen (h) auch auf folgende Weise kommen:

Wenn $\sqrt[3]{a} = \alpha$ ist, so ist bekanntlich auch

$$\sqrt[3]{a} = \alpha\,(-\cos 60^0 + i \sin 60^0) = \alpha\left(-\tfrac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \alpha \,.\, J$$

$$\sqrt[3]{a} = \alpha\,(-\cos 60^0 - i \sin 60^0) = \alpha\left(-\tfrac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \alpha \,.\, J^1$$

So auch kann:

$$\left.\begin{matrix}\sqrt[3]{K + i\,L} \\ \sqrt[3]{K + i\,L}\end{matrix}\right\} \; 1) \begin{matrix} = \\ = \end{matrix} \left\{\begin{matrix} m + i\,n \\ m - i\,n \end{matrix}\right. \; 2) \begin{matrix} = \\ = \end{matrix} \left\{\begin{matrix} (m + i\,n)\,J \\ (m - i\,n)\,J^1 \end{matrix}\right. \; 3) \begin{matrix} = \\ = \end{matrix} \left\{\begin{matrix} (m + i\,n)\,J^1 \\ (m - i\,n)\,J \text{ sein.} \end{matrix}\right.$$

Die andern sechs möglichen Verbindungen sind auszuschliessen, weil sie nicht der Nebenbedingung Genüge leisten, dass $\sqrt[3]{K^2 + L^2} = m^2 + n^2$ sein muss. Die eben gemachten und erlaubten drei Verbindungen lassen sich auf folgende Form bringen:

$$\sqrt[3]{K \pm i\,L} \left\{\begin{aligned} &= \sqrt[6]{K^2 + L^2}\left[\cos\left(\tfrac{z}{3}\right) \pm i \,.\, \sin\left(\tfrac{z}{3}\right)\right] \\ &= \sqrt[6]{K^2 + L^2}\left[-\tfrac{1}{2}\,.\cos\left(\tfrac{z}{3}\right) - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\tfrac{z}{3}\right) \pm i\left(-\tfrac{1}{2}\sin\left(\tfrac{z}{8}\right) + \tfrac{\sqrt{3}}{2}.\,\cos\left(\tfrac{z}{3}\right)\right)\right] \\ &= \sqrt[6]{K^2 + L^2}\left[-\tfrac{1}{2}\,.\cos\left(\tfrac{z}{3}\right) + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\tfrac{z}{3}\right) \mp i\left(\tfrac{1}{2}\sin\left(\tfrac{z}{8}\right) + \tfrac{\sqrt{3}}{2}.\cos\left(\tfrac{z}{3}\right)\right)\right] \end{aligned}\right. \text{(i.)}$$

Man sieht aber sogleich, dass die Gleichungen (i) mit den Gleichungen (h) identisch sind.

B. Kubikwurzelausziehung aus compositen Zahlen.

§ 13. Unter einer compositen Zahl verstehe ich ein Binomium, dessen zwei Theile (K, L) reell sind, von denen aber meistens der eine (L) irrational ist. Nun sei $\sqrt[3]{K + L} = m + n$, wo ich mir m und n zunächst reell denke, so ist

$$K + L = m^3 + 3\,m^2\,n + 3\,m\,n^2 + n^3.$$

Und da ich für e i n e unbekannte Grösse $(\sqrt[3]{K + L})$ z w e i (m und n) eingeführt habe, so darf ich noch annehmen, dass

$$K = m^3 + 3\,m\,n^2 \text{ ist, dann ist}$$
$$L = 3\,m^2\,n + n^3.$$

Ich mache gerade diese Annahme, weil es sich häufig trifft, dass, wenn nur L eine irrationale Quadratwurzel ist, auch nur n eine irrationale Quadratwurzel ist.

Aus den letzten beiden Gleichungen ergiebt sich

$K - L = m^3 - 3\,m^2\,n + 3\,m\,n^2 - n^3$ und $\sqrt[3]{K - L} = m - n.$

Es ist aber $\sqrt[3]{K^2 - L^2} = m^2 - n^2 = \varepsilon.$

Also hat man $\left.\begin{array}{l} K = 4\,m - 3\,\varepsilon\,.\,m \\ L = 3\,\varepsilon\,.\,n + 4\,.\,n^3 \end{array}\right\}$

Da bei der gleichseitigen Hyperbel (§ 7. C):

$$\left.\begin{array}{l} \text{Cos}\,z = 4\,.\,\text{Cos}\left(\frac{z}{3}\right)^3 - 4\,.\,\text{Cos}\left(\frac{z}{3}\right) \\ \text{Sin}\,\zeta = 3\,.\,\text{Sin}\left(\frac{\zeta}{3}\right) + 4\,.\,\text{Sin}\left(\frac{\zeta}{3}\right) \end{array}\right\}\ \text{ist,}$$

so setze man $m = r\,.\,u$ und $n = \varrho\,.\,v$.

Dann erhält man: $\left.\begin{array}{l} \frac{K}{r^3} = 4\,.\,u^3 - \frac{\varepsilon}{r^2}\,.\,u \\ \frac{L}{\varrho^3} = 3\,.\,\frac{\varepsilon}{r^2}\,.\,v + 4\,.\,v^3 \end{array}\right\}$

Um diese beiden Gleichungen für u und v mit den beiden für Cos $\left(\frac{z}{3}\right)$ und Sin $\left(\frac{\zeta}{3}\right)$ in Vergleich bringen zu können, muss vor Allem $r^2 = \varepsilon$, $\varrho^2 = \varepsilon$, also $r = \varrho = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt[6]{K^2 - L^2}$ sein.

Und zwar wird es vortheilhaft sein, wenn r und ϱ reell ausfallen, weil sonst von vorne herein auch u und v imaginär sein müssten. Also haben wir anzunehmen, dass $K^2 > L^2$ ist.

Nun würde $\left.\begin{array}{l} u = \text{Cos}\left(\frac{z}{3}\right) \\ v = \text{Sin}\left(\frac{\zeta}{3}\right) \end{array}\right\}$ vorstellen können, wenn es erlaubt wäre,

$\left.\begin{array}{l} \text{Cos}\,z = \frac{K}{\sqrt{K^2 - L^2}} \\ \text{Sin}\,\zeta = \frac{K}{\sqrt{K^2 - L^2}} \end{array}\right\}$ zu setzen. Dies ist aber erlaubt, denn bei der Hyperbel ist

Cos $z > 1$ und Sin $\zeta \gtrless 1$. Da übrigens Cos z^2 — Sin $\zeta^2 = 1$ ist, so kann nur $\zeta = z$ sein.

Folglich haben wir: $m = \sqrt[6]{K^2 - L^2}$ Cos $\left(\frac{z}{3}\right)$ und $n = \sqrt[6]{K^2 - L^2}\,.$ Sin $\left(\frac{z}{3}\right)$.

Weil aber bei gegebenen Cos z und Sin z nach § 8 Sin $\left(\frac{z}{3}\right)$ und Cos $\left(\frac{z}{3}\right)$ drei verschiedene Werthe haben können, so ist, wenn wir der Kürze wegen wieder $\sqrt[6]{K^2 - L^2} = r$ setzen, $\sqrt[3]{K + L} =$

$$\left.\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l} r\left(\mathrm{Cos}\,\frac{z}{3}+\mathrm{Sin}\,\frac{z}{3}\right)\\ r\left[-\mathrm{Cos}\left(i.60^0+\frac{z}{3}\right)-\mathrm{Sin}\left(i.60^0+\frac{z}{3}\right)\right]\\ r\left[-\mathrm{Cos}\left(i.60^0-\frac{z}{3}\right)+\mathrm{Sin}\left(i.60^0-\frac{z}{3}\right)\right]\end{array}\right\} = r\left[-\mathrm{Cos}\left(\frac{z}{3}\pm i.60^0\right)-\mathrm{Sin}\left(\frac{z}{3}\pm i.60^0\right)\right]\\ \text{und ebenso ist } \sqrt[3]{K-L} = \\ \left\{\begin{array}{l} r\left(\mathrm{Cos}\left(\frac{z}{3}\right)-\mathrm{Sin}\left(\frac{z}{3}\right)\right)\\ r\left[-\mathrm{Cos}\left(i.60^0+\frac{z}{3}\right)+\mathrm{Sin}\left(i.60^0+\frac{z}{3}\right)\right]\\ r\left[-\mathrm{Cos}\left(i.60^0-\frac{z}{3}\right)-\mathrm{Sin}\left(i.60^0-\frac{z}{3}\right)\right]\end{array}\right\} = r\left[-\mathrm{Cos}\left(\frac{z}{3}\pm i.60^0\right)+\mathrm{Sin}\left(\frac{z}{3}\pm i.60^0\right)\right]\end{array}\right\}\text{(H.)}$$

$$\text{wobei } \mathrm{Cos}\, z = \frac{K}{\sqrt{K^2-L^2}} \text{ ist.}$$

Auch hier kommen die andern sechs Combinationen von ungleichen Sektoren nicht in Betracht, weil wieder nur $\left(\mathrm{Cos}\,\frac{v}{3}\pm\mathrm{Sin}\,\frac{v}{3}\right)^3 = \mathrm{Cos}\, v \pm \mathrm{Sin}\, v$ giebt, worauf es bei der Probe wesentlich ankommt.

Die Gleichungen (H.) können auch folgende praktischere Gestalt annehmen:

$$\sqrt[3]{K\pm L} = \left\{\begin{array}{l} r\left(\mathrm{Cos}\left(\frac{z}{3}\right)\pm\mathrm{Sin}\left(\frac{z}{3}\right)\right), \text{ oder}\\ r\left[-\frac{1}{2}\mathrm{Cos}\left(\frac{z}{3}\right)-i.\frac{\sqrt{3}}{2}.\mathrm{Sin}\left(\frac{z}{3}\right)\pm\left(-\frac{1}{2}\mathrm{Sin}\left(\frac{z}{3}\right)-i.\frac{\sqrt{3}}{2}.\mathrm{Cos}\left(\frac{z}{3}\right)\right)\right], \text{ oder}\\ r\left[-\frac{1}{2}\mathrm{Cos}\left(\frac{z}{3}\right)+i.\frac{\sqrt{3}}{2}.\mathrm{Sin}\left(\frac{z}{3}\right)\mp\left(\frac{1}{2}\mathrm{Sin}\left(\frac{z}{3}\right)-i.\frac{\sqrt{3}}{2}.\mathrm{Cos}\left(\frac{z}{3}\right)\right)\right]\end{array}\right\}\text{(I.)}$$

Den Satz, dass $\left[\mathrm{Cos}\left(\frac{z}{3}\right)\pm\mathrm{Sin}\left(\frac{z}{3}\right)\right]^3 = \mathrm{Cos}\, z \pm \mathrm{Sin}\, z$ ist, beweise ich so:

In $\mathrm{Cos}\left(\frac{z}{3}\right)^3 \pm 3\,.\,\mathrm{Cos}\left(\frac{z}{3}\right)^2.\,\mathrm{Sin}\left(\frac{z}{3}\right) + 3\,.\,\mathrm{Cos}\left(\frac{z}{3}\right).\,\mathrm{Sin}\left(\frac{z}{3}\right)^2 \pm \mathrm{Sin}\left(\frac{z}{3}\right)$ setze man $\mathrm{Cos}\left(\frac{z}{3}\right)^2 = 1 + \mathrm{Sin}\left(\frac{z}{3}\right)^2$ und $\mathrm{Sin}\left(\frac{z}{3}\right)^2 = \mathrm{Cos}\left(\frac{z}{3}\right)^2 - 1$.

Dann erhält man:

$$\left(4\,.\,\mathrm{Cos}\,\frac{z}{3}^3 - 3\,.\,\mathrm{Cos}\,\frac{z}{3}\right)\pm\left(3\,.\,\mathrm{Sin}\,\frac{z}{3} + .\,\mathrm{Sin}\,\frac{z}{3}^3\right) = \mathrm{Cos}\, z \pm \mathrm{Sin}\, z.$$

§ 14. Für den Fall, dass $L^2 > K^2$ ist, wollen wir einen andern Weg einschlagen: Man setze: $\sqrt[3]{K\pm L} = R\,.\left(\mathrm{Sin}\left(\frac{z}{3}\right)\pm\mathrm{Cos}\left(\frac{z}{3}\right)\right)$

Weil nun, wie wieder leicht zu zeigen wäre $\left(\mathrm{Sin}\left(\frac{z}{3}\right)\pm\mathrm{Cos}\left(\frac{z}{3}\right)\right)^3 = \mathrm{Sin}\, z \pm \mathrm{Cos}\, z$ ist, so müsste dann: $K \pm L = R^3.\,\mathrm{Sin}\, z \pm R^3.\,\mathrm{Cos}\, z$ sein.

Und da wir für eine Unbekannte ($\sqrt[3]{K \pm L}$) zwei Unbekannte $\left(R \text{ und } \frac{z}{3}\right)$ eingeführt haben, so dürfen wir noch annehmen: $K = R^3 \,.\, \text{Sin}\, z$, dann ist $L = R^3 \,\text{Cos}\, z$.

Hieraus ergiebt sich: $\text{Sin}\, z = \frac{K}{R^3}$, $\text{Cos}\, z = \frac{L}{R^3}$.

Weil aber $\text{Cos}\, z^2 - \text{Sin}\, z^2 = 1$ ist, so haben wir $\frac{L^2 - K^2}{R^6} = 1$, also

$$R = \sqrt[6]{L^2 - K^2},\; R^3 = \sqrt{L^2 - K^2} \text{ und}$$

$$\sqrt[3]{K \pm L} = \sqrt[6]{L^2 - K^2}\left(\text{Sin}\,\frac{z}{3} \pm \text{Cos}\left(\frac{z}{3}\right)\right).$$

Demnach erhalten wir wegen der drei verschiedenen Werthe, welche $\text{Sin}\,\frac{z}{3}$ und $\text{Cos}\,\frac{z}{3}$ für einen gegebenen $\text{Sin}\, z$ annehmen können, wenn wir der Kürze wegen statt $\sqrt[6]{L^2 - K^2}$ noch einige Male R schreiben: $\sqrt[3]{K + L} =$

$$(\text{H}^1.)\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} R\left(\text{Sin}\,\frac{z}{3} + \text{Cos}\,\frac{z}{3}\right) \\ \left.\begin{array}{l} R\left[\text{Sin}\left(i.60^0 - \frac{z}{3}\right) - \text{Cos}\left(i.60^0 - \frac{z}{3}\right)\right] \\ R\left[-\text{Sin}\left(i.60^0 + \frac{z}{3}\right) - \text{Cos}\left(i.60^0 + \frac{z}{3}\right)\right] \end{array}\right\} = R\left[-\text{Sin}\left(\frac{z}{3} \mp i.60^0\right) - \text{Cos}\left(\frac{z}{3} \mp i.60^0\right)\right] \end{array}\right. \\ \qquad\qquad\text{und ebenso } \sqrt[3]{K - L} = \\ \left\{\begin{array}{l} R\left(\text{Sin}\,\frac{z}{3} - \text{Cos}\,\frac{z}{3}\right) \\ \left.\begin{array}{l} R\left[\text{Sin}\left(i.60^0 - \frac{z}{3}\right) + \text{Cos}\left(i.60^0 - \frac{z}{3}\right)\right] \\ R\left[-\text{Sin}\left(i.60^0 + \frac{z}{3}\right) + \text{Cos}\left(i.60^0 + \frac{z}{3}\right)\right] \end{array}\right\} = R\left[-\text{Sin}\left(\frac{z}{3} \mp i.60^0\right) + \text{Cos}\left(\frac{z}{3} \mp i.60^0\right)\right] \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Praktischer aber wird es sein, wenn wir den Gleichungen (H¹) folgende Gestalt geben:

$$(\text{I}^1.)\left\{\sqrt[3]{K \pm L}\left\{\begin{array}{l} = R\left(\text{Sin}\left(\frac{z}{3}\right) \pm \text{Cos}\left(\frac{z}{3}\right)\right) \\ = R\left[-\frac{1}{2}\,\text{Sin}\left(\frac{z}{3}\right) + i\,.\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,.\,\text{Cos}\left(\frac{z}{3}\right) \mp \left(\frac{1}{2}\,\text{Cos}\left(\frac{z}{3}\right) - i\,.\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,.\,\text{Sin}\left(\frac{z}{3}\right)\right)\right] \\ = R\left[-\frac{1}{2}\,\text{Sin}\left(\frac{z}{3}\right) - i\,.\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,.\,\text{Cos}\left(\frac{z}{3}\right) \pm \left(-\frac{1}{2}\,\text{Cos}\left(\frac{z}{3}\right) - i\,.\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,.\,\text{Sin}\left(\frac{z}{3}\right)\right)\right] \end{array}\right.\right.$$

wobei $\text{Sin}\, z = \frac{K}{\sqrt{L^2 - K^2}}$ ist.

Anmerkung. Dass wir die Kubikwurzelausziehung auch durch die in § 10 und § 11 behandelten Functionen der Ellipse und ungleichseitigen Hyperbel hätten vollziehen können, leuchtet von selbst ein; wir dürften ja in den Formeln (h) und

(i) und in den Formeln (H), (I) und (H'), (I') nur die Wörter Sinus und Cosinus mit griechischen Buchstaben statt mit lateinischen schreiben. Doch unterlassen wir das aus praktischen Gründen.

Dritter Theil.

Auflösung der kubischen Gleichungen.

Von der Form $x^3 = 3\,f\,x + 2\,g$.

A. Erste Methode, durch die cardanische Formel.

§ 15. Wenn man von der Gleichung ausgeht:

$$x^3 = 3\,a\,b\,x + (a^3 + b^3),$$

so ist nicht bloss $x = a + b$, sondern es können a und b auch noch mit gewissen Faktoren M und N multiplicirt werden, wenn nur $(a\,M)^3 = a^3$, $(b\,N)^3 = b^3$ und $(a\,M) \,.\, (b\,N) = a\,b$ ist. Es darf also nicht gerade $M = N = 1$ sein, es kann auch $M = J = \frac{-1 + i\,.\,\sqrt{3}}{2}$, $N = J' = \frac{-1 - i\,.\,\sqrt{3}}{2}$, und umgekehrt $M = J'$ und $N = J$ sein, weil $J^3 = 1$, $J'^3 = 1$ und $J\,.\,J' = 1$ ist.

Ebenso, hat man die Gleichung aufzulösen: $x^3 = 3\,f\,x + 2\,g$,

$$\left.\begin{array}{l}\text{so ist wieder } x\ 1) = a + b,\ 2) = a\,.\,J + b\,.\,J',\ 3) = a\,.\,J' + b\,.\,J, \text{ wenn nur} \\ a = \sqrt[3]{g + \sqrt{g^2 - f^3}} = \sqrt[3]{\alpha^3} = \alpha \text{ und } b = \sqrt[3]{g - \sqrt{g^2 - f^3}} = \sqrt[3]{\beta^3} = \beta \text{ gesetzt wird.}\end{array}\right\} \text{(k.)}$$

Oder, man nehme zunächst nur an, dass $x = a + b$ ist, weil aber a einen der drei Werthe α, $\alpha\,J$, $\alpha\,J'$ und b einen der drei Werthe β, $\beta\,J$, $\beta\,J'$ annehmen kann, so könnte es zunächst scheinen, als ob unsere Gleichung neun Auflösungen zuliesse. Indessen, wenn man festhält, dass nicht nur $a^3 + b^3 = 2\,g$, sondern auch $a\,.\,b = f$ sein muss, so überzeugt man sich, dass wirklich nur sein kann:

$$x\ 1) = \alpha + \beta,\ 2) = \alpha\,J + \beta\,J',\ 3) = \alpha\,J' + \beta\,J.$$

Durch die übrigen sechs Verbindungen werden aufgelöst die Gleichungen:

$x^3 = 3\,f\,.\,J\,.\,x + 2\,g$, wo $x = \alpha + \beta\,J,\ \alpha\,J + \beta,\ \alpha\,J' + \beta\,I'$, und

$x^3 = 3\,f\,.\,J'\,.\,x + 2\,g$, wo $x = \alpha + \beta\,J',\ \alpha\,J' + \beta,\ \alpha\,J + \beta\,J$ ist,

welche uns fern stehen.

Man kann den Gleichungen (k) auch folgende Gestalt geben:

$$\left.\begin{array}{l} x = a + b, = -\frac{a+b}{2} \pm \frac{a-b}{2}\,.\,i\,.\,\sqrt{3}, \\ \text{wo } a = \sqrt[3]{g + \sqrt{g^2 - f^2}},\ b = \sqrt[3]{g - \sqrt{g^2 - f^2}}. \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ (\text{l.})$$

I. Der irreducible Fall.

§ 16. Ist nun $f^3 > g^2$, so ist $a = \sqrt[3]{g + i\sqrt{f^3 - g^2}} = \sqrt[3]{K + iL}$

$b = \sqrt[3]{g - i\sqrt{f^3 - g^2}} = \sqrt[3]{K - iL}$, wo $K = g$, $L = \sqrt{f^3 - g^2}$.

Legen wir jetzt die Formeln (h) aus § 12 zum Grunde und bedenken, dass $\sqrt{K^2 + L^2} = \sqrt{f^3}$ und $\sqrt[6]{K^2 + L^2} = \sqrt{f}$ ist, so erhalten wir

$$\text{(m.)} \ldots \ldots \left\{\begin{array}{l} x = 2\sqrt{f}\cdot\cos\left(\frac{z}{3}\right) \\ x = -2\sqrt{f}\cdot\cos\left(60^0 \pm \frac{z}{3}\right) \end{array}\right\} \text{ wobei } \cos z = \frac{g}{\sqrt{f^3}}$$

Bedienen wir uns aber der Formeln (i.) aus dem nämlichen §, so kommen wir natürlich zu demselben Resultate, es ist dann:

$$\text{(n.)} \ldots \left\{\begin{array}{l} x = 2\cdot\sqrt{f}\cdot\cos\left(\frac{z}{3}\right) \\ x = \sqrt{f}\cdot\left[-\cos\left(\frac{z}{3}\right) \pm \sqrt{3}\sin\left(\frac{z}{3}\right)\right] \end{array}\right\} \text{ wobei wieder } \cos z = \frac{g}{\sqrt{f^3}} \text{ ist.}$$

II. Der reducible Fall.

§ 17. Es sei $g^2 > f^3$, dann bleibt $a = \sqrt[3]{g + \sqrt{g^2 - f^3}} = \sqrt[3]{K + L}$

$b = \sqrt[3]{g - \sqrt{g^2 - f^3}} = \sqrt[3]{K + L}$, wo $K = g$, $L = \sqrt{g^2 - f^3}$.

Nun kommt noch in Betracht, ob $K^2 > L^2$ oder $L^2 > K^2$ ist.

1) Wir fangen mit dem ersten Falle an, der damit zusammenhängt, dass f positiv ist. Da nun $\sqrt{K^2 - L^2} = \sqrt{f^3}$, $\sqrt[6]{K^2 - L^2} = \sqrt{f}$, so ergiebt sich aus den Formeln (H.) des § 13:

$$\text{(M.)} \left\{\begin{array}{l} x = 2\sqrt{f}\operatorname{Cos}\frac{z}{3} \\ x = -2\sqrt{f}\cdot\operatorname{Cos}\left(\frac{z}{3} \pm i\cdot 60^0\right) \text{oder} = -2\sqrt{f}\operatorname{Cos}\left(i\cdot 60^0 \pm \frac{z}{3}\right) \end{array}\right\} \text{ wobei } \operatorname{Cos} = \frac{g}{\sqrt{f^3}} \text{ ist.}$$

Hier werden aber die Formeln (J.) vorzuziehen sein, aus denen dasselbe unter anderer Gestalt folgt:

$$\text{(N.)} \left\{\begin{array}{l} x = 2\sqrt{f}\cdot\operatorname{Cos}\left(\frac{z}{3}\right) \\ x = \sqrt{f}\left[-\operatorname{Cos}\left(\frac{z}{3}\right) \pm i\cdot\sqrt{3}\operatorname{Sin}\left(\frac{z}{3}\right)\right] \end{array}\right\} \text{ wobei wieder } \operatorname{Cos} z = \frac{g}{\sqrt{f^3}} \text{ ist.}$$

2) Ist aber f negativ, dann wird $L^2 > K^2$, und weil nun $\sqrt{L^2 - K^2} = \sqrt{-f^3}$ und $\sqrt[6]{L^2 - K^2} = \sqrt{-f}$ ist, so hat unsere Gleichung mit Zugrundelegung der Formeln (H^1.) aus § 14 jetzt folgende Wurzeln:

$$(O.) \ldots \begin{cases} x = 2\sqrt{-f} \cdot \operatorname{Sin} \frac{z}{3} \\ x = 2\sqrt{-f} \cdot \operatorname{Sin}\left(i \cdot 60^0 - \frac{z}{3}\right) \\ x = -2\sqrt{-f} \cdot \operatorname{Sin}\left(i \cdot 60^0 + \frac{z}{3}\right) \end{cases} \text{wobei } \operatorname{Sin} z = \frac{g}{\sqrt{-f^3}}$$

Durch Benutzung der Formeln (J^1.) erhalten die Wurzeln folgenden verständlicheren Ausdruck:

$$(N.) \begin{cases} x = 2\sqrt{-f} \cdot \operatorname{Sin} \frac{z}{3} \\ x = \sqrt{-f}\left[-\operatorname{Sin} \frac{z}{3} \pm i \cdot \sqrt{3} \operatorname{Cos} \frac{z}{3}\right] \end{cases} \text{wobei wieder } \operatorname{Sin} z = \frac{g}{\sqrt{-f^3}} \text{ ist.}$$

Anmerkung 1. In den §§ 16 und 17 wurde nur der erste Werth der in § 15 (l.) befindlichen Wurzeln der Gleichung benutzt ($x = a + b$), aber dafür sämmtliche Kubikwurzeln von a und b herangezogen; man hätte auch sämmtliche in (l.) angegebenen Wurzeln unserer Gleichung mit einer beliebigen Kubikwurzel von a und der entsprechenden von b anwenden können und hätte natürlich dieselben Resultate gewonnen.

Anmerkung 2. Sollte man in der vorgelegten Gleichung $x^3 = 3fx + 2g$ unter g etwas Negatives zu verstehen haben, so dass etwa $g = -\gamma$ wäre, so würde es in beiden §§ vortheilhaft sein, $x = -X$ zu setzen und lieber die Gleichung aufzulösen $X^3 = 3fX + 2\gamma$.

B. Zweite Methode, ohne cardanische Formel.

I. Der irreducible Fall.

§ 18. Hat man $\sin \frac{z}{3}^3 = \frac{3}{4} \sin \frac{z}{3} - \frac{\sin z}{4}$ so ist nach § 6 f:

$$\sin \frac{z}{3} \; 1) = \sin \frac{z}{3},\; 2) = \sin\left(60 - \frac{z}{3}\right),\; 3) = -\sin\left(60 + \frac{z}{3}\right).$$

Ist aber die Gleichung aufzulösen: $x^3 = 3fx + 2g$, so setze man $x = \mu \cdot y$. Dies führt auf: $y^3 = \frac{3f}{\mu^2} \cdot y + \frac{2g}{\mu^3}$.

Bestimme ich nun z so, dass $\sin z = -\frac{8g}{\mu^3}$ wird, und das μ so, dass $\frac{f}{\mu^2} = \frac{1}{4}$

wird, so ist $y = \sin\frac{z}{3}$ als gefunden zu betrachten und also auch x. Es ergiebt sich dann $\mu = 2\sqrt{f}$, $\sin z = -\frac{g}{\sqrt{f^3}}$, und

$$(o.) \ldots\ldots \begin{cases} x_1 = 2\sqrt{f}\,.\,\sin\frac{z}{3} \\ x_2 = 2\sqrt{f}\,.\sin\left(60^0 - \frac{z}{3}\right) \\ x_3 = -2\sqrt{f}\,.\sin\left(60^0 + \frac{z}{3}\right). \end{cases}$$

Ebenso, hat man $\cos\frac{z}{3}^3 = \frac{3}{4}\cos\frac{z}{3} + \frac{\cos z}{4}$, so ist nach § 6, g:

$$\cos\frac{z}{3}\ 1) = \cos\frac{z}{3},\ 2) = -\cos\left(60^0 + \frac{z}{3}\right),\ 3) = -\cos\left(60^0 - \frac{z}{3}\right).$$

Legt man aber die Gleichung vor: $x^3 = 3fx + 2g$, so setze ich wieder $x = \mu . y$, dies giebt $y^3 = \frac{3f}{\mu^2}\cdot y + \frac{2g}{\mu^3}$.

Bestimme ich nun das willkürlich angenommene μ so, dass $\frac{f}{\mu^2} = \frac{1}{4}$, und z so, dass $\frac{\cos z}{4} = \frac{2g}{\mu^3}$ werde, so kann ich $y = \cos\frac{z}{3}$ als bekannt ansehen. Die Rechnung giebt: $\mu = 2\sqrt{f}$, $\cos z = \frac{g}{\sqrt{f^3}}$,

$$(m.) \ldots\ldots \begin{cases} x_4 = 2\sqrt{f}\,.\,\cos\frac{z}{3} \\ x_5 = -2\sqrt{f}\,.\cos\left(60^0 - \frac{z}{3}\right) \\ x_6 = -2\sqrt{f}\,.\cos\left(60^0 + \frac{z}{3}\right). \end{cases}$$

Hierbei zeigt sich, dass $x_6 = x_1$, $x_5 = x_2$, $x_4 = x_3$ ist.

§ 19. Man könnte auch die beiden andern Werthe von y dadurch finden, dass man die Gleichung: $y^3 - \frac{3}{4}y + \frac{\sin z}{4}$ durch $y - \sin\frac{z}{3}$ und

$$y^3 - \frac{3}{4}y - \frac{\cos z}{4} \text{ durch } y - \cos\frac{z}{3}$$

dividirt, die Quotienten gleich Null setzt,

$$\text{nämlich } y^2 + \sin\frac{z}{3}\,.\,y + \left(\sin\frac{z}{3}^2 - \frac{3}{4}\right) = 0, \text{ und}$$

$$y^2 + \cos\frac{z}{3}\,.\,y + \left(\cos\frac{z}{3}^2 - \frac{3}{4}\right) = 0$$

und diese quadratischen Gleichungen nach y auflöst. Man würde dann erhalten,

$$\text{im ersten Falle: } y = -\frac{1}{2}\sin\frac{z}{3} \pm \frac{1}{2}\cos\frac{z}{3}.\sqrt{3},$$

$$\text{im andern Falle: } y = -\frac{1}{2}\cos\frac{z}{3} \pm \frac{1}{2}\sin\frac{z}{3}.\sqrt{3}.$$

Daraus würden die Resultate von § 18 noch einmal, aber in etwas anderer Form gefunden werden, nämlich:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\sqrt{f}\,.\,\sin\tfrac{z}{3} \\ x &= \sqrt{f}\,.\left[-\sin\tfrac{z}{3} \pm \sqrt{3}\cos\tfrac{z}{3}\right] \end{aligned}\right\} \text{wobei } \sin z = -\frac{g}{\sqrt{f^3}} \text{ ist.} \;\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(p.)}$$

im andern Fall:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\sqrt{f}\,.\,\cos\tfrac{z}{3} \\ x &= \sqrt{f}\,.\left[-\cos\tfrac{z}{3} \pm \sqrt{3}\,.\,\sin\tfrac{z}{3}\right] \end{aligned}\right\} \text{wobei } \cos z = \frac{g}{\sqrt{f^3}} \text{ ist.} \;\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(n.)}$$

II. Der reducible Fall.

§ 20. In Beziehung auf die Sektoren der gleichseitigen Hyperbel gelten nach § 7 E. folgende Gleichungen:

$$\operatorname{Sin}\tfrac{z}{3}^3 = -\tfrac{3}{4}\operatorname{Sin}\tfrac{z}{3} + \frac{\operatorname{Sin} z}{4},$$

$$\operatorname{Cos}\tfrac{z}{3}^3 = \tfrac{3}{4}\operatorname{Cos}\tfrac{z}{3} + \frac{\operatorname{Cos} z}{4}.$$

1) Hat man nun $Y^3 = -\tfrac{3}{4}Y + \frac{\operatorname{Sin} z}{4}$, so ist zunächst $Y = \operatorname{Sin}\tfrac{z}{3}$.

Da nun $\left(Y^3 + \tfrac{3}{4}Y - \frac{\operatorname{Sin} z}{4}\right) : \left(Y - \operatorname{Sin}\tfrac{z}{3}\right) = Y^2 + \operatorname{Sin}\tfrac{z}{3}\,.\,Y + \left(\operatorname{Sin}\tfrac{z}{3}^2 + \tfrac{3}{4}\right) = 0$

ist, so ist auch $Y = -\tfrac{1}{2}\operatorname{Sin}\tfrac{z}{3} \pm i\,.\,\sqrt{\tfrac{3}{2}}\,.\,\operatorname{Cos}\tfrac{z}{3}$.

Liegt aber die Gleichung vor:

$$x^3 = 3fx + 2g,$$

so wird sie in jeder Beziehung den Vergleich mit jener für Y^3 aushalten, wenn f negativ ist. Denn man setze $x = \mu\,.\,Y$, so geht sie in folgende über:

$Y^3 = \frac{3f}{\mu^2}Y + \frac{2g}{\mu^3}$. Da nun ganz gut $\frac{3f}{\mu^2} = -\tfrac{3}{4}$, und $\frac{2g}{\mu^3} = \frac{\operatorname{Sin} z}{4}$ sein kann, wobei

$$\mu = 2\sqrt{-f} \text{ und } \operatorname{Sin} z = \frac{g}{\sqrt{-f^3}} \text{ ist,}$$

so hat das Y dieser Gleichung einen der drei oben angegebenen Werthe und folglich ist

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\sqrt{-f}\,.\,\operatorname{Sin}\tfrac{z}{3} \\ x &= \sqrt{-f}\left[-\operatorname{Sin}\tfrac{z}{3} \pm i\,.\sqrt{3}\operatorname{Cos}\tfrac{z}{3}\right) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(P).}$$

2) Ist aber f positiv, so stelle man unsere Gleichung $x^3 = 3\,f\,x + 2\,g$ mit folgender zusammen: $Y^3 = \frac{3}{4}\,Y + \frac{\cos z}{4}$, in welcher zunächst $Y = \cos\frac{z}{3}$ ist.

Da aber $\left(Y^3 - \frac{3}{4}\,Y - \frac{\cos z}{4}\right) : \left(Y - \cos\frac{z}{3}\right) = Y^2 + \cos\frac{z}{3} .\, Y + \left(\cos\frac{z}{3}^2 - \frac{3}{4}\right) = 0$ ist, so kann auch $Y = -\frac{1}{2}\cos\frac{z}{3} \pm i\,.\,\frac{\sqrt{3}}{2}.\,\sin\frac{z}{3}$ sein.

Setzt man nun $x = \mu\,.\,Y$, so kann dieses Y einen der drei oben erhaltenen Werthe bedeuten, wenn nur $\mu = 2\sqrt{f}$ und $\cos z = \frac{g}{\sqrt{f^3}}$ ist.

Da diesen Annahmen hier aber nichts im Wege steht, so ist

$$\text{(N.)} \ldots\ldots\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} x = 2\sqrt{f}\,.\,\cos\frac{z}{3} \\ x = \sqrt{f}\,.\,\left(-\cos\frac{z}{3} \pm\,.\,\sqrt{3}.\sin\frac{z}{3}\right) \end{array}\right\}$$

§ 21. Man kann auch zu dem nämlichen Resultate und, wenn man will, unter etwas anderer Form gelangen, ohne die oben gemachten Divisionen und was damit in Zusammenhang steht, zu vollziehen, indem man alle drei Werthe von Y, wie sie in § 8 F. und G. angegeben sind, benutzt. Man erhält dann 1) für den Fall, dass f negativ ist:

$$\text{(O.)} \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} x = 2\sqrt{-f}.\,\sin\frac{z}{3} \\ x = 2\sqrt{-f}.\,\sin\left(i\,.\,60^0 - \frac{z}{3}\right) \\ x = -2\sqrt{-f}.\,\sin\left(i\,.\,60^0 - \frac{z}{3}\right) \end{array}\right\} \text{ wobei } \sin z = \frac{g}{\sqrt{-f^3}} \text{ ist.}$$

2) für den Fall, dass f positiv ist:

$$\text{(M.)} \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} x = 2\sqrt{f}.\,\cos\frac{z}{3} \\ x = -2\sqrt{f}.\,\cos\left(i\,.\,60^0 + \frac{z}{3}\right) \\ x = -2\sqrt{f}.\,\cos\left(i\,.\,60^0 = \frac{z}{3}\right) \end{array}\right\} \text{ wobei } \cos z = \frac{g}{\sqrt{f^3}} \text{ ist.}$$

---

§ 22. Somit glaube ich dargethan zu haben, (§ 15 — 17), dass einerseits durch die bei manchen Mathematikern noch immer in Misscredit stehende cardanische Formel: $x = \sqrt[3]{g + \sqrt{g^2 - f^2}} + \sqrt[3]{g + \sqrt{g^2 - f^3}}$ eine vollständige Lösung der kubischen Gleichungen von der uns beschäftigenden Form herbeigeführt werden kann, andererseits (§ 18 — 21), dass auch ohne die cardanische Formel zu demselben

Ziele zu gelangen ist. Der bessern Uebersicht wegen gebe ich noch folgende Zusammenstellung:

Gleichung $x^3 = 3fx + 2g$.

Ist f negativ, so genügen die Formeln (O) oder (P) des reducibeln Falles:

$$(\text{O.})\ \begin{cases} x = 2\sqrt{-f}\,.\,\text{Sin}\,\frac{z}{3} \\ x_{\text{I}} = 2\sqrt{-f}\,.\,\text{Sin}\left(i\,.\,60^0 - \frac{z}{3}\right) \\ x_{\text{II}} = -2\sqrt{-f}.\text{Sin}\left(i\,.\,60^0 - \frac{z}{3}\right) \end{cases} \text{Sin}\,z = \frac{g}{\sqrt{-f^3}} \begin{cases} x = 2\sqrt{-f}\,.\,\text{Sin}\,\frac{z}{3} \\ x_{\text{I}} = \sqrt{-f}\left[-\,\text{Sin}\,\frac{z}{3} + i\,.\sqrt{3}\,.\,\text{Cos}\frac{z}{3}\right] \\ x_{\text{II}} = \sqrt{-f}\left[-\,\text{Sin}\,\frac{z}{3} - i\,.\sqrt{3}\,.\,\text{Cos}\frac{z}{3}\right] \end{cases} (\text{P.})$$

Ist aber f positiv, so hat man für den reducibeln Fall die Formeln (M) und (N):

$$(\text{M.})\ \begin{cases} x = 2\sqrt{f}\,.\,\text{Cos}\,\frac{z}{3} \\ x_{\text{I}} = -2\sqrt{f}\,.\,\text{Cos}\left(i.60^0 + \frac{z}{3}\right) \\ x_{\text{II}} = -2\sqrt{f}\,.\,\text{Cos}\left(i.60^0 - \frac{z}{3}\right) \end{cases} \text{Cos}\,z = \frac{g}{\sqrt{f^3}} \begin{cases} x = 2\sqrt{f}\,.\,\text{Cos}\,\frac{z}{3} \\ x_{\text{I}} = \sqrt{f}\,.\left[-\,\text{Cos}\,\frac{z}{3} - i\,.\sqrt{3}\,.\,\text{Sin}\frac{z}{3}\right] \\ x_{\text{II}} = \sqrt{f}\,.\left[-\,\text{Cos}\,\frac{z}{3} + i\,.\sqrt{3}\,.\,\text{Sin}\frac{z}{3}\right] \end{cases} (\text{N.})$$

und für den irreducibeln Fall kann man sich nach Belieben der Formeln (o) und (p)

$$(\text{o.})\ \begin{cases} x = 2\sqrt{f}\,.\,\sin\frac{z}{3} \\ x_{\text{I}} = 2\sqrt{f}\,.\,\sin\left(60^0 - \frac{z}{3}\right) \\ x_{\text{II}} = -2\sqrt{f}\,.\,\sin\left(60^0 + \frac{z}{3}\right) \end{cases} \sin z = -\frac{g}{\sqrt{f^3}} \begin{cases} x = 2\sqrt{f}\,.\,\sin\frac{z}{3} \\ x_{\text{I}} = \sqrt{f}.\left[-\sin\frac{z}{3} + \sqrt{3}.\cos\frac{z}{3}\right] \\ x_{\text{II}} = \sqrt{f}.\left[-\sin\frac{z}{3} - \sqrt{3}.\cos\frac{z}{3}\right] \end{cases} (\text{p.})$$

oder der Formeln (m) und (n) bedienen:

$$(\text{m.})\ \begin{cases} x = 2\sqrt{f}.\cos\frac{z}{3} \\ x_{\text{I}} = -2\sqrt{f}.\cos\left(60^0 - \frac{z}{3}\right) \\ x_{\text{II}} = -2\sqrt{f}.\cos\left(60^0 + \frac{z}{3}\right) \end{cases} \cos z = \frac{g}{\sqrt{f^3}} \begin{cases} x = 2\sqrt{f}.\cos\frac{z}{3} \\ x_{\text{I}} = \sqrt{f}.\left[-\cos\frac{z}{3} - \sqrt{3}.\sin\frac{z}{3}\right] \\ x_{\text{II}} = \sqrt{f}.\left[-\cos\frac{z}{3} + \sqrt{3}.\sin\frac{z}{3}\right] \end{cases} (\text{n.})$$

Man sieht, die acht Formeln m, n, o, p; M, N, O, P sind nur praktische Auslegungen der einen cardanischen Formel.

Anmerkung. Dass man die kubischen Gleichungen auch durch die in § 10 und 11 entwickelten Formeln, welche sich auf die Dreitheilung der Sektoren bei der Ellipse und ungleichseitigen Hyperbel beziehen, hätte lösen können, darf wohl nur angedeutet werden.

Auflösung der kubischen Gleichungen von der Form $x^3 + 3\beta x^2 + \delta = 0.$

§ 23. Je ausführlicher wir uns mit den Gleichungen von der Form $x^3 = 3fx + 2g$ beschäftigt haben, desto kürzer können wir uns bei den kubischen Gleichungen von anderer Form fassen.

Legt man uns die Gleichung vor: $y^3 + 3\varphi y + d = 0$, so ist nach dem Früheren:

$$y = \begin{cases} \sqrt[3]{-\frac{d}{2} + \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \varphi^3}} + \sqrt[3]{-\frac{d}{2} - \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \varphi^3}}, = p + q, \\ -\frac{p+q}{2} \pm \frac{p-q}{2} i \sqrt{3}, \end{cases}$$

welche Ausdrücke nach Umständen folgende Deutungen zulassen:

$$y = \begin{cases} 2\sqrt{-\varphi} \,.\, \cos\frac{z}{3} \\ \sqrt{-\varphi}\left[-\cos\frac{z}{3} \pm \sqrt{3} \,.\, \sin\frac{z}{3}\right] \end{cases} \text{ wobei } \cos z = \frac{-\frac{d}{2}}{\sqrt{-\varphi^3}},$$

$$y = \begin{cases} 2\sqrt{-\varphi} \,.\, \mathrm{Cos}\frac{z}{3} \\ \sqrt{-\varphi} \,.\left(-\mathrm{Cos}\frac{z}{3} \pm i\sqrt{3} \,.\, \mathrm{Sin}\frac{z}{3}\right) \end{cases} \text{ wobei } \mathrm{Cos}\, z = \frac{-\frac{d}{2}}{\sqrt{-\varphi^3}},$$

$$y = \begin{cases} 2\sqrt{\varphi} \,.\, \mathrm{Sin}\frac{z}{3} \\ \sqrt{\varphi}\left(-\mathrm{Sin}\frac{z}{3} \pm i\sqrt{3} \,.\, \mathrm{Cos}\frac{z}{3}\right) \end{cases} \text{ wobei } \mathrm{Sin}\, z = \frac{-\frac{d}{2}}{\sqrt{-\varphi^3}}.$$

Hat man es aber mit einer Gleichung von der Form $x^2 + 3\beta x^2 + \delta = 0$ zu thun, so muss man sie bekanntlich dadurch auf die vorige Form reduciren, dass man $x = y - \beta$ setzt. Dadurch erhält man $\varphi = -\beta^2$, $d = \delta + 2\beta^3$; folglich ist im Allgemeinen

$$x = \begin{cases} -\beta + \sqrt[3]{-\left(\frac{\delta}{2} + \beta^3\right) + \sqrt{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + \delta.\beta^3}} + \sqrt[3]{-\left(\frac{\delta}{2} + \beta^3\right) - \sqrt{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + \delta.\beta^3}} = -\beta + p + q \\ -\beta - \frac{p+q}{2} \pm \frac{p-q}{2} i \sqrt{3}. \end{cases}$$

Für den irreducibeln Fall, in welchem $-\delta \,.\, \beta^3 > \left(\frac{\delta}{2}\right)^2$ ist, hat man dann:

$$(q.) \ldots x = \begin{cases} -\beta + 2\beta \cos\frac{z}{3} \\ -\beta + \beta\left(-\cos\frac{z}{3} \pm \sqrt{3} \sin\frac{z}{3}\right) = -\beta - 2\beta \,.\, \cos\left(60^0 \pm \frac{z}{3}\right), \end{cases}$$

$$\text{wobei } \cos z = -1 - \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)}{\beta^3}.$$

Für den reducibeln Fall, in welchem $-\beta^3 < \frac{\delta}{4}$ ist, genügen hier folgende Gleichungen:

$$(\text{Q.}) \ldots x = \begin{Bmatrix} -\beta + 2\beta \,.\, \text{Cos}\,\frac{z}{3} \\ -\beta + \beta\left(-\text{Cos}\,\frac{z}{3} \pm i\sqrt{3}\,\text{Sin}\,\frac{z}{3}\right) \end{Bmatrix}, \text{ wobei Cos}\, z = -1 - \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)}{\beta^3} \text{ ist.}$$

Denn da $K = -\left(\frac{\delta}{2} + \beta^3\right)$ und $L = \sqrt{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + \delta \,.\, \beta^3}$ ist, so ist stets $K^2 > L^2$, man darf daher nie seine Zuflucht zu den andern Formeln für y nehmen, bei denen Sin z eine Rolle spielt. (vergl. § 14.)

Wenn die Zeichen von β und δ gleich sind, so erscheint hiebei Cos z negativ. Obgleich dies an und für sich nichts zu sagen hat, da man dann nur den entgegengesetzten Zweig der Hyperbel zur Anwendung bringen darf, so thut man doch besser, wenn man vor $\sqrt{-\varphi^3}$ das Minuszeichen schreibt, wodurch man erhält:

$$\text{Cos}\, z = 1 + \frac{\left(\frac{\delta}{2}\right)}{\beta^3}$$

Auflösung der kubischen Gleichungen von der Form

$$\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 3\gamma x + \delta = 0.$$

§ 24. Um diese Gleichung zu reduciren, setze man $x = y - \frac{\beta}{\alpha}$, dann ist $\varphi = \frac{\alpha\gamma - \beta^2}{\alpha^2}$, $d = \frac{2\beta^3 - 3\alpha\beta\gamma + \alpha^2\delta}{\alpha^3}$ und

$x = -\frac{\beta}{\alpha} + p + q$, aber auch $= -\frac{\beta}{\alpha} - \frac{p+q}{2} \pm \frac{p-q}{2} i\sqrt{3}$,

$$\text{wo } \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} = \sqrt[3]{-\frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \varphi^3}} \text{ ist.}$$

Für den irreduciblen Fall ist bekanntlich $(-\varphi)^3 > \left(\frac{d}{2}\right)^2$, d. h. vor Allem muss 1) $\beta^2 - \alpha\gamma$ positiv und dann 2) $\left(\frac{\beta^2 - \alpha\gamma}{2}\right)^3 > \left(\frac{2\beta^3 - 3\alpha\beta\gamma + \alpha^2\delta}{2\alpha^3}\right)^2$ sein.

Den Ausdrücken für p und q hat Dr. Müller in Wiesbaden (Grunerts' Archiv, 22, pag. 18) folgende symmetrische Gestalt gegeben:

$$\begin{matrix} p \\ q \end{matrix} = \sqrt[3]{\frac{\alpha(\alpha\delta - \beta\gamma) - 2\beta(\alpha\gamma - \beta^2)}{2 \,.\, \alpha^3} \pm \sqrt{\frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 - 4(\alpha\gamma - \beta^2)\,.\,(\beta\delta - \gamma^2)}{4 \,.\, \alpha^4}}}.$$

Hiernach lässt sich die Bedingung der Irreducibilität auch in folgender Weise aussprechen: $4\,(\alpha\,\gamma - \beta^2) \,.\, (\beta\,\delta - \gamma^2) > (\alpha\,\delta - \beta\,\gamma)^2$. Weil wir nun schon wissen, dass in diesem Falle $\beta^2 - \alpha\,\gamma$ positiv sein muss, so ist es auch nöthig, dass $\gamma^2 - \beta\,\delta$ positiv ist, d. h. die zwei massgebenden Bedingungen für den reducibeln Fall involviren folgende zwei Bedingungen: $\beta^2 > \alpha\,\gamma$ und $\gamma^2 > \beta\,\delta$.

Aus der von Newton (Arithmetica universalis, pag. 184.) zur Entdeckung imaginärer Wurzeln aufgestellten Regel würde schon folgen, dass, wenn diese beiden letzten involvirten Bedingungen allein zutreffen, auf keine imaginären Wurzeln zu schliessen wäre. Freilich fügt er selbst zu seiner Regel hinzu: Atque haec ita se habent, ubi non sunt plures impossibiles radices quam per regulam allatam deteguntur; possunt enim plures esse, licet id perraro eveniat. Auch Campbell (ibid. pag. 342) sieht sich genöthigt, zu der von ihm verbesserten Newton'schen Regel den Zusatz zu machen: Tot ad minimum erunt radices impossibiles.

Müller giebt für den irreducibeln Fall auch die trigonometrische Lösung. Indem wir unsrer frühern Bezeichnung gemäss setzen:

$$K = -\frac{\alpha\,(\alpha\,\delta - \beta\,\gamma) - 2\,\beta\,.\,(\alpha\,\gamma - \beta^2)}{2\,.\,\alpha^3},\quad L = \sqrt{\frac{4\,.\,(\alpha\,\gamma - \beta^2)\,.\,(\beta\,\delta - \gamma^2) - (\alpha\,\delta - \beta\,\gamma)^2}{4\,.\,\alpha^4}},$$

kommt er durch die Annahme $K + i\,L = r^3\,(\cos z + i\,.\,\sin z)$,

$$K - i\,L = r^3\,(\cos z - i\,.\,\sin z)$$

leicht zu den Resultaten: $p = r\left(\cos\frac{z}{3} + i\sin\frac{z}{3}\right)$, $q = r\left(\cos\frac{z}{3} - i\sin\frac{z}{3}\right)$,

$r^3 = \sqrt{K^2 + L^2}$, $\operatorname{tg} z = \frac{L}{K}$, $x = -\frac{\beta}{\alpha} + 2\,r\,\cos\frac{z}{3}$, $x = -\frac{\beta}{\alpha} - 2r\cos\left(60 \pm \frac{z}{3}\right)$.

Wir können aber noch einen Schritt weiter gehen. Da nämlich $K = -\frac{d}{2}$, $L = \sqrt{-\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \varphi^2}$ ist, so ist $K^2 + L^2 = -\varphi^3 = \left(\frac{\beta^2 - \alpha\,\gamma}{\alpha^2}\right)^3$, und

$$(r.)\quad x = \left\{\begin{array}{l} -\frac{\beta}{\alpha} + 2\sqrt{\frac{\beta^2 - \alpha\,\gamma}{\alpha}}\,.\,\cos\frac{z}{3} \\ -\frac{\beta}{\alpha} + \sqrt{\frac{\beta^2 - \alpha\,\gamma}{\alpha}}\left(-\cos\frac{z}{3} \pm \sqrt{3}\,.\,\sin\frac{z}{3}\right) = -\frac{\beta}{\alpha} - 2\sqrt{\frac{\beta^2 - \alpha\,\gamma}{\alpha}}\,.\cos\left(60 \pm \frac{z}{3}\right) \end{array}\right\}$$

$$\text{wobei } \cos z = \frac{-\frac{\alpha}{2}\,.\,\alpha\,\delta - \beta\,\gamma) - \beta\,.\,(\beta^2 - \alpha\,\gamma)}{\sqrt{(\beta^2 - \alpha\,\gamma)^3}} \text{ ist.}$$

Aus der oben für den irreducibeln Fall gemachten zweiten Annahme ergiebt sich, dass dieser Ausdruck für cos z stets als ein echter Bruch wird befunden werden.

§ 25. Wir gehen nun zum **reducibeln** Fall über, nehmen also an, dass jetzt

$$4 \,.\, (\alpha \gamma - \beta^2) \,.\, (\beta \delta - \gamma^2) < (\alpha \delta - \beta \gamma)^2 \text{ sei.}$$

Es bleibt dann $K = -\frac{\alpha(\alpha\delta - \beta\gamma) - 2\beta(\alpha\gamma - \beta^2)}{2\alpha^3}$, aber es ist nun

$$L = \sqrt{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 - 4 \,.\, (\alpha\gamma - \beta^2) \,.\, (\beta\delta - \gamma^2)}.$$

I. Es sei $K^2 > L^2$,

zunächst ist dann $y = \sqrt[3]{K + L} + \sqrt[3]{K - L}$ d. h. (nach § 13 und § 17. 1)

$$y = \begin{Bmatrix} 2\sqrt[6]{K^2 - L^2} \,.\, \text{Cos}\,\frac{z}{3} \\ \sqrt[6]{K^2 - L^2}\left(-\text{Cos}\,\frac{z}{3} \pm i\sqrt{3} \,.\, \text{Sin}\,\frac{z}{3}\right) \end{Bmatrix}, \text{ wobei Cos } z = \frac{K}{\sqrt{K^2 - L^2}}.$$

Weil nun auch $K = -\frac{d}{2}$, $L = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \varphi^3}$, also $K^2 - L^2 = -\varphi^3$ $= \left(\frac{\beta^2 - \alpha\gamma}{\alpha^2}\right)^3$ ist, so haben wir:

$$x = \begin{Bmatrix} -\frac{\beta}{\alpha} + 2\frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha} \,.\, \text{Cos}\,\frac{z}{3} \\ -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha}\left(-\text{Cos}\,\frac{z}{3} \pm i\sqrt{3}\,\text{Sin}\,\frac{z}{3}\right) \end{Bmatrix} \text{wobei Cos } z = \frac{-\frac{\alpha}{2}(\alpha\delta - \beta\gamma) - \beta(\beta^2 - \alpha\gamma)}{\sqrt{(\beta^2 - \alpha\gamma)^3}} \quad (\text{R.})$$

II. Ist aber $L^2 > K^2$, so hat man (nach § 14 und § 17. 2) vorerst zu schreiben:

$$y = \begin{Bmatrix} 2\sqrt[6]{L^2 - K^2}\,\text{Sin}\,\frac{z}{3} \\ \sqrt[6]{L^2 - K^2}\left(-\text{Sin}\,\frac{z}{3} \pm i\sqrt{3} \,.\, \text{Cos}\,\frac{z}{3}\right) \end{Bmatrix} \text{ wobei Sin } z = \frac{K}{\sqrt{L^2 - K^2}}.$$

Da aber $L^2 - K^2 = \varphi^3 = \left(\frac{\alpha\gamma - \beta^2}{\alpha^2}\right)^3$ ist, so findet sich:

$$x = \begin{Bmatrix} -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{2\sqrt{\alpha\gamma - \beta^2}}{\alpha}\,\text{Sin}\,\frac{z}{3} \\ -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\sqrt{\alpha\gamma - \beta^2}}{\alpha}\left(-\text{Sin}\,\frac{z}{3} \pm i\sqrt{3}\,\text{Cos}\,\frac{z}{3}\right) \end{Bmatrix} \begin{matrix} \text{wobei} \\ \text{Sin } z = \frac{-\frac{\alpha}{2} \,.\, (\alpha\delta - \beta\gamma) + \beta(\alpha\gamma - \beta^2)}{\sqrt{(\alpha\gamma - \beta^2)^3}}. \end{matrix} \quad (\text{R}^{\text{I}}.)$$

---

§ 26. Ich halte es für zweckmässig, noch eine Zusammenstellung der zur trigonometrischen Auflösung **sämmtlicher** kubischer Gleichungen nothwendigen Formeln zu geben:

$$\text{A) } x^3 + \delta = 0.$$

$$x = \sqrt[3]{-\delta}, \text{ auch } = \sqrt[3]{-\delta}\,(-\cos 60^0 \pm i \sin 60^0).$$

B) $x^3 + 3\gamma x + \delta = 0.$

Für den irreducibeln Fall, wenn nämlich $-\gamma^3 > \left(\frac{\delta}{2}\right)^2$ ist:

$$x = \begin{cases} 2 \,.\, \sqrt{-\gamma} \cos \frac{z}{3} \\ \sqrt{-\gamma}\left(- \cos \frac{z}{3} \pm \sqrt{3} \,.\, \sin \frac{z}{3}\right) = -2 \sqrt{-\gamma} . \cos \left(60^0 \pm \frac{z}{2}\right) \end{cases} \text{wobei } \cos z = \frac{-\frac{\delta}{2}}{\sqrt{-\gamma^3}}.$$

Für den reducibeln Fall:

$$x = \begin{cases} 2 \sqrt{-\gamma} \,.\, \mathrm{Cos} \frac{z}{3} \\ \sqrt{-\gamma} \,.\, \left(- \mathrm{Cos} \frac{z}{3} \pm i \sqrt{3} \,\mathrm{Sin} \frac{z}{3}\right) \end{cases}$$

wobei $\mathrm{Cos}\, z = \frac{-\frac{\delta}{2}}{\sqrt{-\gamma^3}}$

$$x = \begin{cases} 2 \sqrt{\gamma} \,.\, \mathrm{Sin} \frac{z}{3} \\ \sqrt{\gamma}\left(- \mathrm{Sin} \frac{z}{3} \pm i \sqrt{3} \,\mathrm{Cos} \frac{z}{3}\right) \end{cases}$$

wobei $\mathrm{Sin}\, z = \frac{-\frac{\delta}{2}}{\sqrt{\gamma^3}}$.

C) $x^3 + 3\beta x^2 + \delta = 0.$

Für den irreducibeln Fall, wenn nämlich $-\beta^3 \delta > \left(\frac{\delta}{2}\right)^2$ ist:

$$x = \begin{cases} -\beta + 2\beta \,.\, \cos \frac{z}{3} \\ -\beta + \beta\left(- \cos \frac{z}{3} \pm \sqrt{3} \sin \frac{z}{3}\right) = -\beta - 2\beta \cos \left(60 \pm \frac{z}{3}\right) \end{cases},$$

wobei $\cos z = -1 - \frac{\frac{\delta}{2}}{\beta^3}$.

Für den reducibeln Fall:

$$x = \begin{cases} -\beta + 2\beta \,\mathrm{Cos} \frac{z}{3} \\ -\beta + \beta\left(- \mathrm{Cos} \frac{z}{3} \pm i \sqrt{3} \,\mathrm{Sin} \frac{z}{3}\right) \end{cases}, \text{ wobei } \mathrm{Cos}\, z = -1 - \frac{\frac{\delta}{2}}{\beta^3}$$

D) $\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 3\gamma x + \delta = 0.$

Für den irreducibeln Fall: $4 \,.\, (\alpha\gamma - \beta^2) \,.\, (\beta\delta - \gamma^2) > (\alpha\delta - \beta\gamma)^2;\ \beta^2 > \alpha\gamma.$

$$x = \begin{cases} -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{2\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha} . \cos \frac{z}{3} \\ -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha}\left(- \cos \frac{z}{3} \pm \sqrt{3} \sin \frac{z}{3}\right) = -\frac{\beta}{\alpha} - 2\frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha} . \cos \left(60 \pm \frac{z}{3}\right) \end{cases}$$

wobei $\cos z = \frac{-\frac{\alpha}{2} \,.\, (\alpha\delta - \beta\gamma) - \beta \,.\, (\beta^2 - \alpha\gamma)}{\sqrt{(\beta^2 - \alpha\gamma)^3}}$.

Für den reducibeln Fall:

$$x = \begin{cases} -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{2\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha} \,.\, \mathrm{Cos} \frac{z}{3} \\ -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha}\left(- \mathrm{Cos} \frac{z}{3} \pm i \sqrt{3} \,\mathrm{Sin} \frac{z}{3}\right) \end{cases}$$

wobei $\mathrm{Cos}\, z = \frac{-\frac{\alpha}{2}(\alpha\delta - \beta\gamma) - \beta . (\beta^2 - \alpha\gamma)}{\sqrt{(\beta^2 - \alpha\gamma)^3}}$.

$$x = \begin{cases} -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{2\sqrt{\alpha\gamma - \beta^2}}{\alpha} . \mathrm{Sin} \frac{z}{3} \\ -\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\sqrt{\alpha\gamma - \beta^2}}{\alpha} . \left(- \mathrm{Sin} \frac{z}{3} \pm i \sqrt{3} \,\mathrm{Cos} \frac{z}{3}\right) \end{cases}$$

wobei $\mathrm{Sin}\, z = \frac{-\frac{\alpha}{2}(\alpha\delta - \beta\gamma) + \beta . (\alpha\gamma - \beta^2)}{\sqrt{(\alpha\gamma - \beta^2)^3}}$.

Beispiele zum reducibeln Falle.

§ 27. *Beispiel 1.* $x^3 + x = 10$; ($f = -\frac{1}{3}$, $g = 5$.)

Hier ist log Sin $z = 1{,}41465$.

Da nun nach den Differenzen in den Tafeln $328 : 328 = 244 : p$, also $p = 244$ ist,

so ist $z = 1{,}71584$: Modul, $\frac{z}{3} = 0{,}57195 : M$.

und ohne Weiteres: $\log \operatorname{Sin} \frac{z}{3} = 0{,}23856 = \frac{0{,}47712}{2}$ $\Big\}$ $\log \operatorname{Cos} \frac{z}{3} = 0{,}30103$,

d. h. $\operatorname{Sin} \frac{z}{3} = \sqrt{3}$, $\operatorname{Cos} \frac{z}{3} = 2$. Also $x = 2$ und $x = -1 \pm 2 \, . \, i$.

Beispiel 2. $x^3 + 3x = 76$; ($f = -1$, $g = 38$.)

$\log \operatorname{Sin} z = 1{,}57978$; $81 : 26 = 80 : p$; also $p = 26$.

$z = 1{,}88089$, $\frac{z}{3} = 0{,}62696$.

$28 : 2 = 32 : p$, $p = 2$; $\log \operatorname{Sin} \frac{z}{3} = 0{,}30102$.

$28 : 2 = 25 : p$, $p = 2$; $\log \operatorname{Cos} \frac{z}{3} = 0{,}34948 = \frac{0{,}69896}{2}$.

Also $\operatorname{Sin} \frac{z}{3} = 2$, $\operatorname{Cos} \frac{z}{3} = \sqrt{5}$. — Demnach $x = 4$ und $x = -2 \pm i \sqrt{15}$.

Beispiel 3. $x^3 + \frac{223}{64} x + \frac{119}{32} = 0$. Hier ist f und g negativ. Man setze $x = -X$.
Dies giebt $X^3 + \frac{223}{64} X = \frac{119}{32}$. Da nun $\log(-g) = 0.26937$, und $\log(-f) = 0{,}06500$,
so ist $\log \operatorname{Sin} z = 0{,}17187$; $27 : 4 = 23 : p$, $p = 3$; $z = 0{,}51537$; $\frac{z}{3} = 0{,}17179$.

$14 : 10 = 36 : p$, $p = 26$; $\log \operatorname{Sin} \frac{z}{3} = 9{,}60849$,

$14 : 10 = 5 : p$, $p = 4$; $\log \operatorname{Cos} \frac{z}{3} = 0{,}03313$,

$X = 0{,}87502$	$x = -\frac{7}{8}$
$X = -0{,}43751 \pm 2{,}0146 \, . \, i$	$x = \frac{7 \mp \sqrt{1039} \, . \, i}{16}$

Beispiel 4. $x^3 = 12x + 28$. ($f = 4$, $g = 14$.)

$\log \operatorname{Cos} z = 0{,}24304$. — Sofort: $z = 0{,}50326$; $\frac{z}{3} = 0{,}16775$.

Sofort log Cos $\frac{z}{3} = 0{,}03162$ und log Sin $\frac{z}{3} = 9{,}59762$.

Demnach $x = 4{,}0321$ und $x = -\ 2{,}1511 \pm 1{,}3715\ .\ i$.

Beispiel 5. $x^3 = 13{,}3592\ .\ x + 24{,}6377$; ($f = 4{,}4531$, $g = 12{,}3189$.)

Auf diese Gleichung kam Klügel (Astronomisches Jahrbuch, Berlin 1782, pag. 197), als er aus zwei geocentrischen Oertern des Uranus dessen Entfernung von der Sonne ($y = x^2$), in Halbmessern der Erdbahn ausgedrückt, suchte. Er fand damals $x = 4{,}3599$. Später in seinem Wörterbuch (II. pag. 392.) findet er durch die cardanische Formel $x = 4{,}36004$, also beiläufig $y = 19{,}009949$.

Auch löst Klügel (II. 600) dieselbe Gleichung nach den nur von Grad zu Grad fortschreitenden Lambert'schen Tafeln und findet die reelle Wurzel
$x = 4{,}368$; die beiden imaginären Wurzeln würden sich nach denselben Tafeln ergeben: $x = -\ 2{,}184 \pm 0{,}568\ .\ \sqrt{3}\ .\ i$ oder
$= -\ 2{,}184 \pm 0{,}983\ .\ i$.

Wir wollen nun dasselbe Beispiel nach unsern Tafeln berechnen:

Es ist log $g = 1{,}0905703$; log $\sqrt{f^3} = 0{,}9729888$.

Also log Cos $z = 0{,}1175815$; $1071 : 243 = 1657 : p$; $p = 376$.

$$z = 0{,}3341744;\ \frac{z}{3} = 0{,}1113915.$$

$1306 : 301 = 328 : p;\ p = 76$; also log Cos $\frac{z}{3} = 0{,}0141314$,

$1306 : 301 = 5198 : p;\ p = 1198$; also log Sin $\frac{z}{3} = 9{,}4138191$.

$$\text{Folglich } x = 4{,}360045 \text{ und } x = \begin{cases} -\ 2{,}180023 \pm i\ .\ 0{,}9477842. \text{ oder} \\ -\ 2{,}180023 \pm i\ .\ 0{,}5472028\ .\ \sqrt{3}. \end{cases}$$

---

§ 28. *Beispiel 6.* Um bei der vorläufigen Hypothese, dass ein Comet sich in einer Parabel bewegt, aus seinem kleinsten Abstande von der Sonne (q) und der Zeit (t), welche seit seinem Durchgange durchs Perihelium verflossen ist, die wahre Anomalie (v) zu finden, dazu dient bekanntlich folgende Gleichung:

$$\text{tg}\ \tfrac{1}{2}\ v^3 + 3\ .\ \text{tg}\ \tfrac{1}{2}\ v = \frac{M}{25}, = 2\ .\ g.$$

$$\text{wo } M = m\ .\ t,\ m = \frac{C}{q^{\frac{3}{2}}},\ \log C = 9{,}9601277 \text{ ist.}$$

Da nun die von Luther in Bilk verbesserten Barker'schen Tafeln für jedes M sofort das entsprechende v „bis auf einige Hunderttheile der Sekunde genau" angeben, so kann es mir nicht einfallen, etwas Besseres an die Stelle setzen zu wollen; auch verlangt das gewiss Niemand, weil diese Gleichung, in welcher stets $f = -1$ ist, nur ein specieller Fall unsrer allgemeinern kubischen Gleichung ist. Dennoch scheint es mir zweckmässig, ein Paar auf verschiedene Stellen dieser Tafeln bezügliche Beispiele zu berechnen. Zu dem Ende entnehmen wir aus der neuen Ausgabe von Olber's Abhandlung über die Cometenbahnen die nöthigen Data.

Comet 156. Es ist $\log q = 9{,}7913017$. Wie gross ist v für $t = 4$ Tage?

Hier ist $\log m = 0{,}2731752$, $\log M = 0{,}8752352$, $M = 7{,}503005$ und folglich nach den Barkerschen Tafeln $v = 11^0\ 23'\ 17'', 65$.

Die in § 22 aufgestellten Formeln O und die in § 9 entwickelten Formeln $\operatorname{Sin} z = \operatorname{tg} w$, $z = \log.\operatorname{tg.}\left(45^0 + \frac{w}{2}\right)$ ergeben:

$\log \operatorname{Sin} z = \log \frac{M}{50} = \log g = 9{,}1762652$, also $w = 8^0\ 32'\ \ 2'',88$,

$z = 0{,}0649281$, $\frac{z}{3} = 0{,}0216427, \ldots\ldots\ldots w' = 2^0\ 51'\ 14'',76$,

$\log \operatorname{Sin} \frac{z}{3} = 8{,}6977059$, $\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} v = 8{,}9987359$, $v = 11^0\ 23'\ 17'', 54$. Mithin ist die Abweichung von den Barker'schen Tafeln $\varDelta = 0''\ 11$.

Rechnet man dieses Beispiel nach den neuen Tafeln, so erhält man, wenn dieselben nur auf sieben Stellen berechnet werden, $\log \operatorname{Sin} \frac{z}{3} = 8{,}6977051$ und $v = 11^0 23' 17'',48$, also ist die Abweichung jetzt noch grösser, nämlich $\varDelta = 0'', 17$. Dies liegt vorzugsweise daran, dass in dieser Gegend die z's wegen der voranstehenden 0 eigentlich nur sechsstellig sind. (S. dritten Anhang § 42.)

Beispiel 7. Comet 133. Hier ist $\log q = 8{,}9629523$. Es sei $t = 10{,}45694$ Tage. Also ist $\log M = 2{,}5351028$ und nach den Barker'schen Tafeln $v = 126^0\ 25'\ 34'',04$.

Durch unsre Formeln ergiebt sich: $\log \operatorname{Sin} z = 0{,}8361338$, $w = 81^0\ 42'\ 9'',629$, $z = 1{,}1394546$, $\frac{z}{3} = 0{,}3798182$, $w' = 44^0\ 43'\ 24'',374$,

$\log \operatorname{Sin} \frac{z}{3} = 9{,}9958073$, $\log \operatorname{tg} \frac{v}{2} = 0{,}2968373$. $v = 126^0 25' 33'',98$; $\varDelta = 0'',06$.

Siebenstellige Tafeln liefern dasselbe Resultat, wie die unmittelbare Benutzung der Formeln.

Beispiel 8. Der grosse Comet von 1843. Nr. 161. (Santini's Parabel.) (Vergl. vierten Anhang § 45.) Es ist $\log q = 7{,}90272$. Man sucht v für $t = 92$ Tage.

Da $\log M = 5{,}0698355$, so ist nach den Barker'schen Tafeln mit Benutzung der zweiten Differenzen: $v = 173^0\ 8'\ 29'',95$.

Dasselbe Resultat erhält man auch durch Bessel's Hilfstafel zu der Barker'schen Tafel. Nämlich aus dem dortigen $\sin w = \sqrt[3]{\frac{200}{M}}$ folgt $w = 173^0\ 8'\ 29'',63$ und dann aus der Hilfstafel $\delta = 0'',32$, folglich $v = 173^0\ 8'\ 29'',95$.

Bevor ich dieses Beispiel nach den neuen hyperbolischen Tafeln berechne, will ich erst die älteren Methoden daran prüfen.

1) Bessel in seinen Vorlesungen über Algebra, 1823, löste die Gleichung $x^3 = 3fx + 2g$ im reducibeln Falle, wenn f negativ ist, durch Hilfswinkel folgendermassen:*)

$x = 2\sqrt{-f} \,.\, \operatorname{cotg} 2u$, wo $\operatorname{tg} h = \frac{\sqrt{-f^3}}{g}$ und $\operatorname{tg} u = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{1}{2} h}$ ist.

Diese Gleichungen sind in die Lehren der Algebra von Baltrusch, 1847, pag. 99 übergegangen und durch Grunert 1852 in die astronomischen Nachrichten Nr. 805, pag. 210.

Aus $\log g = 3{,}3708655$ folgt mit Vernachlässigung der zweiten Differenzen $h = 0^0\ 1'\ 27'',81404$, $u = 3^0\ 25'\ 1'',162$,

$\log x = \log \operatorname{tg} \frac{v}{2} = 1{,}2224126$, $v = 173^0\ 8'\ 29'',86$, also $\Delta = 0'',09$.

2) Marth (astronomische Nachrichten 1856, Nr. 1016, pag. 118) giebt diesen Gleichungen eine etwas andere Gestalt, nämlich

$x = 2\sqrt{-f \,.\, \frac{\cos \psi^2}{\sin \psi}}$, wo $\operatorname{tg} h = \frac{\sqrt{-f^3}}{g}$ und $\sin \psi = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{1}{2} h}$ ist.

Von diesen Gleichungen sagt Marth, dass ihre Anwendung „wohl nur in solchen Fällen nicht unvortheilhaft sei, in welchen die Benutzung der Barker'schen Tafel weitläuftig wird, also nur bei grossem $\frac{g}{f}$." Da in unserm Beispiel $\frac{g}{f}$ sehr gross ist, so wird eine Berechnung desselben nach diesen etwas abgeänderten Formeln nicht uninteressant sein:

Es ergiebt sich $\log \sin \psi = 8{,}7760363$, $\psi = 3^0\ 25'\ 23'',35$; $2 \log \cos \psi = 9{,}9984490$; $\log x = 1{,}2224127$, $v = 173^0\ 8'\ 29'',87$, also doch wie vorhin $\Delta = 0'',09$.

*) Ist f positiv, so ist beiläufig $x = 2\sqrt{f} \,.\, \operatorname{cosec} 2u$, wo $\sin h = \frac{\sqrt{f^3}}{g}$ und $\operatorname{tg} u = \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{1}{2} h}$ ist

3) **Marth's** Absicht an der bezeichneten Stelle ist aber eigentlich, durch neue Hilfstafeln in Verbindung mit den **Zech**'schen Additionstafeln, wie ich schon in der Einleitung erwähnt habe, die kubischen Gleichungen im reducibeln Falle indirect zu lösen. Er bringt die Gleichung $x^3 + a\,x = b$ für den vorliegenden Fall, dass $\frac{b}{a^{\frac{3}{2}}} > 2$ ist, auf die Form:*)

$$\left(1 + \frac{1}{\frac{x^2}{a}}\right) \cdot \left(\frac{x^2}{a}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{b}{a^{\frac{3}{2}}}, \text{ oder } \left\{\frac{x^2}{a}\right\} \cdot \left(\frac{x^2}{a}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{b}{a^{\frac{3}{2}}}$$

Da $a = -3\,f$, $b = 2\,g$ ist, so ist für unser Beispiel $\log\left(\frac{b}{a^{\frac{3}{2}}}\right) = 2{,}9562135.5.$**)

Dafür giebt seine Hilfstafel zunächst $\log\left(\frac{x^2}{a}\right)$ zwischen 1,96 und 1,98 an, durch eine einfache Proportion findet er dann $\log\left(\frac{x^2}{a}\right)$ genauer zwischen 1,9677 und 1,9678. Für jeden dieser Werthe geben ihm die **Zech**'schen Additionstafeln das entsprechende $\log\left\{\frac{x^2}{a}\right\}$. Dadurch erhält er für $\log\left(\frac{b}{a^{\frac{3}{2}}}\right)$ folgende zwei Werthe, die den obigen wahren Werth einschliessen: 2,9562032 und 2,9563522.

Endlich giebt die Proportion $1490 : 103{,}5 = 1000 : \underline{69{,}4}$

$\log\left(\frac{x^2}{a}\right) = 1{,}9677069.4$, daher $\log x = \log \operatorname{tg} \frac{v}{2} = 1{,}2224141$,

$$v = 173^0\ 8'\ 29'',94; \text{ also ist nur } \varDelta = 0'',01.$$

4) Ich gehe nun dazu, über das vorliegende Beispiel nach den Formeln in § 9 zu berechnen.

Aus $\log g = \log \operatorname{Sin} z = \log \operatorname{tg} w = 3{,}3708655$ würde durch die **Hülsse**'schen Tafeln, die an dieser Stelle von 10 zu 10 Sekunden fortschreiten, und mit blosser Benutzung der hier **sehr grossen** ersten Differenzen folgen: $w = 89^0\ 58'\ 32'',08845$. Dies würde geben: $z = 3{,}6740297$, $\frac{z}{3} = 1{,}2246766$, $w' = 83^0\ 10'\ 37'',934$, $\log \operatorname{Sin} \frac{z}{3} = 0{,}9221011$, $\log \operatorname{tg} \frac{1}{2}\, v = 1{,}2231311$, $v = 173^0\ 9'\ 10'',58$, also $\varDelta = 40'',63$.

Um aber den **Anfang** der **Hülsse**'schen Tafeln, wo die Winkel von Sekunde zu Sekunde wachsen, benutzen zu können, beachte man, dass

$$\log \operatorname{cotg} w = -\log \operatorname{tg} w = 6{,}6291345 - 10 = \log \operatorname{tg} (90^0 - w) \text{ ist.}$$

---

*) Ist $\frac{b}{a^{\frac{3}{2}}} < 2$, so giebt er der kubischen Gleichung folgende Gestalt:

$$\left\{\frac{a}{x^2}\right\} \cdot \left(\frac{a}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{b}{a^{\frac{3}{2}}}, \text{ wo } 1 + \frac{1}{\frac{a}{x^2}} = \left\{\frac{a}{x^2}\right\} \text{ gesetzt ist.}$$

**) Der Punkt zwischen den letzten Ziffern (5.5) soll hier und in der Folge bei ähnlichen Gelegenheiten angeben, dass hinter demselben eine neue Reihe von Decimalstellen beginnt.

Dann findet man bei blosser Benutzung der ersten Differenzen:
$90^0 - w = 0^0\ 1'\ 27'',81404$, $w = 89^0\ 58'\ 32'',18596$,
$z = \log \operatorname{tg}\ (90^0 - 43'',90702) = -\log \operatorname{tg}\ 43'',90702 = 3,6718912$,
$\frac{z}{3} = 1,2239637$, $w' = 83^0\ 9'\ 57'',677$, $\log \operatorname{Sin} \frac{z}{3} = 0,9213826$,
$\log \operatorname{tg} \frac{v}{2} = 1,2224126$, $v = 173^0\ 8'\ 29'',86$, also doch noch $\varDelta = 0'',09$.

Bedenkt man aber, dass bei sehr kleinen Winkeln die entsprechenden Tangenten in geometrischem Verhältnisse wachsen, so erhält man folgende Resultate:
$90^0 - w = 0^0\ 1'\ 27'',81318$, $z = 3,6718953$, $w' = 83^0\ 9'\ 57'',752$,
$\log \operatorname{Sin} \frac{z}{3} = 0,9213840$, $v = 173^0\ 8'\ 29'',94$, also nur $\varDelta = 0'',01$.

5) Endlich wollen wir das Beispiel nach unsern neuen Tafeln berechnen.

Aus $\log \operatorname{Sin} z = 3,3708655$ findet man durch diese Tafeln und durch die Proportion: $511526 : 511525 = 106829 : p$, wo also $p = 106829$ ist,
$z = 3,6612126 + 106829 = 3,6718955$. Und wiederum aus $\frac{z}{3} = 1,2239652$ ergiebt sich durch die Proportion $10605 : 10209 = 10681 : p$, wo $p = 10282$ ist, dass
$\log \operatorname{Sin} \frac{z}{3} = 0,9023559 + 10282 = 0,9213841$ und dass folglich
$\log \operatorname{tg} \frac{v}{2} = 1,2224141$, $v = 173^0\ 8'\ 29'',94$, also auch nur $\varDelta = 0'',01$ ist.

Beispiel 9. Comet 177. $\log q = 8,6233972$, $t = 0,05$ Tage.

Aus $M = 5,296657$ folgt nach den Barker'schen Tafeln $v = 8^0\ 3'\ 57'',47$.

Die Lambert'schen Formeln in § 9 ergeben aus $\log \operatorname{Sin} z = 9,0250319$ zunächst $w = 6^0\ 2'\ 49'',094$, dann $z = 0,0459206$, $w' = 2^0\ 1'\ 8'',392$, $\log \operatorname{Sin} \frac{z}{3} = 8,5471930$, $v = 8^0\ 3'\ 57'',56$, also $\varDelta = 0'',09$.

Nach den neuen Tafeln, wenn sie durchweg nur auf sieben Stellen berechnet sind, ergiebt sich: $z = 0,0459206$, $\log \operatorname{Sin} \frac{z}{3} = 8,5471928$, $v = 8^0\ 3'\ 57'',54$, also $\varDelta = 0'',07$. (S. vierten Anhang, § 43.)

Beispiel 10. Bei demselben Cometen, den Hind schon am Tage seines Durchgangs durch das Perihel beobachtete, sucht man die wahre Anomalie für $t = 0,0007$ Tage.

Aus $M = 0,0741532$ folgt nach Barker's Tafeln $v = 0^0\ 6'\ 47'',87$.

Durch die Lambert'schen Formeln ergiebt sich aus $\log. \operatorname{Sin} z = 7,1711599$

bei blosser Benutzung der ersten Differenzen nach einander $\omega = 0^0\ 5'\ 5'',94327$, $z = 0,0006441$, $\omega' = 0^0\ 1'\ 41'',970$, $\log \text{Sin}\ \frac{z}{3} = 6,6937293$, $v = 0^0\ 6'\ 47''\ 58$, also $\varDelta = 0'',29$. Lässt man aber nicht ausser Acht, dass hier die ω so klein sind, dass die ihnen entsprechenden hyperbolischen Sinus mit ihnen im gleichen geometrischen Verhältnisse wachsen, so findet man $\omega = 0^0\ 5'\ 5'',9036$, z und ω' wie vorhin, $\log \text{Sin}\ \frac{z}{3} = 6,6940473$, $v = 0^0\ 6'\ 47'',88$, also nur $\varDelta = 0'',01$.

Nach den neuen Tafeln, wenn sie durchweg nur auf sieben Stellen berechnet sind und wenn man nur die ersten hier sehr grossen Differenzen bei log Sin in Betracht zieht, folgt $z = 0,0006441$, $\log \text{Sin}\ \frac{z}{3} = 6,6936563$, $v = 0^0\ 6'\ 47'',51$, also gar $\varDelta = 0'',36$. Beachtet man aber auch hier, dass bei kleinen hyperbolischen Sektoren und den zugehörigen Sinus das geometrische Verhältniss massgebend ist, so erhält man $z = 0,0006441.313$, $\log \text{Sin}\ \frac{z}{3} = 6,6939696$, $v = 0^0\ 6'\ 47'',81$, also $\varDelta = 0'',06$. (S. dritten Anhang § 42 und vierten Anhang § 43.)

---

§ 29. *Beispiel 11.* Ein prismatisches Haarröhrchen, dessen Querschnitt ein gleichschenkliges Dreieck ist, und ein cylindrisches Haarröhrchen, bei welchem der gegebene Radius des Querschnitts r ist, haben in diesen Querschnitten gleichen Umfang. Die Steighöhe soll beim prismatischen Röhrchen m mal grösser sein, als beim andern. Wie gross hat man die Seite (x) des gleichschenkligen Dreiecks und wie gross seine Basis (y) zu nehmen?

Auflösung. Wegen der gleichen Umfänge müssen die Volumina der über das Niveau gehobenen Flüssigkeiten gleich sein; also ist der Querschnitt beim Prisma $\frac{1}{m}$ des Querschnitts beim Cylinder. Wir haben daher die Gleichungen: $2\,r\,\pi = 2\,x + y$, $r^2\,\pi = m \,.\, \frac{y}{2} \,.\, \sqrt{x^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2}$; aus ihnen folgt: $y^3 - r\,\pi \,.\, y^2 + \frac{4\,r^3\,\pi}{m^2} = 0$. — Hat man die Gleichung $y^3 + 3\,\beta\,y^2 + \delta = 0$, so findet der für uns passende reducible Fall statt, wenn $-\beta^3 < \frac{\delta}{4}$ ist: es müsste also $m < \frac{3\sqrt{3}}{\pi}$ d. h. $< 1,6540$, oder es müsste $\frac{1}{m} > 0,60461$ sein*). Dieses ist aber nicht möglich, denn da unter den Dreiecken

*) Man vergleiche, was Euler in seiner Differenzial-Rechnung § 306 über die Grenzen von δ im reducibeln Falle sagt.

mit gleichem Umfang das gleichseitige an Inhalt ein Maximum ist, und da selbst der Inhalt eines **gleichseitigen** Dreiecks, das mit einem Kreise gleichen Umfang hat, nur $\frac{\pi}{3.\sqrt{3}} = 0,60461$ des Kreises ist, so ist der Inhalt eines **gleichschenkligen** Dreiecks, das mit einem Kreise gleichen Umfang hat, nothwendig weniger als 0,60461 des Kreises. Daher wird die Steighöhe beim Prisma stets mehr als 1,6540 mal grösser sein wie beim Cylinder mit gleichem Umfange. Die Praxis verlangt also, dass $m > \frac{3\sqrt{3}}{\pi}$ ist. Dann aber tritt der **irreducible** Fall ein, und weil unsere Gleichung die Beschaffenheit hat, dass die Summe der drei Wurzeln positiv und ihr Produkt negativ ist, so wird man zwei Wurzeln positiv und eine negativ finden, es werden sich also gewiss zwei verschiedene für die Praxis brauchbare Auflösungen ergeben. Setzen wir z. B. $m = 2$ und $r = 1$, so folgt aus der Gleichung

$y^3 - \pi y^2 + \pi = 0$, für welche $\beta = -\frac{\pi}{3}$, $\delta = \pi$ ist,

$$y = \begin{cases} \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} \cdot \cos\frac{z}{3} \\ \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \cdot \cos\left(60 \pm \frac{z}{3}\right) \end{cases} \text{ wobei } \cos z = -1 + \frac{27}{2 \cdot \pi^2} \text{ ist.}$$

Demnach ist $z = 68^0\ 25'\ 6''$ und $y = -0,88345 \mid = 1,30938 \mid = 2,71563,$
$x = 3,58331 \mid = 2,48690 \mid = 1,78388.$

Die Deutung der negativen Wurzel gehört in den zweiten Theil der Schrift: Ueber die allgemeine Giltigkeit mathematischer Formeln.

Da wir uns aber vorgenommen haben, nur solche Beispiele zu wählen, die auf den **reducibeln** Fall führen, so wollen wir, unbekümmert um den Erfolg, $m = 1$ setzen. Wir erhalten dann $\beta = -\frac{r \cdot \pi}{3}$, $\delta = 4 \cdot r^3 \pi$,

$$y = \begin{cases} \frac{r\pi}{3} - \frac{2r\pi}{3} \cdot \operatorname{Cos}\frac{z}{3} \\ \frac{r\pi}{3} - \frac{r\pi}{3}\left(-\operatorname{Cos}\frac{z}{3} \pm i\sqrt{3} \cdot \operatorname{Sin}\frac{z}{3}\right) \end{cases} \text{ wobei } \operatorname{Cos} z = -1 + \frac{54}{\pi \cdot \pi}.$$

Es ist also $\log \operatorname{Cos} z = 0,65044$, $z = 0,94593$,

$\log \operatorname{Cos}\frac{z}{3} = 0,10563$, $\log \operatorname{Sin}\frac{z}{3} = 9,89847$, und für $r = 1$ hat man:

$y = -1,6239$, auch $= 2,3828 \pm i \cdot 1,4357$; $(x = 3,9536.)$

Dass die einzige reelle Wurzel hier negativ werden musste, war vorher zu sehen. Wie ist es auch anders möglich, dass ein gleichschenkliges Dreieck, das mit einem Kreise gleichen Umfang hat, mit ihm auch gleichen Inhalt haben sollte? Auch der obige Aus-

druck $y = \frac{r\,\pi}{3} - \frac{2\,r\,\pi}{3}$. Cos $\frac{z}{3}$ spricht im Voraus dafür, da stets Cos $\frac{z}{3} > 1$ ist. Und endlich, wäre die einzige reelle Wurzel positiv $= p$, so würde, da die beiden imaginären Wurzeln die Form $q + r\,.\,i$ und $q - r\,.\,i$ haben, das Produkt aller drei Wurzeln positiv sein, $= (q^2 + r^2)\,.\,p$, was gegen die Voraussetzung ist*).

Beispiel 12. Dr. Wiegand (Die höheren bürgerlichen Rechnungsarten, 1850, pag. 17.) behandelt folgende Aufgabe: Jemand hat vier Eisenbahnaktien à 100 Thlr. in 4 Jahren hinter einander einzeln bezahlt und verkauft dieselben nach der letzten Einzahlung für 464 Thlr. Wie viel Procent (bei Zins von Zins) hat sein Geld getragen? Indem er die gesuchten Procente p nennt und $1 + \frac{p}{100} = e$ setzt, kommt er auf die Gleichung: $e^3 + e^2 + e - 3{,}64 = o$ und findet durch die bisher gebräuchlich gewesene Reduction und Einführung von zwei Hilfswinkeln **auf drei Octavseiten** $e = 1{,}1$ und $e = -1{,}05 \pm i\sqrt{2{,}21}$.

Da $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{3}$, $\gamma = \frac{1}{3}$, $\delta = -3{,}64$, also nicht $\beta^2 > \alpha\,\gamma$ ist, so erkennen wir sogleich, dass hier derjenige reducible Fall stattfindet, welcher durch die Formeln (R^I) gelöst ist. Nach diesen ist

$$e = \left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{2}\,.\,\text{Sin}\,\frac{z}{3} \\ -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{2}\,.\left(-\,\text{Sin}\,\frac{z}{3} \pm i\sqrt{3}\,\text{Cos}\,\frac{z}{3}\right)\end{array}\right\}, \text{ wobei Sin } z = \frac{27\,.\,0{,}974815}{\sqrt{2}} \text{ ist.}$$

Die neuen Tafeln geben $z = 1{,}57111$, log Sin $\frac{z}{3} = 0{,}18187$, log Cos $\frac{z}{3} = 0{,}25996$, also $e = 1{,}1$ und auch $= -1{,}05 \pm i\sqrt{2{,}20715}$.

Beispiel 13. Ein Prisma von 252 Kubikfuss anzufertigen, dessen Breite 3 und dessen Länge 5 Fuss mehr als die Höhe (x) beträgt.

Die hiebei zum Vorschein kommende Gleichung: $x^3 + 8\,x^2 + 15\,x - 252 = 0$, in welcher $\alpha = 1$, $\beta = \frac{8}{3}$, $\gamma = 5$, $\delta = -252$ ist, würde nach der in § 24 erwähnten Regel Newton's, weil sowohl $\beta^2 > \alpha\,\gamma$, als auch $\gamma^2 > \beta\,\delta$ ist, auf keine

*) Vorstehende Aufgabe für den Fall, dass $m = 1$ ist, findet sich in einer Sammlung physikalischer Aufgaben von Dr. Büchner in Hildburghausen, 1836, pag. 184, doch mit dem Unterschiede, dass Büchner nicht angenommen hat, dass die Querschnitte beider Röhren gleichen Umfang haben; dennoch kommt er durch die eine Proportion zwischen x und y, die ihm dann nur übrig bleibt, auf die beiden oben aufgestellten Gleichungen für x und y und ist so glücklich, indem er noch einige Fehler dazu macht, die einzige reelle Wurzel der kubischen Gleichung für y positiv ($y = 0{,}731$) zu finden. —

imaginären Wurzeln schliessen lassen. Dennoch ist sie reducibel, weil hier nicht $4 \,.\, (\alpha\gamma - \beta^2) \,.\, (\beta\delta - \gamma^2) > (\alpha\delta - \beta\gamma)^2$ ist. Auch hat schon Euler (Diff. § 323) bemerkt, dass nicht aus dem Vorhandensein jener Bedingungen, wohl aber aus der Abwesenheit einer jener Bedingungen ein sichrer Schluss zu ziehen ist. Man erhält durch die Formeln (R)

$$x = \left\{\begin{array}{l} -2\tfrac{2}{3} + 2 \,.\, \sqrt{2\tfrac{1}{9}} \,.\, \operatorname{Cos}\frac{z}{3} \\ -2\tfrac{2}{3} + \sqrt{2\tfrac{1}{9}}\left(-\operatorname{Cos}\frac{z}{3} \pm i\sqrt{3} \,.\, \operatorname{Sin}\frac{z}{3}\right) \end{array}\right\}, \text{ wobei } \operatorname{Cos} z = \frac{127\tfrac{1}{27}}{2\tfrac{1}{9} \,.\, \sqrt{2\tfrac{1}{9}}},$$

und durch die neuen Tafeln $z = 1{,}91812.5$, $\log \operatorname{Cos}\frac{z}{3} = 0{,}36062$, $\log \operatorname{Sin}\frac{z}{3} = 0{,}31486$, $x = 4$ und $x = -6 \pm 3\,i\sqrt{3}$. Probe: Aus $\operatorname{Cos}\frac{z}{3} = \frac{10}{\sqrt{19}}$ und $\operatorname{Sin}\frac{z}{3} = \frac{9}{\sqrt{19}}$ folgt, wie sich's gebührt, $\operatorname{Cos}\frac{z}{3}^2 - \operatorname{Sin}\frac{z}{3}^2 = 1$.

Beispiel 14. Das vorige Beispiel soll für den Fall berechnet werden, dass der Inhalt des Prisma's 352 Kubikfuss beträgt.

Hier ist $\operatorname{Cos} z = \frac{177\tfrac{1}{27}}{2\tfrac{1}{9}\sqrt{2\tfrac{1}{9}}}$, $z = 2{,}06229.5$, $\log \operatorname{Cos}\frac{z}{3} = 0{,}40435$, $\log \operatorname{Sin}\frac{z}{3} = 0{,}36769$, $x = 4{,}7062$ und $x = -6{,}3530 \pm 3{,}3880\, i \,.\, \sqrt{3}$.

Anderweitige Anwendungen der neuen Tafeln.

§ 30. Lambert (pag. 328) stellt sich folgende

Aufgabe: Aus Zenithdistanz (z), Polardistanz (p) und Stundenwinkel (t) die Höhe eines Gestirns (h) logarithmisch zu finden.

Es ist $\sin h = \cos z \,.\, \cos p + \sin z \sin p \,.\, \cos t$,

$= \sin z \,.\, \sin p \,.\, (\operatorname{cotg} z \,.\, \operatorname{cotg} p + \cos t)$.

1) Ist $\operatorname{cotg} z \,.\, \operatorname{cotg} q < 1$, so setze man es $= \sin f$, (wo beiläufig f den halben Tagebogen des Gestirns bedeutet) und der Gleichmässigkeit wegen $\cos t = \sin a$, wo also $a = 90^0 - t$ ist.

Dann ist die Klammer $\sin f + \sin a = .\ 2 \sin\left(\frac{f+a}{2}\right) . \cos\left(\frac{f-a}{2}\right)$.

Also $\sin h = 2 \sin z \sin p \sin\left(\frac{f+a}{2}\right) . \cos\left(\frac{f-a}{2}\right)$.

2) Ist aber $\operatorname{cotg} z \operatorname{cotg} p > 1$, d. h. bleibt das Gestirn ohne Unterlass über dem Horizont, so würde die Logarithmisirung zwar auch nach alter Art gelingen, aber

die erhaltene Formel würde, wie **Lambert** sagt, sein „plus prolixe en ce qu'elle contient trois termes variables et qu'il faut même prendre le quarré du troisième.“ Mit Hilfe der hyperbolischen Trigonometrie merkt man aber kaum den Unterschied. Man setze in diesem Falle $\operatorname{cotg} z \,.\, \operatorname{cotg} p = \operatorname{Sin} f$ und der Gleichmässigkeit wegen $\cos t = \operatorname{Sin} a$.

Dann ist die Klammer $\operatorname{Sin} f + \operatorname{Sin} a = 2 \operatorname{Sin}\left(\frac{f+a}{2}\right) . \operatorname{Cos}\left(\frac{f-a}{2}\right)$.

Also $\sin h = 2 \sin z \,.\, \sin p \,.\, \operatorname{Sin}\left(\frac{f+a}{2}\right) . \operatorname{Cos}\left(\frac{f-a}{2}\right)$.

Lambert fügt noch hinzu: Si pour cette hauteur il s'agit de calculer une Table, en supposant la déclinaison constante . . . le logarithme de $2 \sin z \,.\, \sin p$ est constant, ... (et on aura) par une simple addition le $\log \sin h$.

§ 31. **Aufgabe.** Aus $\log a$ und $\log b$ zu finden $\log (a \pm b)$.

1) Zu finden $\log (a - b)$, wo also $b < a$ ist.

Man schreibe $a - b = a\left(1 - \frac{b}{a}\right)$. Nun sei $\frac{b}{a} = \sin \varphi^2$.

Also ist $a - b = a \cos \varphi^2$ und $\log (a - b) = \log a + 2 \,.\, \log \cos \varphi$.

2) Zu finden $\log (a + b)$.

Es ist $a + b = a\left(1 + \frac{b}{a}\right)$; jetzt setze man $\frac{b}{a} = \operatorname{Sin} \varphi^2$.

Dann ist $a + b = a \operatorname{Cos} \varphi^2$ und $\log (a + b) = \log a + 2 \log \operatorname{Cos} \varphi$.

Kurz, es ist $\log (a - b) = \log. a + 2 \log \cos \varphi$, wobei $\sin \varphi = \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)}$ ist,

und $\log (a + b) = \log a + 2 \log \operatorname{Cos} \varphi$, wobei $\operatorname{Sin} \varphi = \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)}$ ist.

§ 32. **Aufgabe.** Man soll die quadratische Gleichung $x^2 + ax + b = 0$ durch Goniometrie auflösen.

Man setze $x = p + q \,.\, i$, $x_1 = p - q \,.\, i$. Dann ist nach den bekannten Beziehungen zwischen den gesuchten Wurzeln und den gegebenen Coefficienten der Gleichung: $2p = -a$, $p = -\frac{a}{2}$

$$p^2 + q^2 = b,\; q^2 = b - \left(\frac{a}{2}\right)^2,\; q = \pm \sqrt{b - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \pm\, i \,.\, \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

und $x = -\frac{a}{2} \pm i \sqrt{b - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$

$$= -\frac{a}{2}\left[1 \pm i \,.\, \sqrt{\frac{b}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} - 1}\right] = -\frac{a}{2}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{b}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}}\right]$$

1) Zunächst sei b positiv und kleiner als $\left(\frac{a}{2}\right)^2$.

Dann kann sein $\frac{\sqrt{b}}{\left(\frac{a}{2}\right)} = \sin\varphi$, wodurch $x = -a\left(\frac{1 \pm \cos\varphi}{2}\right) = -a \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2$ und auch $= -a \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2$ wird.

2) Es bleibe b positiv, aber es sei $b > \left(\frac{a}{2}\right)^2$.

Dann ist vorzuziehen $x = -\frac{a}{2}\left[1 \pm i \,.\, \sqrt{\frac{b}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} - 1}\right]$.

Nun sei $\frac{\sqrt{b}}{\left(\frac{a}{2}\right)} = \operatorname{Cos}\varphi$, so hat man $x = -\frac{a}{2}(1 \pm i \operatorname{Sin}\varphi)$.

3) Endlich sei b negativ $= -\beta$, so dass nun $x = -\frac{a}{2}\left\{1 \pm \sqrt{1 + \frac{\beta}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}}\right\}$ ist.

Man setze $\frac{\sqrt{\beta}}{\left(\frac{a}{2}\right)} = \operatorname{Sin}\varphi$, so ist

$x = -a\left(\frac{1 \pm \operatorname{Cos}\varphi}{2}\right) = -a\left(\frac{\operatorname{Cos}\varphi + 1}{2}\right)$ und auch $= a\left(\frac{\operatorname{Cos}\varphi - 1}{2}\right)$ und nach § 7 D

$x = -a \operatorname{Cos}\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2$, so wie auch $= a \operatorname{Sin}\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2$, wobei $\operatorname{Sin}\varphi = \frac{\sqrt{-b}}{\left(\frac{a}{2}\right)}$ ist.

§ 33. **Aufgabe A.** Man soll die reducirte biquadratische Gleichung $x^4 + a x^2 + b x + c = 0$ auflösen.

Auflösung. Ich setze wieder $x = p + q i \;\big|\; x_{II} = -p + q_I i$
$x_I = p - q i \;\big|\; x_{III} = -p - q_I i$.

Dann ist $a = -2p^2 + q^2 + q_I^2$, $b = 2p.(q^2 - q_I^2)$, $c = p^4 + p^2(q^2 + q_I^2) + q^2 q_I^2$.
Hieraus ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} q^2 &= \frac{a + 2p^2 + \frac{b}{2p}}{2} \\ q_I^2 &= \frac{a + 2p^2 - \frac{b}{2p}}{2} \end{aligned}\right\}, \; c = 4p^4 + 2ap^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{16 . p^2}, \text{ oder } p^2 = \xi \text{ gesetzt}$$

$$\xi^3 + \frac{a}{2} . \xi^2 + \left[\left(\frac{a}{4}\right)^2 - \frac{c}{4}\right] . \xi - \left(\frac{b}{8}\right)^2 = 0.$$

Dieser neue Weg, von der reducirten biquadratischen Gleichung zu der auflö-

senden kubischen Gleichung zu gelangen, scheint mir neben den Methoden von Ferrari, Descartes, Euler, Waring, Schlömilch (in seiner Zeitschrift 1861, pag. 49) einige Beachtung zu verdienen.

Reducirt man die Resolvente, indem man $\xi = Z - \frac{a}{6}$ setzt, so erhält man

$$Z^3 - \left(\frac{a^2}{48} + \frac{c}{4}\right) Z - \left(\frac{a^3}{864} - \frac{a\,c}{24} + \frac{b^2}{64}\right) = 0, \text{ oder } Z^3 = 3\,f\,Z + 2\,g.$$

Jeder der drei Werthe von Z und ξ, die nach Umständen entweder durch die cyklische oder durch die hyperbolische Trigonometrie leicht zu finden sind, reicht bekanntlich hin, um die Aufgabe vollständig zu lösen. Zwar giebt jeder Werth von ξ zwei Werthe von p; da dieselben aber nur im Vorzeichen verschieden sind, so würden dadurch einerseits nur q^2 und q_1^2 vertauscht werden, andererseits würde dadurch nur das erste Wurzelpaar in das zweite übergehen und umgekehrt. Es bedarf wohl kaum der Erinnerung, dass p, q, q_1 nach Umständen reell, imaginär oder complex sein werden, aber schliesslich werden die vier Wurzeln stets unter Formen erscheinen, die der Aufgabe gemäss sind.

Man könnte die Resolvente auch unmittelbar mit der in § 24 und 25 behandelten Gleichung $\alpha\,\xi^3 + 3\,\beta\,\xi^2 + 3\,\gamma\,\xi + \delta = 0$ in Beziehung bringen, indem man $\alpha = 1, \beta = \frac{a}{6}, \gamma = \frac{\left(\frac{a}{4}\right)^2 - \frac{c}{4}}{3}, \delta = -\left(\frac{b}{8}\right)^2$ setzt; weil man sich dann aber Ausdrücke wie $\beta^2 - \alpha\,\gamma$, und $-\frac{\alpha}{2}(\alpha\,\delta - \beta\,\gamma) - \beta\,(\beta^2 - \alpha\,\gamma)$ berechnen müsste, so käme man auf die oben befindlichen Coefficienten der Gleichung für Z, nämlich auf $3\,f$ und $2\,g$ zurück.

Aufgabe B. Es soll die allgemeine biquadratische Gleichung $x^4 + k\,x^3 + l\,x^2 + m\,x + n = 0$ aufgelöst werden.

Bekanntlich wurde früher die Gleichung erst reducirt, indem man sie durch die Annahmen $z = x + \frac{k}{4}, a = l - \frac{3\,k^2}{8}, b = m - \frac{k\,l}{2} + \frac{k^3}{8}, c = n - \frac{k\,m}{4} + \frac{k^2\,l}{16} - \frac{3\,k^4}{256}$ auf die Form $z^4 + a\,z^2 + b\,z + c = 0$ brachte; zu der reducirten Gleichung wurde dann nach den verschiedenen Methoden die Resolvente gesucht, und diese Resolvente abermals reducirt, wodurch sie auf die Form $Z^3 + P\,Z + Q = 0$ kam.

Diesen langen Weg kürzte Strehlke (in dem Programm der Realschule zu St. Petri in Danzig vom Jahre 1840, pag. 5), an die Methode Euler's anknüpfend,

nach welcher die Resolvente $\zeta^3 + 2\,a\,\zeta^2 + (a^2 - 4\,c)\,\zeta - b^2 = 0$ heisst, und deren drei Wurzeln $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2$ die Bedeutung haben, dass $\zeta_0 = 4\,u^2$, $\zeta_1 = 4\,v^2$, $\zeta_2 = 4\,w^2$ ist und wo dann $z = u + v + w$ ist, dadurch nicht unbedeutend ab, dass er P und Q unmittelbar durch die gegebenen Coefficienten k, l, m, n ausdrückte, nämlich:
$P = -\frac{l^2}{3} + k\,m - 4\,n,\; Q = -\frac{2}{27}\,l^3 + \frac{n\,.\,(8\,l - 3\,k^2)}{3} - m^2 + \frac{k\,l\,m}{3}.$

Nachdem er nun im irreducibeln Fall durch Einführung eines Hilfswinkels, im reducibeln Fall auf die bisher üblich gewesene Weise durch Einführung zweier Hilfswinkel zur Kenntniss der drei Werthe von Z und ζ gelangt war, ergaben sich ihm leicht die vier Werthe von z und x.

Aufgabe C. Die allgemeine biquadratische Gleichung

$$x^4 + 8\,\varkappa\,x^3 + 12\,\lambda\,x^2 + 8\,\mu\,x + 2\,\nu = 0$$

soll mit Benutzung der in A mitgetheilten Methode und des in B angegebenen abgekürzten Verfahrens gelöst werden.

Man bringe die Gleichung, indem man $x = z - 2\,\varkappa$, $a = 12\,(\lambda - 2\,\varkappa^2)$, $b = 8\,(\mu - 6\,\varkappa\,\lambda + 8\,\varkappa^3)$, $c = 2\,(\nu - 8\,\varkappa\,\mu + 24\,\varkappa^2\,\lambda - 24\,\varkappa^4)$ setzt, auf die Form: $z^4 + a\,z^2 + b\,z + c = 0$. Nimmt man nun wieder an, dass $z = p \pm q\,i$ und auch $= -p \pm q_1\,i$ und $p^2 = \xi$ ist, so hat man zur Bestimmung von p, q, q_1 folgende Gleichungen:
$\xi^3 + \frac{a}{2}\,\xi^2 + \left[\left(\frac{a}{4}\right)^2 - \frac{c}{4}\right]\xi - \left(\frac{b}{8}\right)^2 = 0,\; q^2 = \frac{a}{2} + p^2 + \frac{b}{4\,p},\; q_1^{\,2} = \frac{a}{2} + p^2 - \frac{b}{4\,p}.$

Die erste dieser drei Gleichungen kommt durch die Annahme $\xi = Y - \frac{a}{6}$ auf die Form: $Y^3 + H\,.\,Y + J = 0$, in welcher
$H = -2\,\lambda^2 + 4\,\varkappa\,\mu - \frac{\nu}{2}$ und $J = -2\,\lambda^3 + \lambda\,\nu - 2\,\varkappa^2\,\nu - \mu^2 + 4\,\varkappa\,\lambda\,\mu$ ist.

Da nun Y unter allen Umständen durch die Formeln B in § 26 leicht gefunden werden kann, so ist die Aufgabe als gelöst zu betrachten.

Ich bemerke noch, dass $\xi = \frac{\zeta}{4}$, $Y = \frac{Z}{4}$, $H = \frac{P}{16}$, $J = \frac{Q}{64}$ ist, wenn man $k = 8\,\varkappa$, $l = 12\,\lambda$, $m = 8\,\mu$, $n = 2\,\nu$ voraussetzt.

§ 34. Aufgabe. Man soll Gleichungen des fünften Grades von folgender Form $x^5 - a\,x^3 + \frac{a^2}{5}\,x + b = 0$ auflösen, wobei a und b positiv oder negativ sein mögen.

Auflösung. Geht man von arithmetischen Betrachtungen aus, indem man $x = y + \frac{a}{5\,y}$ setzt, so erhält man folgende Gleichung aufzulösen: $y^{10} + b\,.\,y^5 + \left(\frac{a}{5}\right)^5 = 0$. Dadurch wird, wenn man $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{5}\right)^5} = R$, $\sqrt[5]{-\frac{b}{2} + R} = p$, $\sqrt[5]{-\frac{b}{2} - R} = q$ setzt,

$$x = \begin{cases} p + q \\ (p + q) \, . \cos \; 72^0 + (p - q) \, . \, i \, . \sin \; 72^0 \\ (p + q) \, . \cos 144^0 + (p - q) \, . \, i \, . \sin 144^0 \\ (p + q) \, . \cos 216^0 + (p - q) \, . \, i \, . \sin 216^0 \\ (p + q) \, . \cos 288^0 + (p - q) \, . \, i \, . \sin 288^0 \end{cases}$$

Da man hierbei aber doch bald in die Trigonometrie hineingreifen muss, andererseits aber, wenigstens scheinbar, im Stiche gelassen wird, wenn $\left(\frac{b}{2}\right)^2 < \left(\frac{a}{5}\right)^5$ ist, so ist es, auch abgesehen davon, dass $(p+q)$ und $(p-q)$ sehr unlogarithmisch sind, gewiss gerathener, von vorne herein seine Zuflucht zur Trigonometrie zu nehmen.

Setzt man nämlich: $\sin \varphi = u$, $\cos \varphi = v$, so ist bekanntlich:

$$\left.\begin{array}{l} \sin 5\varphi = 16 \, . \, u^5 - 20 u^3 + 5 \, . \, u \\ \cos 5\varphi = 16 \, . \, v^5 - 20 v^3 + 5 \, . \, v \end{array}\right\} ; \left\{\begin{array}{l} u^5 - \frac{5}{4} u^3 + \frac{5}{16} u - \frac{\sin z}{16} = 0, \text{ wo } u = \sin \frac{z}{5} \\ v^5 - \frac{4}{5} v^3 + \frac{5}{16} v - \frac{\cos z}{16} = 0, \text{ wo } v = \cos \frac{z}{5} \end{array}\right.$$

Ebenso erhält man mit Benutzung der Formeln A, B, C und § 7, wenn man $\operatorname{Sin} \varphi = U$, $\operatorname{Cos} \varphi = V$ annimmt:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{Sin} 5\varphi = 16 \, . \, U^5 + 20 \, U^3 + 5 \, . \, U \\ \operatorname{Cos} 5\varphi = 16 \, . \, V^5 - 20 \, V^3 + 5 \, . \, V \end{array}\right\} ; \left\{\begin{array}{l} U^5 + \frac{5}{4} U^3 + \frac{5}{16} U - \frac{\operatorname{Sin} z}{16} = 0, \text{ wo } U = \operatorname{Sin} \frac{z}{5} \\ V^5 - \frac{5}{4} V^5 + \frac{5}{16} V - \frac{\operatorname{Cos} z}{16} = 0, \text{ wo } V = \operatorname{Cos} \frac{z}{5}. \end{array}\right.$$

Wenn man nun in der vorgelegten Gleichung des fünften Grades $x = m \, . \, y$ setzt, so geht sie in folgende über: $y^5 - \frac{a}{m^2} y^3 + \frac{a^2}{5 \, . \, m^4} y + \frac{b}{m^5} = 0.$

Diese Gleichung hält unter den angenommenen und anzunehmenden Voraussetzungen stets mit einer oder der anderen der vier aufgestellten Gleichungen den Vergleich aus.

1) Es sei $\left(\frac{b}{2}\right)^2 < \left(\frac{a}{5}\right)^5$. In diesem (gleichsam) irreducibeln Falle kann man nach Belieben sich einer der beiden ersten Gleichungen bedienen.

Stellt man die Gleichung für y mit der Gleichung für v zusammen, so ergiebt sich:

$$m = 2 \, . \sqrt{\frac{a}{5}}, \; \cos z = \frac{-\left(\frac{b}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{a}{5}\right)^5}}, \; y = v = \cos \frac{z}{5} \text{ und}$$

$$x = 2 \, . \sqrt{\left(\frac{a}{5}\right)} \, . \, \cos \frac{z}{5}, = 2 \, . \sqrt{\left(\frac{a}{5}\right)} \, . \cos \left(72^0 \pm \frac{z}{5}\right),$$
$$= -2 \, . \sqrt{\left(\frac{a}{5}\right)} \, . \cos \left(36^0 \pm \frac{z}{5}\right)$$

Stellt man aber die Gleichung für y mit der Gleichung für u zusammen, so hat

man: $m = 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{5}}$, $\sin z = \frac{-\left(\frac{b}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{a}{5}\right)^5}}$, $y = u = \sin\frac{z}{5}$ und

$$x_1 = 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{5}} \cdot \sin\frac{z}{5},\ x_2 = 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{5}} \cdot \sin\left(36^0 - \frac{z}{5}\right),\ x_3 = 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{5}} \cdot \sin\left(72^0 + \frac{z}{5}\right),$$

$$x_4 = -2 \cdot \sqrt{\frac{a}{5}} \cdot \sin\left(72^0 - \frac{z}{5}\right),\ x_5 = -2 \cdot \sqrt{\frac{a}{5}} \cdot \sin\left(36^0 + \frac{z}{5}\right)$$

2) Es sei $\left(\frac{b}{2}\right)^2 > \left(\frac{a}{5}\right)^5$. In diesem (gleichsam) reducibeln Falle kann a positiv oder negativ sein.

Bleibt a wie bisher positiv, so stelle man die Gleichung für y mit der Gleichung für V zusammen. Dann ist

$$m = 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{5}},\ \operatorname{Cos} z = \frac{-\left(\frac{b}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{a}{5}\right)^5}},\ y = V = \operatorname{Cos}\frac{z}{5} \text{ und}$$

$$x = \begin{Bmatrix} 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{5}} \cdot \operatorname{Cos}\frac{z}{5} \\ 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{5}} \cdot \operatorname{Cos}\left(i \cdot 72^0 \pm \frac{z}{5}\right) \\ -2 \cdot \sqrt{\frac{a}{5}} \cdot \operatorname{Cos}\left(i \cdot 36^0 \pm \frac{z}{5}\right) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{5}} \cdot \operatorname{Cos}\frac{z}{5} \\ 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{5}}\left[\operatorname{Cos}\frac{z}{5} \cdot \cos 72^0 \pm i \cdot \operatorname{Sin}\frac{z}{5} \cdot \sin 72^0\right] \\ 2 \cdot \sqrt{\frac{a}{5}}\left[-\operatorname{Cos}\frac{z}{5} \cdot \cos 36^0 \pm i \cdot \operatorname{Sin}\frac{z}{5} \cdot \sin 36^0\right] \end{Bmatrix}$$

Ist aber a negativ, so bringe man die Gleichung für y mit der Gleichung für U dadurch in Uebereinstimmung, dass man

$m = 2 \cdot \sqrt{-\frac{a}{5}}$, $\operatorname{Sin} z = \frac{-\left(\frac{b}{2}\right)}{\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^5}}$ setzt. Dann wird $y = U = \operatorname{Sin}\frac{z}{5}$ und

$$x = \begin{Bmatrix} 2 \cdot \sqrt{-\frac{a}{5}} \cdot \operatorname{Sin}\frac{z}{5} \\ 2 \cdot \sqrt{-\frac{a}{5}} \cdot \operatorname{Sin}\left(i \cdot 36^0 - \frac{z}{5}\right) \\ 2 \cdot \sqrt{-\frac{a}{5}} \cdot \operatorname{Sin}\left(i \cdot 72^0 + \frac{z}{5}\right) \\ -2 \cdot \sqrt{-\frac{a}{5}} \cdot \operatorname{Sin}\left(i \cdot 72^0 - \frac{z}{5}\right) \\ -2 \cdot \sqrt{-\frac{a}{5}} \cdot \operatorname{Sin}\left(i \cdot 36^0 + \frac{z}{5}\right) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \cdot \sqrt{-\frac{a}{5}} \cdot \operatorname{Sin}\frac{z}{5} \\ 2 \cdot \sqrt{-\frac{a}{5}} \cdot \left[\operatorname{Sin}\frac{z}{5} \cdot \cos 72^0 \pm i \cdot \operatorname{Cos}\frac{z}{5} \cdot \sin 72^0\right] \\ 2 \cdot \sqrt{-\frac{a}{5}} \cdot \left[-\operatorname{Sin}\frac{z}{5} \cdot \cos 36^0 \pm i \cdot \operatorname{Cos}\frac{z}{5} \cdot \sin 36^0\right]. \end{Bmatrix}$$

Gleichungen dieser Art, selbst höherer Grade, hat schon Moivre arithmetisch behandelt (Newton's Arithm. univers. pag. 270. 1732), doch haben seine Gleichungen nur einen willkürlichen Coefficienten (b); so ist z. B. sein a bei Gleichungen fünften Grades immer $= -\frac{5}{4}$.

Erster Anhang.

§ 35. Um bei den wesentlichen Theilen der Abhandlung so wenig wie möglich vorauszusetzen, folge hier noch eine Entwickelung der in § 7 aufgestellten Formel für den asymptotischen Raum A.

1) Innerhalb des rechten Winkels $A\,B\,C$ befinde sich der von den krummen Linien $A\,K\,C$ und $A\,L\,D$ und der geraden Linie $C\,D$ eingeschlossene Raum P. Man ziehe unmittelbar an einander senkrechte Ordinaten wie $F\,J$, $K\,N$ etc., mache $C\,D = E\,B$, $F\,G = H\,J$, $K\,L = M\,N$ etc., so ist klar, dass der dadurch entstandene Raum $A\,M\,E\,B$ oder $Q = P$ ist, da die integrirenden Theile beider Flächen, die kleinen Trapeze beziehungsweise gleich sind. Fig. 5.

2) Innerhalb des rechten Winkels $A\,B\,C$ sind die krummen Linien $A\,H\,C$, $A\,J\,D$ und $A\,K\,E$ gezogen, durch welche die Räume $A\,C\,D = P$, $A\,D\,E = Q$ und $A\,E\,B = R$ hervorgebracht werden, welche zusammen die Fläche $A\,H\,C\,B$ ausmachen. Man ziehe wieder Ordinate an Ordinate, beispielsweise $H\,N$, mache an jeder Ordinate $H\,J = N\,M$, $J\,K = N\,L$ und ziehe die dadurch hervorgebrachten krummen Linien $A\,M\,G$ und $A\,L\,F$. Bezeichnet man nun den Flächeninhalt von $A\,M\,G\,B$ durch S, und den von $A\,L\,F\,B$ durch T, so ist $A\,H\,C\,B = S + T + R$. Fig. 6.

3) Innerhalb des rechten Winkels $A\,B\,C$ sind die krummen Linien $A\,F\,C$ und $A\,G\,D$ gezogen. Es sei die Fläche $A\,F\,C\,B = P$, $A\,F\,C\,D = Q$ und $A\,G\,D\,B = R$, so dass $P - Q = R$ ist. Man ziehe unendlich viele Ordinaten neben einander, z. B. $F\,J$, mache auf jeder derselben den obern Theil $F\,G$ gleich dem untern Theil $H\,J$ und ziehe die Kurve $A\,H\,E$. Ist nun der Inhalt von $A\,H\,E\,B = S$, so folgt, dass $R = P - S$ ist. Fig. 7.

4) Zwischen den Schenkeln des rechten Winkels $A\,B\,C$ sind ausser der Curve $A\,D$ noch die Curven $A\,C$, $A\,F$, $A\,G$, $A\,E$ gezogen. Es sei $A\,D\,B = M$, $A\,C\,B = N$, $A\,C\,E = P$, $A\,E\,F = Q$, $A\,F\,G = R$, $A\,G\,D = S$. So wie nun die Ordinate $B\,D = B\,C - C\,E + E\,F - F\,G + G\,D$ ist, so ist auch die Fläche $M =$ Fig. 8.

$N - P + Q - R + S$. Macht man nun $CE = BH$, $EF = BJ$, $FG = BK$, $GD = BL$, und wiederholt Aehnliches bei sämmtlichen Ordinaten und setzt die Fläche $AHB = p$, $AJB = q$, $AKB = r$, $ALB = s$, so ist auch $M = N - p + q - r + s$.

Fig. 9. 5) Es sei ABC eine Curve, deren Gleichung $y^n = \alpha \,.\, x$ ist, so dass also $y^n : y_1^n = x : x_1$.

Der Punkt B habe die Coordinaten x und y und BC sei unendlich klein. Das Increment der Abscisse AE, nämlich $EF = BD$, sei d und das Increment der Ordinate BE, nämlich DC, sei δ. Dann ist $y^n : (y + \delta)^n = x : x + d$.

Weil aber $(y + \delta)^n = y^n + n \,.\, y^{n-1}\delta + \ldots$ ist, so haben wir:

$$y^n : n \,.\, y^{n-1}\delta = x : d, \text{ oder } y : n\delta = x : d, \text{ oder } y \,.\, d = n \,.\, x \,.\, \delta$$

d. h. $BDFE = n \,.\, BGHK$.

Folglich ist die Summe aller solcher Rechtecke, wie $BDFE$, gleich der n-fachen Summe aller der Rechtecke, von denen $BGHK$ eins ist; es ist $ABCF = n \,.\, ABCH$ oder $Y = n \,.\, X$.

Nun ist aber $X + Y = AF \,.\, FC = x \,.\, y$, also $X = \frac{x \,.\, y}{n+1} = \frac{1}{\alpha} \,.\, \frac{y^{n+1}}{n+1}$.

Ist also $x = \frac{1}{\alpha} \,.\, y^n = f \,.\, y^n$, so ist $X = \frac{1}{\alpha} \,.\, \frac{y^{n+1}}{n+1} = f \,.\, \frac{y^{n+1}}{n+1}$.

Anmerkung. Würde man noch für den Punkt B die Tangente und Subtangente (σ) ziehen, so würde sich durch eine neue Proportion ergeben, dass $\sigma = n\,x$ ist.

Fig. 8. 6) Wenn nun wieder alles wie in Nr. 4 angenommen wird, ausserdem eine beliebige Abscisse, etwa AB, mit x bezeichnet wird und die zugehörige Ordinate BD mit y, und wenn es sich dann herausstellen sollte, dass die additiven und subtractiven Bestandtheile von y Functionen von x sind und zwar in der Art, dass $BC = \alpha$, $BH = \beta\,x$, $BJ = \gamma\,x^2$, $BK = \delta\,x^3$, $BL = \varepsilon\,x^4$ etc. ist, kurz, wenn $y = \alpha - \beta\,x + \gamma\,x^2 - \delta\,x^3 + \varepsilon\,x^4 - \ldots$ wäre, so würde die den Ordinaten y entsprechende Fläche ABD oder M, so würde

$$Y = \alpha\,x - \beta\frac{x^2}{2} + \gamma\frac{x^3}{3} - \delta \,.\, \frac{x^4}{4} + \varepsilon \,.\, \frac{x^5}{5} - \ldots \text{ sein.}$$

Fig. 10. § 36. Nach diesen Vorbereitungen gehe ich zum Gegenstande selbst über. Die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel, auf die Asymptoten bezogen, ist $CD \,.\, BD = AE^2 = CE^2$ oder $u \,.\, o = c^2$.

Nun sei $u = \begin{cases} m \,.\, c + \xi \\ CH + HD \end{cases} \ldots$ wo m irgend eine ganze Zahl und $\xi < m.c$ ist.

Jetzt ist

$$o = c^2 \cdot \frac{1}{m \cdot c + \xi} = c^2 \cdot \left[\frac{1}{m \cdot c} - \frac{\xi}{(m \cdot c)^2} + \frac{\xi^2}{(m \cdot c)^3} - \frac{\xi^3}{(m \cdot c)^4} + \frac{\xi^4}{(m \cdot c)^5} - \dots\dots\right]$$

Nennt man den Raum $H\,D\,B\,F = O$, so ist mit specieller Benutzung von § 29, Nr. 4, 5 und 6

$$O = c^2 \cdot \left[\left(\frac{\xi}{m\,c}\right) - \tfrac{1}{2} \cdot \left(\frac{\xi}{m\,c}\right)^2 + \tfrac{1}{3} \cdot \left(\frac{\xi}{m\,c}\right)^3 - \tfrac{1}{4} \cdot \left(\frac{\xi}{m\,c}\right)^4 + \tfrac{1}{5} \cdot \left(\frac{\xi}{m\,c}\right)^5 - \dots\right]$$

$$= c^2 \operatorname{Log}\left(1 + \frac{\xi}{m\,c}\right) = c^2 \operatorname{Log}\left(\frac{u}{m\,c}\right).$$

Wer nun den ganzen asymptotischen Raum $A\,E\,D\,B = A$ haben will, den Gebrauch der Formel für O aber mit Recht verschmäht, sobald die Reihe zu divergiren beginnt, der mache $C\,E = E\,J$, $C\,J = J\,L \dots C\,L = L\,H$, ziehe die entsprechenden Ordinaten $A\,E$, $K\,J$, $M\,L \dots F\,H$, berechne die einzelnen Räume $A\,E\,J\,K = B$, $K\,J\,L\,M = C \dots\dots M\,L\,H\,F = N$ besonders, addire sie und füge dann erst den Raum O hinzu.

Hiebei ist $C\,E = 2^0 \cdot c$, $C\,J = 2^1 \cdot c$, $C\,L = 2^2 \cdot c, \dots\dots C\,H = 2^\mu \cdot c$, so dass das frühere $m = 2^\mu$ ist.

Setzt man in die Formel für O successive $m = 1, 2, 4, 8 \dots\dots 2^{\mu - 1}$, und $\xi =$ dem jedesmaligen $m\,c$, so erhält man

1) $B = c^2 \cdot \operatorname{Log} 2$, 2) $C = c^2 \cdot \operatorname{Log} 2$, 3) $D = c^2 \cdot \operatorname{Log} 2, \dots\dots \mu)$ $N = c^2 \cdot \operatorname{Log} 2$.

Also ist $B + C + D + \dots\dots N = c^2 \cdot \mu \cdot \operatorname{Log} 2 = c^2 \cdot \operatorname{Log} 2^\mu = A\,E\,H\,F$.

Fügt man hiezu noch $B\,D\,H\,F = O = c^2 \operatorname{Log}\left(1 + \frac{\xi}{2^\mu \cdot c}\right)$, so hat man

$A\,E\,D\,B = A = c^2 \operatorname{Log}\left(2^\mu + \frac{\xi}{c}\right) = c^2 \cdot \operatorname{Log}\left(\frac{CH + HD}{c}\right)$ d. h. $A = c^2 \operatorname{Log}\left(\frac{u}{c}\right)$, wie in § 7 angenommen wurde.

Wer die Reihe für O auch dann nicht mehr gelten lassen will, wenn $\xi = m\,c$ ist, der theile noch das Intervall $E\,J$, etwa in zwei gleiche Stücke und schreite demgemäss weiter fort.

Wäre die Hyperbel keine gleichseitige, so hätte man $B\,D = o$ noch mit dem cyklischen Sinus des Asymptotenwinkels, also mit sin C zu multipliciren, und dann käme auch in den Ausdruck für O und A dieser Factor hinein.

Zweiter Anhang.

(Zur Construction der neuen Tafeln.)

§ 37. Sowie die alten Tafeln für cyklische Functionen an den Stellen, wo die Differenzen sehr klein oder sehr gross ausfallen, unsicher oder beschwerlich sind, so leiden, wie wir bei einigen Beispielen in § 28 gesehen haben, auch die neuen Tafeln für hyperbolische Functionen an demselben Fehler. Wir haben daher in Bezug auf die letztern Mittel anzugeben, um diesem Uebelstande abzuhelfen.

Zunächst zeigte sich, wie ungenau die Resultate dadurch werden können, dass für kleine ω die ersten Stellen der zugehörigen z verschwinden, diese z daher nicht die vorgeschriebene Anzahl geltender Decimalstellen haben, und dass folglich die in gleicher Linie stehenden Sin z und z sich nicht vollständig entsprechen. Da nun aber aus den vorhandenen alten Tafeln durch die in § 9 entwickelte Formel $z = \text{Log tg}\,(45^0 + \frac{1}{2}\omega)$, wie sie für die Theorie bequemer ist, oder $z^1 = \log \text{tg}\,(45^0 + \frac{1}{2}\omega)$, wie sie Lambert für die Praxis eingerichtet hat, sich keine genauern z ergeben, so lange ω klein bleibt, so wollen wir uns in folgender Art helfen.

Bezeichnen wir $\text{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right)$ mit t, so ist bekanntlich $\text{tg}\left(45^0 + \frac{\omega}{2}\right) = \frac{1+t}{1-t}$ und da $\text{Log}\,\frac{1+t}{1-t} = 2\,.\left(t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + \ldots\right)$ ist, so erhalten wir für die Praxis $z^1 = 2\,.\,M\,.\left(t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + \ldots\right)$, während für die Theorie $z = 2\,.\left(t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + \ldots\right)$ ist. Die zu den kleinen ω gehörenden z müssen also nach dieser Formel berechnet werden, und je kleiner dabei ω ist, desto weniger Glieder dieser Reihe werden genügen, um einen scharf ausgeprägten Werth von z zu erhalten.

Wir nehmen nun aus § 28 das sechste Beispiel (Comet 156), wo noch eine Abweichung von 0'',11 bis 0, 17 von den Barker'schen Tafeln sich zeigte, wieder auf. Vermittelst der neuen z^1-Formel erhalten wir:

ω	z'	*Diff.*	*log Cos z*	*log Sin z*	*Diff.*
2⁰ 51' 10''	0,0216325.9	211.1	0,0005385	8,6975044	4234
2⁰ 51' 20''	0,0216537.0		0,0005396	8,6979278	
8⁰ 32'	0,0649220.0	1277.6	0,0048346	9,1762239	8601.
8⁰ 33'	0,0650497.6		0,0048536	9,1770840	

Jetzt ergiebt sich aus $\log \text{Sin}\, z = 9{,}1762652$ durch eine Proportion $z^1 = 0{,}0649281.4$ und aus $\frac{z'}{3} = 0{,}0216427.1$ durch eine andere Proportion $\log \text{Sin}\,\frac{z}{3} = 8{,}6977074$,

und daraus die wahre Anomalie $v = 11^{0}\ 23'\ 17'',69$, so dass die Abweichung von dem durch die Barker'schen Tafeln gewonnenen Resultate nur noch $\varDelta = 0'',04$ beträgt.

§ 38. Auch die Cos z können durch den unmittelbaren Gebrauch der Formel Cos z = sec ω für kleine ω nur mangelhaft gefunden werden. Man setze daher $\cos \omega = 1 - \left(\frac{\omega^2}{1.2} - \frac{\omega^4}{1.2.3.4} + \frac{\omega^6}{1.2.3.4.5.6}\right)$. Weil nun $\log(1-y) = -M\left(y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \ldots\right)$ ist, so haben wir: $\log \operatorname{Cos} z = M \cdot \frac{\omega^2}{2} \cdot \left(1 + \frac{\omega^2}{6} + \frac{2 \cdot \omega^4}{45}\right)$, wobei nach § 5 für den Kreisbogen ω zu setzen ist $\frac{\pi}{180 \cdot 60 \cdot 60} \cdot \omega''$, wenn ω'' die Anzahl der Sekunden bedeutet, die der Hilfswinkel ω enthält.

Aber auch solche genauen Tafeln mit 7 geltenden Ziffern für z und log Cos z würden noch keine genauen Resultate liefern, wenn man aus dem gegebenen, wenig von 1 verschiedenen Cos z durch die gewöhnlichen Tafeln log Cos z ableiten und dann mit den neuen Tafeln vergleichen wollte, und umgekehrt, wenn man in diesem Falle ohne Weiteres aus log Cos z durch die gewöhnlichen Tafeln Cos z ableiten wollte. Man muss vielmehr dann auch in Beziehung auf den gegebenen Cos z und den gegebenen log Cos z seine Zuflucht zu den bekannten Reihenentwickelungen nehmen und 1) aus $\operatorname{Cos} z = 1 + \chi$ schliessen: $\log \operatorname{Cos} z = M \cdot \chi\,[1 - \frac{1}{2}\chi + \frac{1}{3}\chi^2 \ldots]$. und 2) aus $\operatorname{Log} \operatorname{Cos} z = \operatorname{Log}(1 + \chi) = \psi$ durch die Bemerkung, dass dann $e^{\psi} = 1 + \chi$ ist, zu dem Schlusse gelangen: $\operatorname{Cos} z = 1 + \psi + \frac{1}{2}\psi^2 + \ldots.$

Beispiel: $x^3 = 48\,x + 2 \cdot \sqrt{4097}$. (Vergl. § 42 und 45).

Rechnet man von Anfang bis zu Ende mit gewöhnlichen 7stelligen Tafeln nach den drei Lambert'schen Formeln, so erhält man: $\omega = 0^{0}\ 53'\ 43'',75$, $z' = 0,0067876$, $\omega' = 0^{0}\ 17'\ 54'',572$, $\log \operatorname{Cos} \frac{z}{3} = 0,0000059$, $\log \operatorname{Sin} \frac{z}{3} = 7,7168143$, endlich $x = 8,000110$ und $x = -4,000055 \pm i \cdot 0,03609399$.

Mit Benutzung der beiden letzten §§ macht sich die Rechnung aber so: Es ist diesmal $\operatorname{Cos} z^{\,2} = 1 + \frac{1}{4096} = 1 + \chi$; daher ist $\log \operatorname{Cos} z = \frac{M \cdot \chi}{2}\left[1 - \frac{\chi}{2} + \frac{\chi^2}{3}\right]$ $= \frac{M \cdot 8191}{8192 \cdot 8192} = 0,0000530.0800 = (4),530.0800$, wo durch die Einklammerung der 4 angedeutet werden soll, dass ausser 0 Ganzen noch die ersten vier Decimalstellen Nullen sind.

Bruchstück aus den neuen Tafeln.

ω	z'	Diff.	log. Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
$0^0\ 17'\ 54''$	0,0022613.37	21.05	(5),58.87278	. 10966	7,7165831	4042
$0^0\ 17'\ 55''$	0,0022634.42		(5),58.98244		7,7169873	
$0^0\ 53'\ 42''$	0,0067842.60	21.03	(4),529.8742	. 3289	8,1937357	1348
$0^0\ 53'\ 43''$	0,0067863·63		(4),530.2031		8,1938705	
$0^0\ 53'\ 44''$	0,0067884.70	21.07	(4),530.5324	. 3293	8,1940053	1348.

Nun giebt die Proportion 3289 : 2158 = 21.03 : 13.80, $z' = 0{,}0067856.40$ und

$$\left.\begin{array}{l} 21.05 : 5.43 = .\ 10966 : .\ 2829 \\ 21.05 : 5.43 = 4042 : 1043 \end{array}\right\} \text{geben} \left\{\begin{array}{l} \log \text{Cos} \frac{z}{3} = (5),58.90107 \\ \log \text{Sin} \frac{z}{3} = 7{,}7166874. \end{array}\right.$$

Ferner ist Log Cos $\frac{z}{3}$ = 0,0000135.6257 und folglich Cos $\frac{z}{3}$ = 1,0000135.6256. Hiernach ist: $x = 8{,}0001085.0048$ und $x = -4{,}0000542.5024 \pm i\,.\,0{,}0360834.5$.

§ 39. Obgleich nun zwar die log. Sin z für kleine ω in siebenstelligen Tafeln sieben geltende Decimalstellen haben, so tritt hier ein anderer Uebelstand ein. Die Differenzen sind nämlich so gross, dass die blosse Benutzung der ersten Differenzen gewiss nicht genügt, und für sehr kleine ω würde auch die Heranziehung der zweiten Differenzen noch nicht befriedigende Resultate liefern, da hier das Verhältniss der aufeinander folgenden z und der zugehörigen Sin z immer mehr ein geometrisches wird.

Sollte man z. B. vermittelst log. Sin z = 5,4971995 — 10 angeben log Sin $\frac{z}{3}$, so würde man bei der gewöhnlichen Differenzenrechnung nach Proportionaltheilen finden: $\omega = 6\frac{1}{2}''$, $z' = 0{,}0000137$, $\frac{z'}{3} = 0{,}0000046$ und log Sin $\frac{z}{3}$ = 5,0201471 — 10. In der That ist aber $\omega = 6'',480741$, folglich $z' = 0{,}0000136.0956$ und $\frac{z'}{3} = (5),45.3652$. Und weil zu $\zeta = 0{,}0000042$ gehört log Sin ζ = 4,9866049 — 10

und weil ferner . . . . log $\frac{45{,}3652}{42}$ = 0,0334735 ist,

so ist nur log Sin $\frac{z}{3}$ . . . . = 5,0200784 — 10.

Ebenso ist es in der alten Trigonometrie. Hätte man aus log sin z = 5,4971995 — 10 zu finden log sin $\frac{z}{3}$, so würde die Rechnung nach Proportionaltheilen mit Tafeln, die nur nach Sekunden fortschreiten, geben: $z = 6\frac{1}{2}''$, $\frac{z}{3} = 2\frac{1}{6}''$, log sin $\frac{z}{3}$ = 5,0159534 — 10, während doch Jeder weiss, dass log sin $\frac{z}{3}$ = 5,0200782 — 10 ist.

Es werden aber auch Gegenden in den neuen Tafeln existiren, wo zwar z klein ist, aber doch nicht so klein, dass das geometrische Verhältniss zwischen z und Sin z rein hervortritt. Wir haben daher noch immer die Frage zu beantworten: Wie findet man zu log Sin z das z und umgekehrt zu z den zugehörigen log Sin z genau, wenn z nur klein ist? Dieses und Verwandtes zu erörtern, ist der Gegenstand des folgenden Anhanges.

Dritter Anhang.

§ 40. Nachdem wir die Mittel angegeben haben, auch für kleine ω genaue Tafeln zu entwerfen, wollen wir jetzt zeigen, wie wir uns von einem kleinen ω ganz emancipiren und demnach auch mit Tafeln ausreichen können, die am Anfange minder vollkommen sind.

Aus § 7 ist bekannt, dass $\text{Sin}\, v = \frac{e^v - e^{-v}}{2}$ und $\text{Cos}\, v = \frac{e^v + e^{-v}}{2}$ ist. Da nun $e^{\pm v} = 1 \pm v + \frac{v^2}{2} \pm \frac{v^3}{1.2.3} + \frac{v^4}{1.2.3.4} \pm \frac{v^5}{1.2.3.4.5} + \ldots\ldots$ ist, so erhalten wir:

$$\begin{cases} \text{Sin}\, v = v + \frac{v^3}{1.2.3} + \frac{v^5}{1.2.3.4.5} + \ldots\ldots \\ \text{Cos}\, v = 1 + \frac{v^2}{1.2} + \frac{v^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots \end{cases}$$

§ 41. Um nun umgekehrt aus Sin v einen Ausdruck für v abzuleiten, setze man:

$$v = a\,.\,\text{Sin}\, v + b\,.\,\text{Sin}\, v^3 + c\,.\,\text{Sin}\, v^5 + d\,.\,\text{Sin}\, v^7 + \ldots\ldots,$$

und ebenso $u = a\,.\,\text{Sin}\, u + b\,.\,\text{Sin}\, u^3 + c\,.\,\text{Sin}\, u^5 + d\,.\,\text{Sin}\, u^7 + \ldots\ldots$

Bei dieser Hypothese kann man die geraden Potenzen von Sin v deshalb weglassen, weil, wenn Sin v nur sein Zeichen ändert, aber seine Grösse beibehält, auch der hyperbolische Sektor v nur sein Zeichen ändert. Dann ist:

$$v - u = a\,.\,(\text{Sin}\, v - \text{Sin}\, u) + b\,.\,(\text{Sin}\, v^3 - \text{Sin}\, u^3) + c\,.\,(\text{Sin}\, v^5 - \text{Sin}\, u^5) + \ldots,$$

$$\frac{v-u}{\text{Sin}\, v - \text{Sin}\, u} = a + b\,.\,\frac{(\text{Sin}\, v^3 - \text{Sin}\, u^3)}{\text{Sin}\, v - \text{Sin}\, u} + c\,.\,\frac{(\text{Sin}\, v^5 - \text{Sin}\, u^5)}{\text{Sin}\, v - \text{Sin}\, u} + \ldots.$$

$$\frac{\frac{1}{2}(v-u)}{\text{Sin}\,\frac{1}{2}(v-u)\,.\,\text{Cos}\,\frac{1}{2}(v+u)} = a + b\,(\text{Sin}\, v^2 + \text{Sin}\, v\,.\,\text{Sin}\, u + \text{Sin}\, u^2) + \ldots.$$

Die letzte Reihe geht für $u = v$ in folgende über:

$$\frac{1}{\text{Cos}\, v} = a + 3\,b\,.\,\text{Sin}\, v^2 + 5\,c\,.\,\text{Sin}\, v^4 + 7\,d\,.\,\text{Sin}\, v^6 + 9\,e\,.\,\text{Sin}\, v^8 + \ldots.$$

Weil aber $\text{Cos}\, v = \sqrt{1 + \text{Sin}\, v^2}$ und $\frac{1}{\text{Cos}\, v} = (1 + \text{Sin}\, v^2)^{-\frac{1}{2}}$ ist, so haben wir auch:

$$\frac{1}{\operatorname{Cos} v} = 1 - \frac{1}{2} . \operatorname{Sin} v^2 + \frac{3}{8} \operatorname{Sin} v^4 - \frac{5}{16} \operatorname{Sin} v^6 + \frac{35}{128} \operatorname{Sin} v^8 - \ldots\ldots$$

Deswegen ist $a = 1$, $b = -\frac{1}{6}$, $c = \frac{3}{40}$, $d = -\frac{5}{112}$, $e = \frac{35}{1152} \ldots\ldots$ und endlich

$$v = \operatorname{Sin} v - \frac{1}{2} . \frac{\operatorname{Sin} v^3}{3} + \frac{1 . 3}{2 . 4} . \frac{\operatorname{Sin} v^5}{5} - \frac{1 . 3 . 5}{2 . 4 . 6} . \frac{\operatorname{Sin} v^7}{7} + \frac{1 . 3 . 5 . 7}{2 . 4 . 6 . 8} . \frac{\operatorname{Sin} v^9}{9} - \ldots\ldots$$

Sollte man den Wunsch haben, aus Cos v unmittelbar v abzuleiten, so würde man durch die Reihenentwickelung darauf geführt werden, $\sqrt{\frac{\operatorname{Cos} v - 1}{2}} = \operatorname{Sin} \frac{1}{2} v$ zu setzen und lieber aus Sin $\frac{1}{2}$ v das v zu finden.

§ 42. Weil aber meistens aus dem hyperbolischen Sektor der Logarithmus seines Sinus oder Cosinus zu finden ist, so merke man sich noch folgende zwei Gleichungen, welche aus den Formeln des § 40 in Verbindung mit der Reihe $\log(1 + y) = M . \left(y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \ldots\right)$ leicht zu entwickeln sind:

$$\begin{cases} \log \operatorname{Cos} z = M . \frac{z^2}{2} \left[1 - \frac{z^2}{6} + 2 . \frac{z^4}{45} - \ldots\right] \\ \log \operatorname{Sin} z = \log z + M . \frac{z^2}{6} \left[1 - \frac{z^2}{30} + \ldots\right] \end{cases}$$

Je kleiner der hyperbolische Sektor oder sein Sinus ist, desto weniger Glieder der in den drei letzten Paragraphen aufgestellten Reihen werden hinreichen, um aus dem Sektor den Sinus, Cosinus und deren Logarithmen oder um aus dem jedesmaligen Sinus den Sektor unmittelbar und scharf abzuleiten.

Beispiele. 1) Das schon in § 38 behandelte und noch in § 45. zu behandelnde Beispiel: $x^3 = 48\,x + 2 . \sqrt{4097}$.

Aus $\operatorname{Cos} z = \sqrt{\frac{4097}{4096}}$ leite ich zuerst ab $\operatorname{Sin} z = \frac{1}{64}$.

Hieraus ergiebt sich durch die Formel in § 41 das theoretische $z = 0{,}015625 - 0{,}0000006.3578 + 0{,}0000000.0007 = 0{,}0156243.6429$, (woraus sich für das in § 38 benutzte praktische z^1 ergeben würde $z^1 = 0{,}0067855.75164$.)

Durch die Formeln in § 42 erhält man dann ferner:

$$\log \operatorname{Cos} \frac{z}{3} = 0{,}0000058.89994,\ \log \operatorname{Sin} \frac{z}{3} = 7{,}7166831.$$

Und da das ψ aus § 38 = Log Cos $\frac{z}{3}$ = 0,0000135.6222 ist, so ist nach dem nämlichen § Cos $\frac{z}{3}$ = 1,0000135.6231. Folglich hat man nun:

$x = 8{,}0001084.9848$ und $x = -4{,}0000542.4924 \pm i . 0{,}0360830.9$.

2) Nehmen wir noch einmal aus § 28 das 6. Beispiel (Comet 156) vor.

Aus $\log \operatorname{Sin} z = 9{,}1762652$ folgt vermittelst § 41 $z = 0{,}1495025.59$ und durch

§ 40 $\mathrm{Sin}\,\frac{z}{3} = 0{,}0498548.16$. Da hiernach $\log \mathrm{Sin}\,\frac{z}{3} = 8{,}6977071.4$ ist, so ergiebt sich jetzt die wahre Anomalie $v = 11^{0}\,23^{I}\,17^{II}{,}66$, so dass nun die Abweichung von den Barker'schen Tafeln nur noch $\Delta = 0^{II}{,}01$ ist.

3) Im 10. Beispiel des § 28 (Comet 177, $t = 0{,}0007$ Tage), wo wir mit siebenstelligen Tafeln, die Nullen nach dem Komma mit eingeschlossen, rechneten, blieb noch ein Fehler von $\Delta = 0^{II}{,}06$. — Jetzt folgt aus $\log \mathrm{Sin}\, z = 7{,}1711599$ das theoretische $z = 0{,}0014830.64$, ($z^{I} = 0{,}0006440.861$), $\log \mathrm{Sin}\,\frac{z}{3} = 6{,}6940386$, also schon genau $\mathrm{Sin}\,\frac{z}{3} = \frac{1}{3}\,.\,\mathrm{Sin}\, z$, weswegen auch von den Reihenentwikelungen der letzten §§ immer nur das erste Glied genommen werden durfte. Aus $\log \mathrm{tg}\,\frac{v}{2} = 6{,}9950686$ ergiebt sich endlich $v = 0^{0}\,6^{I}\,47^{II}{,}87$, also genau dasselbe, was aus den Barker'schen Tafeln hervorging. (S. auch vierten Anhang § 46).

§ 43. Die gelungene Emancipation von den alten Tafeln in Betreff kleiner hyperbolischer Sektoren lässt den Wunsch aufkommen, auch für einen beliebigen hyperbolischen Sektor ohne Hilfe des ω unmittelbar den hyperbolischen Sinus und Cosinus und deren Logarithmen angeben zu können, und der Ausspruch Lambert's: Comme donc les formules hyperboliques ne diffèrent des formules circulaires répondantes que tout au plus dans le signe + — et que même dans la plus grande partie de ces formules l'identité s'étend jusques dans les signes, on conçoit aisément qu'on peut attendre des formules hyperboliques les mêmes avantages qu'on a eus des formules circulaires répondantes — fordert wenigstens auf, einen Versuch nach dieser Richtung hin zu machen.

Ich gehe von der in § 40 erhaltenen Gleichung aus: $\mathrm{Cos}\, x = 1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots$ und erinnere daran, dass, wenn eine auf o gebrachte Gleichung für x die Wurzeln $a, b, c, d, e \ldots.$ hat, dann $(x - a)\;(x - b)\;(x - c)\;(x - d)\;(x - e) \ldots. = 0$ ist, was auch, wenn das von x unabhängige Glied der vorgelegten Gleichung $-a\,.\,-b\,.\,-c\,.\,-d \ldots. = n$ gesetzt wird, auf folgende Art geschrieben werden kann:

$$o = n\,.\left(1 - \frac{x}{a}\right).\left(1 - \frac{x}{b}\right)\left(1 - \frac{x}{c}\right)\left(1 - \frac{x}{d}\right)\ldots..$$

Nun kann die obige Reihe für $\mathrm{Cos}\, x$ nur Null werden, wenn $\mathrm{Cos}\, x = 0$ wird. Aber nach § 8 wird nur $\mathrm{Cos}\, x = 0$ für $x = \pm \frac{1}{2}\, i\,\pi, \pm \frac{3}{2}\, i\,\pi, \pm \frac{5}{2}\, i\pi, \pm \frac{7}{2}\, i\pi \ldots.$

Also wird auch nur die Reihe $1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots. = 0$ für die nämlichen Werthe von x, d. h. es ist

$$1 + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots = \left(1 - \frac{x}{\frac{1}{2} i \pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\frac{1}{2} i \pi}\right)\left(1 - \frac{x}{\frac{3}{2} i \pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\frac{3}{2} i \pi}\right) \ldots.,$$

oder $\operatorname{Cos} x = \left(1 + \frac{4 x^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4 x^2}{9 \pi^2}\right)\left(1 + \frac{4 x^2}{25 \pi^2}\right)\left(1 + \frac{4 x^2}{49 \pi^2}\right)\left(1 + \frac{4 x^2}{81 \pi^2}\right) \ldots.$

Ebenso erhält man, wenn man bei der § 40 aufgestellten Gleichung $\operatorname{Sin} x = x\left(1 + \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6.7} \ldots..\right)$ beachtet, dass die Klammer nur für $x = \pm i \pi, \pm 2 i \pi, \pm 3 i \pi, \pm 4 i \pi \ldots.$ Null werden kann:

$$\operatorname{Sin} x = x \left(1 + \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{4 \pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{9 \pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{16 \pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{25 \pi^2}\right) \ldots.$$

Den beiden Gleichungen kann man auch, wenn $x = \alpha . \frac{\pi}{2}$ gesetzt wird, folgenden Ausdruck geben:

$$\operatorname{Cos}\left(\alpha . \frac{\pi}{2}\right) = \left(1 + \alpha^2\right)\left[1 + \left(\frac{\alpha}{3}\right)^2\right]\left[1 + \left(\frac{\alpha}{5}\right)^2\right]\left[1 + \left(\frac{\alpha}{7}\right)^2\right]\left[1 + \left(\frac{\alpha}{9}\right)^2\right] \ldots.$$

$$\operatorname{Sin}\left(\alpha . \frac{\pi}{2}\right) = \alpha . \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right]\left[1 + \left(\frac{\alpha}{4}\right)^2\right]\left[1 + \left(\frac{\alpha}{6}\right)^2\right]\left[1 + \left(\frac{\alpha}{8}\right)^2\right]\left[1 + \left(\frac{\alpha}{10}\right)^2\right] \ldots$$

Geht man nun zu den Logarithmen über, so erhält man:

$$\operatorname{Log} \operatorname{Cos}\left(\alpha . \frac{\pi}{2}\right) = \left\{\begin{matrix} \alpha^2 - \frac{1}{2}\alpha^4 + \frac{1}{3}\alpha^6 - \frac{1}{4}\alpha^8 + \frac{1}{5}\alpha^{10} \ldots. \\ \frac{\alpha^2}{3^2} - \frac{1}{2}\frac{\alpha^4}{3^4} + \frac{1}{3}\frac{\alpha^6}{3^6} - \frac{1}{4}\frac{\alpha^8}{3^8} + \frac{1}{5}\frac{\alpha^{10}}{3^{10}} \ldots. \\ \frac{\alpha^2}{5^2} - \frac{1}{2}\frac{\alpha_4}{5^4} + \frac{1}{3}\frac{\alpha^6}{5^6} - \frac{1}{4}\frac{\alpha^8}{5^8} + \frac{1}{5}\frac{\alpha^{10}}{5^{10}} \ldots. \\ \vdots \end{matrix}\right\}, \text{ oder}$$

$$\operatorname{Log} \operatorname{Cos}\left(\alpha . \frac{\pi}{2}\right) = \left\{\begin{matrix} \alpha^2\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \ldots.\right. \\ - \frac{1}{2}\alpha^4\left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \ldots\right) \\ + \frac{1}{3}\alpha^6\left(1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \ldots\right) \\ - \frac{1}{4}\alpha^8\left(1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} + \ldots\right) \end{matrix}\right\}$$

Auf dieselbe Weise findet man:

$$\operatorname{Log} \operatorname{Sin}\left(\alpha . \frac{\pi}{2}\right) = \left\{\begin{matrix} \operatorname{Log} \alpha + \operatorname{Log} \frac{\pi}{2} + \alpha^3\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \ldots\right) \\ - \frac{1}{2}\alpha^4\left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{8^4} + \ldots\right) \\ + \frac{1}{3}\alpha^6\left(\frac{1}{2^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{6^6} + \frac{1}{8^6} + \ldots\right) \\ - \frac{1}{4}\alpha^8\left(\frac{1}{2^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{6^8} + \frac{1}{8^8} + \ldots\right) \\ \vdots \end{matrix}\right\}$$

Um aber diese Reihen für Log Cos $\left(\alpha \,.\, \frac{\pi}{2}\right)$ und Log Sin $\left(\alpha \,.\, \frac{\pi}{2}\right)$ convergenter zu machen, was besonders bei Log Cos $\left(\alpha \,.\, \frac{\pi}{2}\right)$ ein Bedürfniss ist, nehme man die ersten Faktoren der Produktenentwickelung für Cos $\left(\alpha \,.\, \frac{\pi}{2}\right)$ und Sin $\left(\alpha \,.\, \frac{\pi}{2}\right)$ in beliebiger Anzahl **nicht** in die Reihenentwickelung auf; dann erhält man, wenn man nur die Faktoren $(1 + \alpha^2)$ und $\left[1 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right]$ davon ausschliesst und gleichzeitig zu den **Briggi**'schen Logarithmen übergeht, mit Benutzung der entsprechenden Rechnungen **Euler**'s für die cyklische Trigonometrie (Einleitung in die Analysis des Unend. I. § 195) folgende Resultate: $\log \text{Cos}\left(\alpha \,.\, \frac{\pi}{2}\right) = \log(1 + \alpha^2)$

$$\left.\begin{array}{l}
+\, \alpha^2 \,.\, M\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \ldots\right) \\
-\, \frac{1}{2}\,\alpha^4 \,.\, M\left(\frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \ldots\right) \\
+\, \frac{1}{3}\,\alpha^6 \,.\, M\left(\frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \ldots\right) \\
-\, \frac{1}{4}\,\alpha^8 \,.\, M\left(\frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} + \ldots\right) \\
\quad\vdots
\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}
+\, 0{,}10149486 \,.\, \alpha^2 \\
-\, 0{,}00318729 \,.\, \alpha^4 \\
+\, 0{,}00020949 \,.\, \alpha^6 \\
-\, 0{,}00001685 \,.\, \alpha^8 \\
+\, 0{,}00000148 \,.\, \alpha^{10} \\
-\, 0{,}00000014 \,.\, \alpha^{12} \\
+\, 0{,}00000001 \,.\, \alpha^{14}.
\end{array}\right.$$

$$\log \text{Sin}\left(\alpha \,.\, \frac{\pi}{2}\right) = \log\left[\alpha \,.\, \frac{\pi}{2}\left(1 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right)\right]$$

$$\left.\begin{array}{l}
+\, \alpha^2 \,.\, M\left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \ldots\right) \\
-\, \frac{1}{2}\,\alpha^4 \,.\, M\left(\frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{8^4} + \frac{1}{10^4} + \ldots\right) \\
+\, \frac{1}{3}\,\alpha^6 \,.\, M\left(\frac{1}{4^6} + \frac{1}{6^6} + \frac{1}{8^6} + \frac{1}{10^6} + \ldots\right) \\
-\, \frac{1}{4}\,\alpha^8 \,.\, M\left(\frac{1}{4^8} + \frac{1}{6^8} + \frac{1}{8^8} + \frac{1}{10^8} + \ldots\right) \\
\quad\vdots
\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l}
+\, 0{,}07002283 \,.\, \alpha^2 \\
-\, 0{,}00111727 \,.\, \alpha^4 \\
+\, 0{,}00003923 \,.\, \alpha^6 \\
-\, 0{,}00000173 \,.\, \alpha^8 \\
+\, 0{,}00000008 \,.\, \alpha^{10}.
\end{array}\right.$$

Natürlich wird man nach den vorstehenden Reihen nur rechnen, wenn $\alpha < 1$ ist. Zwar könnte man im entgegengesetzten Falle von den Formeln (B) in § 7 Gebrauch machen, oder um eine bedeutend schnellere Convergenz der Reihen zu erzielen, von der Reihenentwickelung noch mehr Faktoren der obigen Produktenentwickelung ausschliessen, aber praktischer wird es jedenfalls sein, sich dann der drei in § 9 entwickelten **Lambert**'schen Formeln zu bedienen.

Beispiel: Es sei $\alpha = 1$. Dann ist das theoretische $z = \frac{\pi}{2}$, das praktische $z' = \frac{\pi}{2} \cdot M = 0{,}6821883$, $\omega = 66^0\ 30'\ 47'',74$, $\log \sec \omega = \log \operatorname{Cos} z = 0{,}3995316$, $\log \operatorname{tg} \omega = \log \operatorname{Sin} z = 0{,}3619730.8$.

Die vorstehenden Reihenentwickelungen geben dasselbe Resultat, nämlich
$\log \operatorname{Cos} \frac{\pi}{2} = 0{,}4027358.4 - 0{,}0032042.8 = 0{,}3995315.6$ und

$\log \operatorname{Sin} \frac{\pi}{2} = 0{,}3630920.4 - 0{,}0011190.0 = 0{,}3619730.4$.

Vierter Anhang.

§ 44. Da wir einmal in den Anhängen Reihenentwickelungen zugelassen haben, so wollen wir zum Schlusse noch zeigen, dass wir für gewisse extreme Fälle die Reihenentwicklung auch mit Nutzen bei der cardanischen Formel anwenden können.

Es ist für die Gleichung $x^3 = 3fx + 2g$, wie wir wissen:

$$x = \sqrt[3]{g + \sqrt{g^2 - f^3}} + \sqrt[3]{g - \sqrt{g^2 - f^3}} = p + q \text{ und } x = -\frac{p+q}{2} \pm \frac{p-q}{2} i \cdot \sqrt{3}.$$

Behandeln wir zuerst den Fall, wenn f sehr gross im Vergleich zu g ist.

1) Hiebei sei zunächst f positiv, so dass wir es also mit dem irreducibeln Falle zu thun haben.

Man setze $g^2 - f^3 = -f^3 \left(1 + \frac{g^2}{-f^3}\right)$ und $\frac{g^2}{-f^3} = \psi^2$,

Da $\sqrt{1 + \psi^2} = 1 + \frac{1}{2}\psi^2 - \frac{1}{8}\psi^4 + \frac{1}{16}\psi^6 \ldots$ ist, so ist

$$p^3 = g + \sqrt{g^2 - f^3} = \sqrt{-f^3}\,[1 + (\psi + \tfrac{1}{2}\psi^2 - \tfrac{1}{8}\psi^4 + \tfrac{1}{16}\psi^6 \ldots)] \text{ und}$$

$$q^3 = g - \sqrt{g^2 - f^3} = -\sqrt{-f^3}\,[1 - (\psi - \tfrac{1}{2}\psi^2 + \tfrac{1}{8}\psi^4 + \tfrac{1}{16}\psi^6 \ldots)]$$

Wenn nun $\Psi = \psi\,[1 + \frac{1}{2}\psi\,(1 - \frac{1}{4}\psi^2 + \frac{1}{8}\psi^4 \ldots)]$,

$\Psi_1 = \psi\,[1 - \frac{1}{2}\psi\,(1 - \frac{1}{4}\psi^2 + \frac{1}{8}\psi^4 \ldots)]$ gesetzt wird,

so ist $p = \sqrt{-f}\,[1 + \frac{1}{3}\Psi - \frac{1}{9}\Psi^2 + \frac{5}{81}\Psi^3 - \frac{10}{243}\Psi^4 + \frac{22}{729}\Psi^5 \ldots]$,

$q = -\sqrt{-f}\,.\,[1 - \frac{1}{3}\Psi_1 - \frac{1}{9}\Psi_1^2 - \frac{5}{81}\Psi_1^3 - \frac{10}{243}\Psi_1^4 - \frac{22}{729}\Psi_1^5 \ldots]$ und

$$p + q = \sqrt{-f}\,.\,[\tfrac{1}{3}(\Psi + \Psi_1) - \tfrac{1}{9}(\Psi^2 - \Psi_1^2) + \tfrac{5}{81}(\Psi^3 + \Psi_1^3) - \tfrac{10}{243}(\Psi^4 - \Psi_1^4) + \tfrac{22}{729}(\Psi^5 + \Psi_1^5)],$$

$$p - q = \sqrt{-f}\,.\,[2 + \tfrac{1}{3}(\Psi - \Psi_1) - \tfrac{1}{9}(\Psi^2 + \Psi_1^2) + \tfrac{5}{81}(\Psi^3 - \Psi_1^3) - \tfrac{10}{243}(\Psi^4 + \Psi_1^4) + \tfrac{22}{729}(\Psi^5 - \Psi_1^5)].$$

Nun ist $\Psi^2 = \psi^2\,[1 + \psi\,(1 - \frac{1}{4}\psi^2 \ldots) + \frac{1}{4}\psi^2 \ldots]$

$\Psi_1^2 = \psi^2\,[1 - \psi\,(1 - \frac{1}{4}\psi^2 \ldots) + \frac{1}{4}\psi^2 \ldots]$

$\Psi^3 = \psi^3 (1 + \frac{3}{2} \psi + \frac{3}{4} \psi^2 \ldots), \; \Psi^4 = \psi^4 (1 + 2 \psi \ldots), \; \Psi^5 = \psi^5 \ldots$

$\Psi_1^{\,3} = \psi^3 (1 - \frac{3}{2} \psi + \frac{3}{4} \psi^2 \ldots), \; \Psi_1^{\,4} = \psi^4 (1 - 2 \psi \ldots), \; \Psi_1^{\,5} = \psi^5 \ldots$

Also haben wir $\Psi + \Psi_1 = 2 \psi,$ $\qquad \Psi^2 - \Psi_1^{\,2} = 2 \psi^3 . (1 - \frac{1}{4} \psi^2)$

$\Psi - \Psi_1 = \psi^2 (1 - \frac{1}{4} \psi^2 \ldots), \; \Psi^2 + \Psi_1^{\,2} = 2 \psi^2 \quad (1 + \frac{1}{4} \psi^2)$

$\Psi^3 + \Psi_1^{\,3} = 2 \psi^3 (1 + \frac{3}{4} \psi^2), \; \Psi^4 - \Psi_1^{\,4} = 4 \psi^5, \; \Psi^5 + \Psi_1^{\,5} = 2 \psi^5$

$\Psi^3 - \Psi_1^{\,3} = 3 \psi^4, \qquad \Psi^4 + \Psi_1^{\,4} = 2 \psi^4, \; \Psi^5 - \Psi^5 = 0.$

Demnach ist $p + q = \sqrt{-f} . (\frac{2}{3} \psi - \frac{8}{81} \psi^3 + \frac{32}{729} \psi^5 \ldots)$

und $p - q = \sqrt{-f} . (2 + \frac{1}{9} \psi^2 - \frac{35}{972} \psi^4 \ldots)$.

Da nun $\psi = \frac{g}{-f . \sqrt{-f}}$ ist, so erhalten wir schliesslich für den irreducibeln Fall:

$$\left\{\begin{aligned} x &= \tfrac{2}{3} \cdot \frac{g}{-f} \left[1 + \tfrac{4}{27} \cdot \frac{g^2}{f^3} + \tfrac{16}{243} \cdot \frac{g^4}{f^6} \ldots \right] = - v, \\ x &= \frac{v}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{f} \cdot \left[2 - \tfrac{1}{9} \cdot \frac{g^2}{f^3} - \tfrac{35}{972} \cdot \frac{g^4}{f^6}\right] \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (s.)$$

2) Sollte f negativ sein, so setze man $f = - \varphi$ und die Gleichung

$$x^3 + 3 \varphi x = 2 g$$

hat für diesen reducibeln Fall folgende Auflösungen:

$$\left\{\begin{aligned} x &= \tfrac{2}{3} \cdot \frac{g}{\varphi} \left[1 - \tfrac{4}{27} \cdot \frac{g^2}{\varphi^3} + \tfrac{16}{243} \cdot \frac{g^4}{\varphi^6}\right] = w \\ x &= - \frac{w}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{-\varphi} \cdot \left[2 + \tfrac{1}{9} \frac{g^2}{\varphi^3} - \tfrac{35}{972} \cdot \frac{g^4}{\varphi^6}\right] \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (S.)$$

immer unter der Voraussetzung, dass φ im Vergleich zu g sehr gross ist.

Beispiel für den irreducibeln Fall.

$$x^3 = 300 x + 2.$$

Rechnet man nach den bekannten cyklisch-trigonometrischen Formeln (n) des § 22, so findet man mit blosser Benutzung der ersten Differenzen den dortigen Hilfswinkel $z = 89^0 56' 33'',73468$ und demnach

$$x = 17{,}32384, \; x' = - 0{,}0066665.51, \; x'' = - 17{,}31717.$$

Nimmt man aber Rücksicht darauf, dass, weil $90^0 - z$ ein sehr kleiner Winkel ist, die Sinus an dieser Stelle in geometrischem Verhältnisse wachsen, so erhält man $z = 89^0 56' 33'',7351$ und $x' = - 0{,}0066666.58$, während x und x'' wie vorhin bleiben.

Mit weniger Mühe findet man durch die Formeln (s) bei erlaubter Vernachlässigung der letzten von $\frac{g^4}{f^6}$ abhängigen Glieder:

$$x = \begin{cases} -\ \ 0,0066666.6765 \\ -\ 17,3171737.79615 \\ +\ 17,3238404.47265. \end{cases}$$

Dass man sich bei diesen Rechnungen, wenn man innerhalb der durch die Tafeln gesteckten Grenzen bleiben will, noch zur Erleichterung der in § 25 gegebenen Formeln für $\log(a-b)$ und $\log(a+b)$ bedienen kann, versteht sich von selbst, und so können bisweilen selbst im irreducibeln Falle auch die neuen hyperbolischen Tafeln mit Vortheil benutzt werden.

Beispiele für den reducibeln Fall.

a) Das Beispiel 9 aus § 28. Comet 177, $t = 0{,}05$ Tage.

Da hier $\varphi = 1$, $\log g = 9{,}0250319 - 10$ ist, so ist das hier allein brauchbare reelle $x = \text{num}\log 8{,}8489406 \,.\, [1 - 0{,}0016624.93 + 0{,}0000082.92]$,

oder $\log x = \log \operatorname{tg} \frac{v}{2} = 8{,}8482216$, die wahre Anomalie $v = 8^0\ 3'\ 57'',46$, also nur $\Delta = 0'',01$.

b) Das Beispiel 10 aus § 28, welches auch schon im dritten Anhang § 42 berücksichtigt ist. Es betrifft denselben Cometen 177, aber für $t = 0{,}0007$ Tage.

Hier ist $\log g = 7{,}1711599 - 10$ und $\log\left(\frac{4}{27}\frac{g^2}{\varphi^3}\right) = 3{,}5130159 - 10$, also

$\log x = 6{,}9050686 - 0{,}0000001$, $\log \operatorname{tg}\frac{v}{2} = 6{,}9950685$ und $v = 0^0\ 6'\ 47'',87$, mithin genau wie die Barker'schen Tafeln die Anomalie ergeben haben.

§ 45. Wir behandeln ferner den Fall, wo g^2 von f^3 wenig verschieden ist.

1) Irreducibler Fall. Es sei $f^3 = g^2 + u$, wo u sehr klein ist. Dann ist

$$x = p + q = \sqrt[3]{g + \sqrt{-u}} + \sqrt[3]{g - \sqrt{-u}} = \sqrt[3]{g} \,.\, \left[(1 + i \,.\, v)^{\frac{1}{3}} + (1 - i \,.\, v)^{\frac{1}{3}}\right], \text{ wo } v = \frac{\sqrt{u}}{g}.$$

Nun ist $(1 + i \,.\, v)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}\, i \,.\, v + \frac{1}{9} \,.\, v^2 - \frac{5}{81}\, i \,.\, v^3 - \frac{10}{243} \,.\, v^4 \ldots.$

$$(1 - i \,.\, v)^{\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3}\, i \,.\, v + \frac{1}{9} \,.\, v^2 + \frac{5}{81}\, i \,.\, v^3 - \frac{10}{243} \,.\, v^4 \ldots.$$

Also ist
$$\left.\begin{cases} x = 2 \,.\, \sqrt[3]{g} \,.\, \left(1 + \left(\frac{v}{3}\right)^2 - \frac{10}{3}\left(\frac{v}{3}\right)^4 \ldots\ldots\right) \text{ und ausserdem auch} \\ x = -\sqrt[3]{g} \,.\, \left[1 + \left(\frac{v}{3}\right)^2 - \frac{10}{3}\left(\frac{v}{3}\right)^4\right] \pm \sqrt[3]{g} \,.\, \left(\frac{v}{3}\right) \,.\, \sqrt{3}\left[1 - \frac{5}{3} \,.\, \left(\frac{v}{3}\right)^2 \ldots\right] \end{cases}\right\} \text{(t.)}$$

Beispiel: $x^3 = 48\,x + 2 \,.\, \sqrt{4095}.$

Nach den alten fünfstelligen Tafeln, die den Hilfswinkel z nur ungefähr angeben ($55'$), wäre $x = 7{,}9998$ und $x = -3{,}9999 \pm 0{,}036948$. Erst siebenstellige

Tafeln geben $z = 53' \, 42\tfrac{1}{2}''$ und $x = -3{,}999946 \pm 0{,}0360781$. Nach der Reihenentwickelung erhält man leicht und mit Sicherheit:

$$x = 7{,}999890 \text{ und } x = -3{,}999945 \pm 0{,}03608570.$$

2) Reducibler Fall. Es sei $f^3 = g^2 - U$, wo U sehr klein ist. Dann ist

$$x = p + q = \sqrt[3]{g + \sqrt{U}} + \sqrt[3]{g - \sqrt{U}} = \sqrt[3]{g}\left[(1 + V)^{\frac{1}{3}} + (1 - V)^{\frac{1}{3}}\right], \text{ wo } V = \frac{\sqrt{U}}{g}.$$

Da nun $(1 + V)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{V}{3} - \frac{1}{9} V^2 + \frac{5}{81} V^3 - \frac{10}{243} V^4 \ldots$ und

$$(1 - V)^{\frac{1}{3}} = 1 - \frac{V}{3} - \frac{1}{9} \cdot V^2 - \frac{5}{81} V^3 - \frac{10}{243} V^4 \ldots \text{ ist,}$$

so ist
$$\left.\begin{aligned} x &= 2 \cdot \sqrt[3]{g} \cdot \left[1 - \left(\frac{V}{3}\right)^2 - \frac{10}{3}\left(\frac{V}{3}\right)^4 \ldots\right] \text{ und ausserdem auch} \\ x &= -\sqrt[3]{g} \cdot \left[1 - \left(\frac{V}{3}\right)^2 - \frac{10}{3}\left(\frac{V}{3}\right)^4\right] \pm i \cdot \sqrt[3]{g} \cdot \left(\frac{V}{3}\right) \cdot \sqrt{3}\left[1 + \frac{5}{3}\left(\frac{V}{3}\right)^2 \ldots\right] \end{aligned}\right\} \text{(T.)}$$

Beispiel. $x^3 = 48\, x + 2 \cdot \sqrt{4097}$. (Das schon in § 38 und § 42 behandelte Beispiel.)

Die neuen Tafeln, wenn sie auch an dieser Stelle nach den Lambert'schen Formeln nur auf fünf Stellen berechnet werden, geben den hieher gehörigen hyperbolischen Sektor nur unsicher an, $z' = 0{,}00690$. Darnach wäre

$$x = 8{,}0002 \text{ und } x = -4{,}0001 \pm i \cdot 0{,}03678.$$

Die vorstehende Reihenentwickelung giebt, mit siebenstelligen Logarithmentafeln berechnet, schon ein viel sichreres Resultat, nämlich $x = 8{,}000111$ und

$$x = -4{,}000056 \pm i \cdot 0{,}03608308.$$

§ 46. Wir gehen endlich zu dem andern Extrem über, wo g sehr gross ist im Verhältniss zu f. Hiebei haben wir es nur mit dem reducibeln Falle zu thun.

1) Zunächst ist: $\sqrt{g^2 - f^3} = g - \frac{1}{2} g \cdot z - \frac{1}{8} g \cdot z^2 - \frac{1}{16} g \cdot z^3 \ldots$, wo $z = \frac{f^3}{g^2}$.

Dann ist $p = \sqrt[3]{g + \sqrt{g^2 - f^3}} = \sqrt[3]{2g} \cdot \left(1 - \frac{z}{4} - \frac{z^2}{16} - \frac{z^3}{32} \ldots\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2g} \cdot \left(1 - \frac{z}{12} - 4 \cdot \frac{z^2}{144} \ldots\right)$

$$= \sqrt[3]{2g} \cdot (1 - Z - 4\, Z^2 \ldots), \text{ wo } Z = \frac{z}{12} = \frac{f^3}{3 \cdot (2g)^2}.$$

Ebenso ist:

$$q = \sqrt[3]{g - \sqrt{g^2 - f^3}} = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2} g \cdot z} \cdot \left(1 + \frac{z}{4} + \frac{z^2}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2} g\, z}\left(1 + \frac{z}{12} + 5 \cdot \frac{z^2}{144} \ldots\right)$$

$$= \frac{f}{\sqrt[3]{2\, g}} \cdot (1 + Z + 5 \cdot Z^2 \ldots)$$

9

Demnach erhalten wir

$$x = \sqrt[3]{2g} \,.\, (1 - Z - 4\,Z^2 \ldots) + \frac{f}{\sqrt[3]{2g}}\,(1 + Z + 5\,.\,Z^2 + \ldots)$$
$$= \left(\sqrt[3]{2g} + \frac{f}{\sqrt[3]{2g}}\right) - Z\,.\left(\sqrt[3]{2g} - \frac{f}{\sqrt[3]{2g}}\right) - Z^2\,.\left(4\,\sqrt[3]{2g} - \frac{5\,.\,f}{\sqrt[3]{2g}}\right)\ldots\ldots$$

Weil aber auch $x = -\frac{p+q}{2} \pm \frac{p-q}{2}\,.\,i\,.\,\sqrt{3}$ ist, so genügen der Gleichung auch folgende Werthe:

$$x = -\frac{p+q}{2} \pm i\,.\,\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\left(\sqrt[3]{2g} - \frac{f}{\sqrt[3]{2g}}\right) - Z\left(\sqrt[3]{2g} + \frac{f}{\sqrt[3]{2g}}\right) - Z^2.\left(4\,.\,\sqrt[3]{2g} + \frac{5f}{\sqrt[3]{2g}}\right)\ldots\right]$$

Setzen wir noch der Kürze wegen

$\sqrt[3]{2g} + \frac{f}{\sqrt[3]{2g}} = S$, $\sqrt[3]{2g} - \frac{f}{\sqrt[3]{2g}} = D$ und lassen das Glied, welches in Z^2 multiplicirt ist, weg, so haben wir:

$$(\text{U.}) \ldots \left\{\begin{array}{l} x = S - D\,.\,Z \\ x = -\frac{S - D\,.\,Z}{2} \pm \frac{i\,.\,\sqrt{3}}{2}\,(D - S\,.\,Z.) \end{array}\right\},\ \text{wo}\ Z = \frac{f^3}{3\,.\,(2\,g)^2}.$$

2) Sollte f negativ sein, so setze man $f = -\varphi$, dann ist auch Z negativ, man setze $Z = -\zeta$. Führt man nun noch folgende Abkürzungen ein:

$\sqrt[3]{2g} - \frac{\varphi}{\sqrt[3]{2g}} = \Delta$, $\sqrt[3]{2g} + \frac{\varphi}{\sqrt[3]{2g}} = \Sigma$, so hat die Gleichung $x^3 + 3\,\varphi\,x = 2\,g$ folgende Wurzeln:

$$(\text{V.}) \ldots \left\{\begin{array}{l} x = \Delta + \Sigma\,.\,\zeta \\ x = -\frac{\Delta + \Sigma\,.\,\zeta}{2} \pm \frac{i\,.\,\sqrt{3}}{2}\,(\Sigma + \Delta\,.\,\zeta) \end{array}\right\},\ \text{wo}\ \zeta = \frac{\varphi^3}{3\,.\,(2\,g)^2}.$$

Beispiele.

a) $x^3 = x + 64$. Hier ist $f = \frac{1}{3}$, $g = 32$.

Rechnet man nach den Formeln (N) in § 22 unter Zuziehung der drei Formeln in § 9, mit fünfstelligen Tafeln, so erhält man den hiebei in Betracht kommenden hyperbolischen Sektor $z^1 = 2{,}52203$. In Folge dessen wäre $x = 4{,}0838$ und $x = -2{,}0419 \pm i\,.\,3{,}3923$. — Benutzt man aber statt der Formeln in § 9 hyperbolische fünfstellige Tafeln, so findet sich: $z^1 = 2{,}52175$, $x = 4{,}0830$ und $x = -2{,}0415 \pm i.\ 3{,}3916$.

Macht man die Rechnung mit siebenstelligen Tafeln, nach den Lambert'schen Formeln in § 9, so wird $z^1 = 2{,}5218584$ und $x = 4{,}083322$ und $x = -2{,}041661 \pm i\,.\,3{,}391922$.

Dasselbe erhalten wir auch nach den Formeln (U), wo $S = 4\frac{1}{12}$, $D = 3\frac{11}{12}$, $D \,.\, Z = 0{,}0000118$, $\frac{S \,.\, Z \sqrt{3}}{2} = 0{,}0000107$ ist.

b) $x^3 = 12\,x + 1000000$.

Hier ist $S = 100{,}04$, $D = 99{,}96$,

$D.Z = 0{,}0000000.021325$, $S \,.\, Z = 0{,}0000000.021342$.

$$\left\{\begin{array}{l} x = 100{,}0399999.978675 \\ x = -\,50{,}0199999.989338 \pm i \,.\, \sqrt{3} \,.\, 49{,}9799999.989329 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} 100{,}04 \\ -50{,}02 \pm i \,.\, 86{,}568. \end{array}\right\}$$

Nur mit grösserer Mühe erhält man nach den Formeln 1, 2, 3 in § 9 bei blosser Benutzung der ersten Differenzen folgende, nicht so genaue Resultate:

Aus Cos $z = 62500$ ergiebt sich $\omega = 90^0 - 3'',3003$.

Daraus folgt $z' = \log \operatorname{cotg} 1'',65015 = 5{,}0969016$.

Durch $\frac{z'}{3}$ findet man den neuen Hilfswinkel $\omega' = 87^0\, 42'\, 30'',448$.

Aus ω' folgt dann weiter:

$$\log \operatorname{Cos} \frac{z}{3} = 1{,}3981106, \quad \log \operatorname{Sin} \frac{z}{3} = 1{,}3977631.$$

Demnach wäre $x = 100{,}0390$ und

$$x = -\,50{,}0195 \pm i \,.\, \sqrt{3} \,.\, 49{,}97963 = -\,50{,}0195 \pm i \,.\, 86{,}56726.$$

c) $x^3 + x = 10$. Dieses schon in § 27 berechnete Beispiel giebt nach den Formeln (V) dieselben Resultate, wie dort, nämlich es ist:

$$\varDelta = 1{,}9997151, \qquad \Sigma = 2{,}3091543.$$
$$\Sigma . \zeta = 0{,}0002851, \qquad \varDelta \,.\, \zeta = 0{,}0002468.$$

Also ist $x = 2$ und $x = -\,1 \pm i \,.\, \sqrt{3} .\; 1{,}1547005 = -\,1 \pm 2 \,.\, i$.

d) Wir nehmen noch einmal das schon in § 28 behandelte 8te Beispiel (Comet 161) auf. Aus $\log g = 3{,}3708655$ und $\varphi = 1$ ergiebt sich $\varDelta = 16{,}688377$, $\Sigma = 16{,}807793$, $\log \zeta = 2{,}1790877 - 10$, $\Sigma . \zeta = 0{,}0000002.5$, also $x = \operatorname{tg} \frac{v}{2} = 16{,}688377 = \varDelta$ und die wahre Anomalie $v = 173^0\, 8'\, 29'',94$, so dass die Abweichung von dem oben durch die Barker'schen Tafeln gewonnenenen Resultate nur $= 0'',01$ ist.

§ 47. Wenn man in der Gleichung $x^3 = 3\,f\,x + 2\,g$ die Werthe von x gefunden hat, und einer der Coefficienten ändert sich ein wenig, so findet man bekanntlich die dadurch veranlasste Aenderung des x durch die Differenzialausdrücke $d\,x = \frac{x \,.\, d\,f}{x^2 - f}$

und $d\,x = \frac{2\,d\,g}{3.(x^2-f)}$. Wir können aber auch diese Aenderungen durch Reihenentwicklungen, die auf den Principien der letzten Paragraphen beruhen, finden und wir wählen den Fall, wenn f sich um ein Geringes ändert.

Zunächst sei f positiv. Weil x die Form $p+q$ und $-\frac{p+q}{2} \pm \frac{p-q}{2} i.\sqrt{3}$ hat, wo $p = \sqrt[3]{g+\sqrt{g^2-f^3}}$ und $q = \sqrt[3]{g-\sqrt{g^2-f^3}}$ ist, so setze man $f^3 = m^2.g^2 + U$, wobei U sehr klein ist.

1) Ist $m > 1$, so schreibe man für diesen irreducibeln Fall

$$p = \sqrt[3]{g + i\sqrt{f^3-g^2}} \text{ und } q = \sqrt[3]{g - i\sqrt{f^2-g^2}}. \text{ Dann ist}$$

$f^3 - g^2 = \delta^2 . g^2 . \left(1 + \frac{U}{\delta^2.g^2}\right)$, wo $\delta^2 = m^2 - 1$ ist. Setzt man ferner $\frac{U}{\delta^2.g^2} = u$, so hat man $p = \sqrt[3]{g}.\sqrt[3]{1 + i\delta + \frac{i\delta}{2}.u}$, $q = \sqrt[3]{g}.\sqrt[3]{1 - i\delta - \frac{i\delta}{2}.u}$.

Nun sei $\lambda = \frac{\delta}{2(1+\delta^2)}(i+\delta)$ und $\lambda' = \frac{\delta}{2(1+\delta^2)}(i-\delta)$, dann ist

$$p = \sqrt[3]{g}.\sqrt[3]{1+i\delta}.(1+\tfrac{1}{3}\lambda u), \quad q = \sqrt[3]{g}.\sqrt[3]{1-i\delta}.(1-\tfrac{1}{3}\lambda u).$$

Demnach ist mit Benutzung von § 12, wenn $\cos z = \frac{1}{m}$ und $\zeta = \frac{z}{3}$ gesetzt wird,

$$p = \sqrt[3]{m\,g}.(\cos\zeta + i\sin\zeta).(1+\tfrac{1}{3}\lambda u), \quad q = \sqrt[3]{m\,g}.(\cos\zeta - i\sin\zeta).(1-\tfrac{1}{3}\lambda' u),$$

also $p + q = \sqrt[3]{m\,g}\left[2\cos\zeta + (\lambda-\lambda').\cos\zeta.\frac{u}{3} + i(\lambda+\lambda').\sin\zeta.\frac{u}{3}\right]$,

$$p - q = \sqrt[3]{m\,g}\left[2\,i\sin\zeta + (\lambda+\lambda').\cos\zeta.\frac{u}{3} + i(\lambda-\lambda').\sin\zeta.\frac{u}{3}\right] \text{ und}$$

$$(\text{w.})\ldots x = \begin{cases} 2\sqrt[3]{m\,g}\left[\cos\zeta + (\tau\cos\zeta - \vartheta.\sin\zeta)\frac{u}{3}\right] \\ -2\sqrt[3]{m\,g}\left[\cos(60\pm\zeta) + [\tau\cos(60\pm\zeta) - \vartheta.\sin(\zeta\pm60)]\frac{u}{3}\right] \end{cases}, \text{ wo } \begin{cases} \tau = \frac{m^2-1}{2.m^2} \\ \vartheta = \frac{\sqrt{m^2-1}}{2.m^2}. \end{cases}$$

Die Aenderungen also, welche die Wurzeln erfahren, wenn f^3 um U wächst, sind $2\sqrt[3]{mg}.(\tau.\cos\zeta - \vartheta.\sin\zeta).\frac{u}{3}$ und $-2\sqrt[3]{mg}.[\tau\cos(60\pm\zeta) - \vartheta.\sin(\zeta\pm60)]\frac{u}{3}$.

2) Ist $m < 1$, so tritt der reducible Fall ein und wir erhalten durch eine Rechnung, die der vorigen analog ist, mit Benutzung von § 13

$$(\text{W.})\,x = \begin{cases} 2\sqrt[3]{m\,g}\left[\operatorname{Cos}\zeta + (\tau\operatorname{Cos}\zeta - \vartheta\operatorname{Sin}\zeta)\frac{u}{3}\right] \\ -\sqrt[3]{m\,g}\left[\operatorname{Cos}\zeta + (\tau\operatorname{Cos}\zeta - \vartheta\operatorname{Sin}\zeta)\frac{u}{3}\right] \pm i\sqrt{3}.\sqrt[3]{m\,g}\left[\operatorname{Sin}\zeta - (\vartheta.\operatorname{Cos}\zeta - \tau\operatorname{Sin}\zeta)\frac{u}{3}\right], \end{cases}$$

wo $u = \frac{U}{(1-m^2)g^2}$, $\tau = \frac{1-m^2}{2.m^2}$, $\vartheta = \frac{\sqrt{1-m^2}}{2.m^2}$, $\operatorname{Cos} z = \frac{1}{m}$, $\zeta = \frac{z}{3}$ ist.

Wenn also f^3 um U wächst, so ist die Aenderung, welche die **reelle** Wurzel dadurch erleidet, $= 2\sqrt[3]{m\,g}\,.\,(\tau \operatorname{Cos}\zeta - \vartheta \operatorname{Sin}\zeta)\frac{u}{3}$ und die Aenderung, welche der **imaginäre** Theil der beiden andern Wurzeln erfährt,

$$= \mp i\sqrt{3}\,.\,\sqrt[3]{m\,g}\,(\vartheta\,.\operatorname{Cos}\zeta - \tau \operatorname{Sin}\zeta)\frac{u}{3}.$$

§ 48. Sollte f negativ sein, so kann nur der **reducible** Fall eintreten. Man setze dann $f = -\varphi$, $U = \varphi^3 - m^2 g^2$, $u = \frac{U}{(m^2+1)\,.\,g^2}$, $\tau = \frac{m^2+1}{2\,m^2}$, $\vartheta = \frac{\sqrt{m^2+1}}{2\,.\,m^2}$, $\operatorname{Sin} z = \frac{1}{m}$, $\zeta = \frac{z}{3}$, dann ist mit Benutzung von § 14

$$x = \begin{cases} 2\sqrt[3]{m\,g}\left[\operatorname{Sin}\zeta + (\tau \operatorname{Sin}\zeta - \vartheta\,.\operatorname{Cos}\zeta)\frac{u}{3}\right] \\ -\sqrt[3]{m\,g}\left[\operatorname{Sin}\zeta + (\tau \operatorname{Sin}\zeta - \vartheta\,.\operatorname{Cos}\zeta)\frac{u}{3}\right] \pm i\sqrt{3}\,.\sqrt[3]{m\,g}\left[\operatorname{Cos}\zeta - (\vartheta\,.\operatorname{Sin}\zeta - \tau \operatorname{Cos}\zeta)\frac{u}{3}\right], \end{cases} \quad (X.)$$

woraus die Aenderungen für x leicht zu entnehmen sind, die dadurch entstehen, dass f^3 um eine kleine Quantität U wächst, deren Quadrat schon zu vernachlässigen ist.

Beispiele.

1) Löst man die Gleichungen $x^3 = 108\,x + 54$ und $\xi^3 = 108{,}021\,\xi + 54$, wo $g = 27$, $f = 36$, $f^1 = 36{,}007$ ist, jede für sich auf, so erhält man:

$$x = \begin{cases} 10{,}60382 \\ -\ 0{,}50117 \\ -\ 10{,}13265 \end{cases},\quad \xi = \begin{cases} 10{,}63478 \\ -\ 0{,}50105 \\ -\ 10{,}13373 \end{cases},\quad d\,x = \begin{cases} 0{,}00096 \\ 0{,}00012 \\ -\ 0{,}00108 \end{cases}$$

Bedient man sich aber der Formeln (w), in denen $m = 8$, $U = 27{,}22129$, $\log u = 6{,}7728406 - 10$, $\log \tau = 9{,}6921305$, $\log \vartheta = 8{,}7924603$ ist, so findet sich: $d\,x = 0{,}00096.592$, $0{,}00009.8153$, $-\ 0{,}00106.16$.

2) Wenn man ferner die beiden Gleichungen: $x^3 + 108\,x = 54$ und $\xi^3 + 108{,}021\,\xi = 54$, wo $\varphi = 36$ $\varphi^1 = 36{,}007$ ist, einzeln auflöst und dabei den in i multiplicirten Theil der Wurzeln respective mit y und v bezeichnet, so erhält man:

$z^1 = 0{,}0541465$	$0{,}0541307$	
$\log \operatorname{Sin}\zeta = 8{,}6182981$	$8{,}6186633$	
$\log \operatorname{Cos}\zeta = 0{,}0003741$	$0{,}0003747$	
$x = 0{,}4988501$	$\xi = 0{,}4987545$	$d\,x = -\ 0{,}0009.56$
$y = 10{,}40129$	$v = 10{,}40229$	$d\,y = 0{,}00100.$

Wendet man aber die Gleichungen (X) an, in denen $\log u = 6{,}7592677$, $\log \tau = 9{,}7057034$, $\log \vartheta = 8{,}7992467$ ist, so findet man:

$$d\,x = -\ 0{,}00009.6350,\quad d\,y = 0{,}00100.61.$$

Druckfehler.

Seite 8 Zeile 16 lies und der statt und das.
„ 10 „ 5 von nnten lies giebt statt gilt.
„ 27 „ 4 von unten im Nenner lies α^2 statt 2.
„ 28 „ 1 lies die zweite Bedingung.
„ 28 „ 4 lies irreducibeln Fall.
„ 28 „ 3 von unten fehlt im Zähler nach $-\frac{\alpha}{2}$ ein Klammerzeichen.
„ 32 „ 2 lies 4,3021 statt 4,0321.
„ 34, 35 und 36 ist statt der Hilfswinkel w und w' zu lesen ω und ω'.
„ 34 Zeile 2 lies § 46 statt § 45.
„ 36 „ 5 von nnten lies § 44 statt § 43.
„ 37 „ 13 lies § 44 statt § 43.
„ 58 „ 9 von unten $-\frac{1}{12}\psi^6$ statt $+\frac{1}{12}\psi^6$.
„ 59 „ 6 lies $-\psi'_{,}{}^{6}$ statt $-\psi'^{6}$.

Bruchstücke aus den neuen Tafeln

zur Berechnung

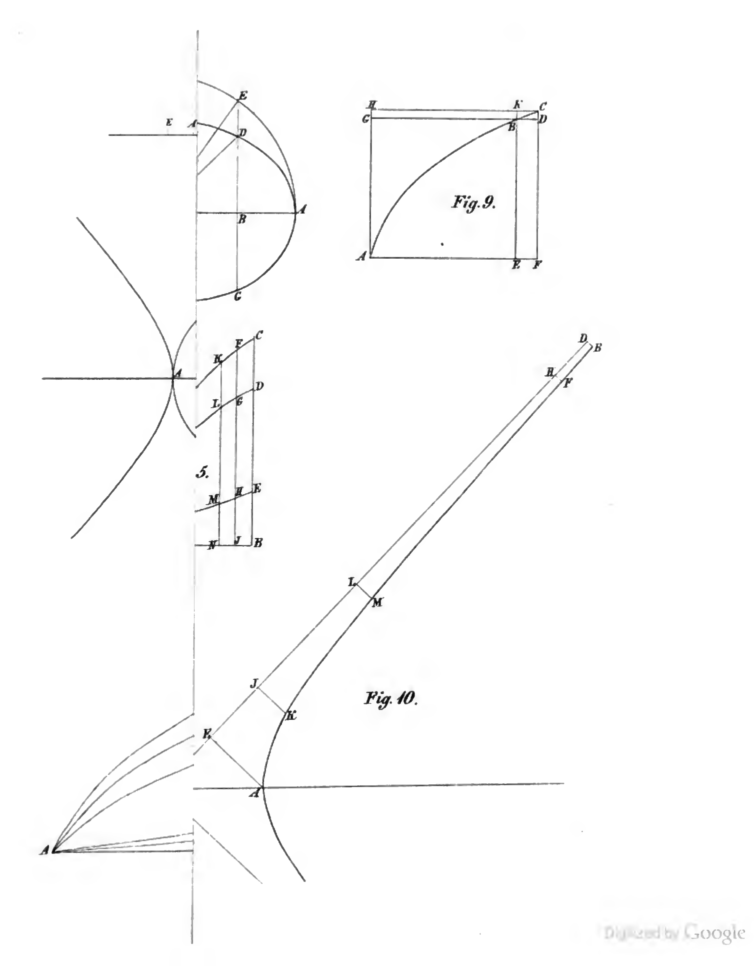
der in der Abhandlung vorkommenden Beispiele.

Der Druck der Tafeln wird in acht Wochen vollendet sein.

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0° 0′ 2″	0,0000042	21	0,0000000	0	4,9856049	1760912
0° 0′ 3″	0,0000063		0,0000000		5,1626961	
0° 0′ 6″	0,0000126	21	0,0000000	0	5,4637261	669468
0° 0′ 7″	0,0000147		0,0000000		5,5306729	
0° 1′ 40″	0,0002106	210	0,0000001	0	6,6855749	413927
0° 1′ 50″	0,0002316		0,0000001		6,7269676	
0° 5′ 0″	0,0006317	210	0,0000005	0	7,1626964	142405
0° 5′ 10″	0,0006527		(6),5.		7,1769369	
0° 17′ 54″	(2),22613.37	21.05	(5),58.87278	.10966	7,7165831	4042
0° 17′ 55″	(2),22634.42		(5),58.98244		7,7169873	
0° 53′ 42″	(2),67842.60	21.03	(4),529.8742	.3289	8,1937357	1348
0° 53′ 43″	(2),67863.63	21.07	(4),530.2031	.3293	8,1938705	1348
0° 53′ 44″	(2),67884.70		(4),530.5324		8,1940053	
2° 1′ 0″	0,0152892	211	0,0002691	7	8,5466909	5983
2° 1′ 10″	0,0153103		0,0002698		8,5472892	
2° 22′ 40″	0,0180284	211	0,0003741	9	8,6182981	5076
2° 22′ 50″	0,0180495	211	0,0003750	8	8,6188057	5070
2° 23′ 0″	0,0180706		0,0003758		8,6193127	
2° 51′ 10″	{0,0216327} {0,0216325.9}	{211 {211.1}	0,0005385	11	8,6975044	4234
2° 51′ 20″	{0,0216538} {0,0216537.0}		0,0005396		8,6979278	
6° 2′	0,0458166	1271	0,0024123	134	9,0240441	12069
6° 3′	0,0459437		0,0024257		9,0252510	
7° 7′	0,0540826	1274	0,0033588	158	9,0963955	10264
7° 8′	0,0542100		0,0033746		9,0974219	
8° 32′	{0,0649220} {0,0649220.0}	{1278 {1277.6}	0,0048336	190	9,1762239	8601
8° 33′	{0,0650498} {0,0650497.6}		0,0048546		9,1770840	
14° 32′	0,1113614	1306	0,0141238	328	9,4130993	5198
14° 33′	0,1114920		0,0141566		9,4142191	
21° 35′	0,16762	13	0,03157	5	9,59725	37
21° 36′	0,16775	14	0,03162	5	9,59762	37
21° 37′	0,16789		0,03167		9,59799	
21° 42′	0,16856	14	0,03192	5	9,59983	36
21° 43′	0,16870		0,03197		9,60019	
22° 5′	0,17169	14	0,03309	5	9,60823	36
22° 6′	0,17183		0,03314		9,60859	
38° 21′	0,31519	16	0,10555	10	9,89827	26
38° 22′	0,31535		0,10565		9,89853	
40° 17′	0,3341368	1657	0,1175572	1071	9,9281713	2561
40° 18′	0,3343025		0,1176643		9,9284274	

ϖ	z'	*Diff.*	*log Cos z*	*Diff.*	*log Sin z*	*Diff.*
44° 43' 44° 44'	0,3797460 0,3799238	1778	0,1483780 0,1485031	1251	9,9957047 9,9959573	2526
55° 8' 55° 9' 55° 10'	0,50304 0,50326 0,50348	22 22	0,24286 0,24304 0,24322	18 18	0,15693 0,15720 0,15746	27 26
55° 20' 55° 21'	0,50570 0,50593	23	0,21504 0,24522	18	0,16016 0,16043	27
56° 3' 56° 4'	0,51534 0,51557	23	0,25300 0,25319	19	0,17183 0,17210	27
56° 39' 56° 40'	0,52355 0,52378	23	0,25983 0,26003	20	0,18169 0,18197	28
59° 59' 60° 0' 60° 1'	0,57169 0,57195 0,57220	26 25	0,30081 0,30103 0,30125	22 22	0,23827 0,23856 0,23885	29 29
63° 26' 63° 27'	0,62694 0,62722	28	0,34926 0,34971	25	0,30100 0,30132	32
64° 9' 64° 10'	0,63924 0,63953	29	0,36050 0,36076	26	0,31471 0,31503	32
66° 47' 66° 48'	0,68735 0,68767	32	0,40427 0,40457	30	0,36760 0,36795	35
73° 34' 73° 35'	0,84044 0,84089	45	0,54837 0,54880	43	0,53025 0,53072	47
74° 4' 74° 5'	0,94559 0,94616	57	0,65011 0,65066	55	0,63895 0,63953	58
81° 42' 81° 43'	1,1393141 1,1401901	8760	0,8405646 0,8114314	8668	0,8359917 0,8368769	8852
83° 9' 83° 10'	1,2229443 1,2240048	10605	0,9234671 0,9245201	10530	0,9203559 0,9214240	10681
86° 55' 20" 86° 55' 30"	1,57081 1,57120	39	1,27009 1,27049	40	1,26947 1,26986	39
87° 47' 87° 48'	1,71340 1,71668	328	1,41253 1,41581	328	1,41221 1,41549	328
88° 29' 30" 88° 29' 40"	1,88063 1,88143	80	1,57968 1,58048	80	1,57952 1,58033	81
88° 36' 50" 88° 37' 0"	1,91733 1,91820	87	1,61637 1,61724	87	1,61624 1,61711	87
89° 0' 20" 89° 0' 30"	2,06156 2,06278	122	1,76056 1,76178	122	1,76050 1,76171	121
89° 39 10" 89° 39 20"	2,51854 2,52203	349	2,21752 2,22101	349	2,21751 2,22100	349
89° 58' 30" 89° 58' 40"	3,6612126 3,7123651	511525	3,3601826 3,4113352	511526	3,3601826 3,4113351	511525.

Danzig, Druck von A. W. Kafemann.


E
A
E
D
A
B
G
H
K
C
G
D
B
Fig. 9.
A
E
F
C
K
F
D
L
G
A
5.
M
H
E
N
J
B
D
B
H
F
L
M
J
Fig. 10.
K
E
A
A

NEUESTE

SCHRIFTEN

DER

NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT

IN

DANZIG.

SECHSTEN BANDES VIERTES HEFT.

DANZIG.

AUF KOSTEN DER NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT.

1862.

TAFELN

für die

HYPERBOLISCHEN SECTOREN

und für die

Logarithmen ihrer Sinus und Cosinus.

Zu der Abhandlung: Auflösung der kubischen Gleichungen.

Von

Johann Friedrich Wilhelm.
J. F. W. GRONAU,
Oberlehrer an der Realschule zu St. Johann in Danzig.

DANZIG.
1862.

Vorrede.

Für Diejenigen, welchen meine Abhandlung über die kubischen Gleichungen zur Hand ist, habe ich nur wenig zu sagen. Es ist dort (pag. 50) darauf aufmerksam gemacht, dass wenn man die Resultate etwa auf fünf Stellen genau haben will, die hyperbolischen Sektoren (z) fünf geltende Ziffern enthalten müssen und demnach habe ich der Kürze wegen die Bezeichnung $z' = 0{,}00067.377 = (3)67.377$ eingeführt. Obgleich bei den andern Rubriken eine solche Sorgfalt nicht in demselben Masse nöthig gewesen wäre, so habe ich die Mühe nicht gescheut, auch hier stets fünf geltende Ziffern zu geben, dem Rechner überlassend, die für ihn etwa entbehrlichen letzten Ziffern sich in Gedanken abzuschneiden, wobei ich bei log. Sin z stets durch das Hinsetzen eines Punktes nach der fünften Decimalstelle zu Hilfe gekommen bin. Sollte Jemand bei dieser dritten Rubrik von $\omega = 38^0\ 28'$ ab bis $\omega = 45^0$, wo vorne mehrere Neunen stehen, noch eine entsprechende Anzahl von Stellen mehr brauchen, so darf er nur von den zugehörigen Hilfswinkeln (ω) die Complemente nehmen und die diesen entsprechenden log. Sin z und deren Differenz benutzen.

Da meine Tafeln mit (9)51039 anfangen, so ist ersichtlich, dass sämmtliche vorhandenen logarithmischen Hilfsmittel mir nicht genügen konnten und ich schon aus diesem Grunde, selbst unter Voraussetzung ihrer vollkommenen Richtigkeit, viele Zahlen durch die in der Abhandlung angegebenen Reihenentwicklungen selbstständig berechnen musste, um für die in den Tafeln enthaltenen fünf geltenden Ziffern überall einstehen zu können. Die pag. 51 gegebene Reihe für log. Cos z musste zu diesem Zwecke noch um ein Glied weiter berechnet werden und lautet dann also:

$$\log \operatorname{Cos} z = \left(\frac{M}{2}\Pi^2\right)\omega_{''}^2 + \left(\frac{M}{12}\Pi^4\right)\omega_{''}^4 + \left(\frac{M}{45}\Pi^6\right)\omega_{''}^6 + \left(\frac{263}{4032}.\,M.\Pi^8\right)\omega_{''}^8 + \ldots$$

wo $\Pi = \frac{\pi}{180.3600}$, $\omega_{''}$ den Werth von ω in Sekunden ausgedrückt bedeutet, und wo die Logarithmen der vier eingeklammerten Coefficienten 8.70790.40492.84 — 20, 7.30090.25325 — 30, 6,09802.10 — 40 und 5.93682 — 50 sind.

Bei dieser Gelegenheit habe ich in Vega's Thesaurus folgende Fehler gefunden:*)

---

*) Die grössten Fehler, auf welche Gauss (Astron. Nachrichten Nr. 756: Einige Bemerkungen zu Vega's Thesaurus Logarithmorum) aufmerksam macht, befinden sich bei log. tg. $15^0\ 40'\ 20''$, $15^0\ 41'\ 30''$, $1^0\ 20'\ 10''$, $1^0\ 20'\ 15''$ und betragen $\pm$ 4 Einheiten in der zehnten Decimale. — Der Fehler in der 8. Decimale bei log. cotg. $9^0\ 5'\ 50''$ (Astron. Nachr. Nr. 1047), welcher übrigens auch in Vlacq vorkommt, dürfte nicht zu den „sphalmatibus computationem turbantibus" gezählt werden, auf deren Entdeckung Vega einst einen Preis setzte, da sowohl die Differenz an dieser Stelle, als auch der betreffende log. tg. richtig angegeben ist.

log. tg.	Vega	Anstatt	Fehler
0° 21' 50"	7,80285,20017	7,80285,20017,62	+ 0,62
0° 35' 5"	8,00884,20446	8,00884,20444,4	— 1,6
1° 29' 30"	8,41564,72892	8,41564,72889,0	— 3,0
2° 58' 30"	8,71575,48772	8,71575,48771,3	— 0,7
45° 21' 50"	(2)551,66084	(2)551,66082,96	— 1,04
45° 22' 20"	(2)564,29500	(2)564,29498,68	— 1,32
45° 24' 40"	(2)623,25501	(2)623,25503,54	+ 2,54
45° 32' 50"	(2)829,62495	(2)829,62496,44	+ 1,44
46° 29' 30"	(1)2262,34999	(1)2262,34998,1	— 0,9
47° 58' 30"	(1)4518,14999	(1)4518,14993,4	— 5,6*)
log. sec.			
0° 1' 30"	(7)414	(7)413,4177	— 0,5823
1' 40"	(7)511	(7)510,3922	— 0,6078
2' 20"	(6)1001	(6)1000,369	— 0,631
2' 30"	(6)1149	(6)1148,384	— 0,616
4' 50"	(6)4293	(6)4292,399	— 0,601
5' 20"	(6)5227	(6)5226,419	— 0,581
5' 30"	(6)5559	(6)5558,172	— 0,828
5' 40"	(6)5901	(6)5900,137	— 0,863
5' 50"	(6)6253	(6)6252,308	— 0,692
6' 10"	(6)6988	(6)6987,273	— 0,727
6' 20"	(6)7371	(6)7370,067	— 0,933
6' 30"	(6)7764	(6)7763,070	— 0,930
6' 40"	(6)8167	(6)8166,281	— 0,719
7' 0"	(6)9004	(6)9003,325	— 0,675
7' 10"	(6)9438	(6)9437,158	— 0,842
7' 20"	(6)9882	(6)9881,201	— 0,799
7' 30"	(5)10336	(5)10335,451	— 0,549
8' 0"	(5)11760	(5)11759,45	— 0,55
10' 30"	(5)20258	(5)20257,49887	— 0,5011
12' 40"	(5)29481	(5)29480,32	— 0,68
12' 50"	(5)30262	(5)30261,22	— 0,78
13' 0"	(5)31053	(5)31052,33	— 0,67
13' 20"	(5)32666	(5)32665,18	— 0,82
13' 30"	(5)33488	(5)33486,93	— 1,07
13' 40"	(5)34320	(5)34318,86	— 1,14
13' 50"	(5)35162	(5)35161,01	— 0,99
14' 0"	(5)36014	(5)36013,37	— 0,63
14' 10"	(5)36877	(5)36875,94	— 1,06
14' 20"	(5)37750	(5)37748,72	— 1,28
14' 30"	(5)38633	(5)38631,69	— 1,31
14' 40"	(5)39526	(5)39524,89	— 1,11
14' 50"	(5)40429	(5)40428,29	— 0,71
16' 40"	(5)51040	(5)51039,42	— 0,58
16' 50"	(5)52066	(5)52065,32	— 0,68
17' 0"	(5)53102	(5)53101,43	— 0,57
17' 20"	(5)55205	(5)55204,26	— 0,74
17' 30"	(5)56272	(5)56270,99	— 1,01
17' 40"	(5)57349	(5)57347,92	— 1,08
17' 50"	(5)58436	(5)58435,07	— 0,93

log. sec	Vega	Anstatt	Fehler
0° 18' 0"	(5)59533	(5)59532,42	— 0,58
20' 40"	(5)78479	(5)78478,38	— 0,62
20' 50"	(5)79750	(5)79749,28	— 0,72
21' 0"	(5)81031	(5)81030,38	— 0,62
22' 10"	(5)90283	(5)90283,91	+ 0,91
22' 20"	(5)91646	(5)91646,67	+ 0,67
22' 30"	(5)93019	(5)93019,64	+ 0,64
22' 40"	(5)94402	(5)94402,83	+ 0,83
22' 50"	(5)95795	(5)95796,22	+ 1,22
23' 0"	(5)97199	(5)97199,83	+ 0,83
23' 10"	(5)98613	(5)98613,62	+ 0,62
23' 40"	(4)102915	(4)102916,3	+ 1,3
24' 0"	(4)105835	(4)105835,79	+ 0,79
24' 20"	(4)108795	(4)108796,1	+ 1,1
31' 40"	(4)184255	(4)184254,2	— 0,8
32' 0"	(4)188155	(4)188153,7	— 1,3
32' 20"	(4)192095	(4)192094,0	— 1,0
33' 40"	(4)208265	(4)208263,7	— 1,3
34' 20"	(4)216595	(4)216593,6	— 1,4
35' 20"	(4)229396	(4)229394,7199	— 1,28
35' 30"	(4)231565	(4)231564,0	— 1,0
39' 20"	(4)284275	(4)284274,2557	— 0,74
44' 40"	(4)366595	(4)366594,4259	— 0,57
53' 30"	(4)525936	(4)525934,4818	— 1,52
54' 10"	(4)539125	(4)539124,0950	— 0,91
56' 30"	(4)586575	(4)586574,2558	— 0,74
1° 0' 40"	(4)676285	(4)676284,3842	— 0,62
2' 50"	(4)725455	(4)725455,7571	+ 0,76
4' 30"	(4)764455	(4)764454,1826	— 0,82
7' 40"	(4)841365	(4)841364,4580	— 0,54
7' 50"	(4)845515	(4)845514,4840	— 0,52
9' 20"	(4)883325	(4)883324,2531	— 0,75
13' 20"	(4)988195	(4)988194,2949	— 0,71
20' 0"	(3)1176051	(3)1176049,8417	— 1,16
2° 1' 40"	(3)2720419	(3)2720418,151	— 0,85
2' 20"	(3)2750350	(3)2750349,274	— 0,73
2' 30"	(3)2757851	(3)2757850,1064	— 0,89
19' 50"	(3)3593750	(3)3593749,205	— 0,80
38' 40"	(3)4627349	(3)4627348,373	— 0,63
43' 0"	(3)4883651	(3)4883650,250	— 0,75
50' 20"	(3)5333149	(3)5333147,809	— 1,19
50' 40"	(3)5354051	(3)5354050,201	— 0,80
3° 2' 10"	(3)6100252	(3)6100251,290	— 0,71
22' 50"	(3)7563754	(3)7563753,163	— 0,84
23' 10"	(3)7588649	(3)7588648,414	— 0,59
29' 0"	(3)8030949	(3)8030948,474	— 0,53
30' 50"	(3)8172550	(3)8172550,976	+ 0,98
38' 10"	(3)8751351	(3)8751350,476	— 0,52
42' 40"	(3)9116348	(3)9116347,441	— 0,56
45' 10"	(3)9322353	(3)9322352,454	— 0,55

In Betreff der Anwendung meiner Tafeln auf Integrationen habe ich noch einige Bemerkungen zu machen. So wie nämlich, abgesehen von der Constante,

$$\left.\begin{aligned}
&\int \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = \text{arc}\,(\sin = v)\\
&\int -\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = \text{arc}\,(\cos = v)\\
&\int \frac{dv}{1+v^2} = \text{arc}\,(\text{tg} = v)\\
&\int -\frac{dv}{1+v^2} = \text{arc}\,(\text{cotg} = v)\\
&\int \frac{dv}{v\sqrt{v^2-1}} = \text{arc}\,(\sec = v)\\
&\int -\frac{dv}{v\sqrt{v^2-1}} = \text{arc}\,(\text{cosec} = v)\\
&\int \frac{dv}{\sqrt{2av-v^2}} = \text{arc}\left(\cos = \frac{a-v}{a}\right)\\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right\}\ \text{so ist auch}\ \left\{\begin{aligned}
&\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+1}} = \text{Arc}\,(\text{Sin} = v)\\
&\int \frac{dv}{\sqrt{v^2-1}} = \text{Arc}\,(\text{Cos} = v)\\
&\int \frac{dv}{1-v^2} = \text{Arc}\,(\text{Tg} = v)\\
&\int -\frac{dv}{v^2-1} = \text{Arc}\,(\text{Cotg} = v)\\
&\int -\frac{dv}{v\sqrt{1-v^2}} = \text{Arc}\,(\text{Sec} = v)\\
&\int \frac{dv}{v\sqrt{1+v^2}} = \text{Arc}\,(\text{Cosec} = v)\\
&\int \frac{dv}{\sqrt{2av+v^2}} = \text{Arc}\left(\text{Cos} = \frac{a+v}{a}\right)\\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right.$$

worüber etwa Klügels Wörterbuch, Integralformel 9, 12, 50 bis 56 und vor Allem Gudermann's schon erwähnte Theorie der cyklisch-hyperbolischen Functionen pag. 21 und 113 zu vergleichen ist. Man wird also in Zukunft nicht nöthig haben, die letzten Integrale durch die immer etwas unbequemen logarithmischen Functionen, oder durch Einführung von Hilfswinkeln zu berechnen, sondern man wird sich zu diesem Zwecke mit Leichtigkeit der neuen Tafeln für die hyperbolischen Functionen bedienen können.

Nun könnte es befremden, dass ich nicht die hyperbolischen Sektoren selber, die z, gegeben habe, sondern die z^1, welche $= M.z$ sind, wo M der bekannte Modul ist. Aber einerseits ist die Reduction auf z nicht schwieriger, als bei den alten Tafeln die Reduction der Winkel auf Bogenlängen, andererseits haben die z^1 bei Berechnung der Proportionaltheile vor den z einen entschiedenen Vorzug, wenn ω und also auch die Differenzen gross werden (etwa von $\omega = 75^0$ ab). Da nämlich dann die Differenzen der z^1 den entsprechenden Differenzen der andern Columnen allmählig immer mehr gleich werden, wovon der Grund in der Form der drei eine stetige Porportion bildenden Differentialen

$$d \log \text{Cos}\, z = \frac{M.\, d\,\omega}{\cos\,\omega}.\ \sin\,\omega,\ \ d\,z^1 = \frac{M.\, d\,\omega}{\cos\,\omega}.\ 1,\ \ d \log \text{Sin}\, z = \frac{M.\, d\,\omega}{\cos\,\omega}.\ \frac{1}{\sin\,\omega}$$

liegt, so macht die Interpolation bei der vorliegenden Einrichtung der neuen Tafeln allmählig immer weniger Mühe, während sie sonst, wenn die Tafeln die z enthielten, allmählig immer beschwerlicher ausfallen würde.

Ferner wäre es in Beziehung auf die Integralrechnung wünschenswerth, wenn die neuen Tafeln auch die hyperbolischen Tangenten, Cotangenten, Sekanten und Cosekanten (Tg z = sin ω, Cotg z = cosec ω, Sec z = cos ω, Cosec z = cotg ω) enthielten; indess vertrug sich die Herbeiziehung derselben einmal nicht mit dem speciellen Zweck der Tafeln, und dann kann man sich auch, so oft man auf diese Grössen stösst, leicht anderweitig helfen, z. B. im dritten Falle rechter Hand in folgender Weise:

Gesetzt man hätte $\int \frac{dv}{1-v^2}$ von $v = o$ bis $v =$ num. log. 9,95381 — 10 zu berechnen.

1) Die alten Tafeln geben, wenn log. sin $\omega = 9{,}95381$ ist, $\omega = 64^0\ 2'\ 30''$, und die neuen Tafeln für dieses ω den gesuchten hyperbolischen Sektor Arc (Tg = v) $= \frac{0.63735}{M}$.

2) Um während der ganzen Rechnung in den neuen Tafeln bleiben zu können, nehme man zu dem gegebenen log. v die dekadische Ergänzung 0,04619, welche = log. sec $(90 - \omega)$ ist. Sucht man diese Ergänzung (1)46190 in der Rubrik für log. Cos z, so erhält man durch die Proportion 6.2: 3.5 = 60'': $\underline{34''}$, dass $90 - \omega = 25^0\ 57'\ 34''$, $\omega = 64^0\ 2'\ 26''$, also Arc $= \frac{0.63734}{M}$ ist.

Wenn aber einst die neuen Tafeln durch Einverleibung der Logarithmen der Kreissinus die alten Tafeln werden überflüssig gemacht haben, dann wird man durch die blosse Proportion 6 : 3 = 29: $\underline{14}$ erfahren, dass zu log Tg = 9,95381, $z' = 0.63735$ gehört.

Uebrigens darf ich nicht verschweigen, dass Gudermann's Tafeln die hyperbolischen Tangenten enthalten; aber abgesehen von dem, was ich über seine mühsame Arbeit in der Abhandlung (pag. 3) gesagt habe, können leider seine Tafeln schon aus dem Grunde nicht ohne Weiteres die Bausteine zu den in Aussicht gestellten, allseitig befriedigenden Tafeln liefern, weil seine hyperbolischen Functionen sich nicht dem Lambertschen transcendenten Winkel ω und dessen regelmässigem Wachsthum anschmiegen, sondern bei ihm die hyperbolischen Sektoren selber (von $z = 2$ bis $z = 12$) regelmässig wachsen.

Noch ist zu erwähnen, dass ein geehrter Leser der Abhandlung mir den sehr beachtenswerthen Vorschlag macht, die pag. 20 aufgestellten, die kubischen Gleichungen auflösenden Systeme von je drei Formen folgender Massen in eine Form zusammen zu ziehen:

I. Für den irreducibleu Fall:

$x = (-1)^n\ 2\sqrt{f}.\ \cos\left(\frac{z}{3} + n\ 60^0\right)$, wobei $\cos z = \frac{g}{\sqrt{f^3}}$ und $n = 0, -1, +1$.

II. Für den reduciblen Fall, 1) wenn $g^2 > f^3 > 0$:

$x = (-1)^n\ 2\sqrt{f}.\ \mathrm{Cos}\left(\frac{z}{3} + i\, n\ 60^0\right)$, wobei Cos $z = \frac{g}{\sqrt{f^3}}$ und $n = 0, -1, +1$.

2) wenn f. negativ ist:

$x = (-1)^n\ 2\sqrt{-f}.\ \mathrm{Sin}\left(\frac{z}{3} + i\, n\ 60^0\right)$, wobei Sin $z = \frac{g}{\sqrt{-f^3}}$ und $n = 0, -1, +1$.

Auch will ich wegen einer Erinnerung im literarischen Centralblatt vom 30. Novbr. c. ausdrücklich hervorheben, dass von den bei Auflösung des reducibeln. Falles bisher üblich gewesenen zwei Hilfswinkeln der eine $h = 90^0 - \omega$ ist, worüber ich pag. 34, 25 und 10 zu vergleichen bitte.

Schliesslich bemerke ich, dass mich bei Anfertigung der Tafeln der Baueleve Herr A. F. L. Bauer unterstützt hat.

Danzig, 6. December 1861.

Der Verfasser.

$\omega = 0$ Grad.

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0'						
10	(4).21055	2.1055	(9).51039	15312	5.68557	30103
20	(4).42110	2.1056	(8).20416	25519	5.98660	17610
30	(4).63166	2.1055	(8).45935	35728	6.16270	12493
40	(4).84221	2.106	(8).81663	4594	6.28763	9691
50	(3).10528	2.105	(7).12760	5614	6.38454	7919
1'	(3).12633	2.106	(7).18374	6635	6.46373	6694
10	(3).14739	2.105	(7).25009	7656	6.53067	5799
20	(3).16844	2.106	(7).32665	8677	6.58866	5166
30	(3).18950	2.105	(7).41342	9697	6.63982	4575
40	(3).21055	2.106	(7).51039	10718	6.68557	4140
50	(3).23161	2.105	(7).61757	11739	6.72697	3779
2'	(3).25266	2.106	(7).73496	12760	6.76476	3476
10	(3).27372	2.105	(7).86256	1378	6.79952	3218
20	(3).29477	2.106	(6).10004	1480	6.83170	2997
30	(3).31583	2.105	(6).11484	1582	6.86167	2802
40	(3).33688	2.106	(6).13066	1684	6.88969	2633
50	(3).35794	2.105	(6).14750	1787	6.91602	2483
3'	(3).37899	2.106	(6).16537	1888	6.94085	2348
10	(3).40005	2.105	(6).18425	1991	6.96433	2227
20	(3).42110	2.106	(6).20416	2092	6.98660	2119
30	(3).44216	2.105	(6).22508	2195	7.00779	2021
40	(3).46321	2.106	(6).24703	2297	7.02800	1930
50	(3).48427	2.105	(6).27000	2399	7.04730	1849
4'	(3).50532	2.106	(6).29399	2501	7.06579	1773
10	(3).52638	2.106	(6).31900	2603	7.08352	1703
20	(3).54744	2.105	(6).34503	2705	7.10055	1639
30	(3).56849	2.106	(6).37208	2807	7.11694	1579
40	(3).58955	2.105	(6).40015	2909	7.13273	1524
50	(3).61060	2.106	(6).42924	3011	7.14797	1473
5'	(3).63166	2.105	(6).45935	3114	7.16270	1424
10	(3).65271	2.106	(6).49049	3215	7.17694	1379
20	(3).67377	2.105	(6).52264	3318	7.19073	1336
30	(3).69482	2.106	(6).55582	3419	7.20409	1296
40	(3).71588	2.105	(6).59001	3522	7.21705	1259
50	(3).73693	2.106	(6).62523	3624	7.22964	1224
6'	(3).75799	2.105	(6).66147	3726	7.24188	1190
10	(3) 77904	2.106	(6).69873	3828	7.25378	1158
20	(3).80010	2.105	(6).73701	3930	7.26536	1128
30	(3).82115	2.106	(6).77631	4032	7.27664	1100
40	(3).84221	2.105	(6).81663	4134	7.28764	1072
50	(3).86326	2.106	(6).85797	4236	7.29836	1046
7	(3).88432	2.105	(6).90033	4339	7.30882	1022
10	(3).90537	2.106	(6).94372	4440	7.31904	999
20	(3).92643	2.105	(6).98812	454	7.32903	976
30	(3).94748	2.106	(5).10335	465	7.33879	954
40	(3).96854	2.105	(5).10800	475	7.34883	934
50	(3).98959	2.11	(5).11275	484	7.35767	915
8'	(2).10107	2.10	(5) 11759	496	7.36682	895
10	(2).10317	2.11	(5).12255	505	7.37577	878
20	(2).10528	2.10	(5).12760	515	7.38455	860
30	(2).10738	2.11	(5) 13275	526	7.39315	843
40	(2).10949	2.10	(5).13801	536	7.40158	827
50	(2).11159	2.11	(5).14337	546	7.40985	812
9'	(2).11370	2.10	(5).14883	556	7.41797	797
10	(2).11580	2.11	(5).15439	567	7.42594	782
20	(2).11791	2.10	(5).16006	577	7.43376	769
30	(2).12001	2.11	(5).16583	587	7.44145	755
40	(2).12212	2.11	(5).17170	597	7.44900	743
50	(2).12423	2.10	(5).17767	607	7.45643	730
10'	(2).12633		(5).18374		7.46373	

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
10'	(2).12633	2.11	(5).18374	617	7.46373	718
10	(2).12844	2.10	(5).18992	628	7.47091	706
20	(2).13054	2.11	(5).19620	637	7.47797	695
30	(2).13265	2.10	(5).20257	649	7.48492	684
40	(2).13475	2.11	(5).20906	658	7.49176	973
50	(2).13686	2.10	(5).21564	669	7.49849	663
11'	(2).13896	2.11	(5).22233	679	7.50512	653
10	(2).14107	2.11	(5).22912	689	7.51165	644
20	(2).14318	2.10	(5).23601	699	7.51809	634
30	(2).14528	2.11	(5).24300	709	7.52443	624
40	(2).14739	2.10	(5).25009	720	7.53067	616
50	(2).14949	2.11	(5).25729	730	7.53683	608
12'	(2).15160	2.10	(5).26459	740	7.54291	599
10	(2).15370	2.11	(5).27199	750	7.54890	591
20	(2).15581	2.10	(5).27949	761	7.55481	583
30	(2).15791	2.11	(5).28710	770	7.56064	575
40	(2).16002	2.11	(5).29480	781	7.56639	568
50	(2).16213	2.10	(5).30261	791	7.57207	560
13'	(2).16423	2.11	(5).31052	802	7.57767	553
10	(2).16634	2.10	(5).31854	811	7.58320	547
20	(2).16844	2.11	(5).32665	822	7.58867	539
30	(2).17055	2.10	(5).33487	832	7.59406	533
40	(2).17265	2.11	(5).34319	842	7.59939	527
50	(2).17476	2.10	(5).35161	852	7.60466	520
14'	(2).17686	2.11	(5).36013	863	7.60986	514
10	(2).17897	2.11	(5).36876	873	7.61500	508
20	(2).18108	2.10	(5).37749	883	7.62008	502
30	(2).18318	2.11	(5).38632	893	7.62510	496
40	(2).18529	2.10	(5).39525	903	7.63006	491
50	(2).18739	2.11	(5).40428	914	7.63497	485
15'	(2).18950	2.10	(5).41342	924	7.63982	480
10	(2).19160	2.11	(5).42266	934	7.64462	475
20	(2).19371	2.10	(5).43200	944	7.64937	469
30	(2).19581	2.11	(5).44144	954	7.65406	465
40	(2).19792	2.11	(5).45098	965	7.65871	459
50	(2).20003	2.10	(5).46063	975	7.66330	455
16'	(2).20213	2.11	(5).47038	985	7.66785	450
10	(2).20424	2.10	(5).48023	995	7.67235	445
20	(2).20634	2.11	(5).49018	1006	7.67680	441
30	(2).20845	2.10	(5).50024	1015	7.68121	437
40	(2).21055	2.11	(5).51039	1026	7.68558	432
50	(2).21266	2.10	(5).52065	1036	7.68990	428
17'	(2).21476	2.11	(5).53101	1047	7.69418	424
10	(2).21687	2.10	(5).54148	1056	7.69842	419
20	(2).21897	2.11	(5).55204	1067	7.70261	416
30	(2).22108	2.11	(5).56271	1077	7.70677	411
40	(2).22319	2.10	(5).57348	1087	7.61088	408
50	(2).22529	2.11	(5).58435	1097	7.71496	404
18'	(2).22740	2.10	(5).59532	1108	7.71900	401
10	(2).22950	2.11	(5).60640	1118	7.72301	396
20	(2).23161	2.10	(5).61758	1128	7.72697	393
30	(2).23371	2.11	(5).62886	1138	7.73090	390
40	(2).23582	2.10	(5).64024	1148	7.73480	386
50	(2).23792	2.11	(5).65172	1159	7.73866	382
19'	(2).24003	2.11	(5).66331	1169	7.74248	380
10	(2).24214	2.10	(5).67500	1179	7.74628	376
20	(2).24424	2.11	(5).68679	1189	7.75004	373
30	(2).24635	2.10	(5).69868	1199	7.75377	369
40	(2).24845	2.41	(5).71067	1210	7.75746	367
50	(2).25056	2.10	(5).72277	1220	7.76113	363
20'	(2).25266		(5).73497		7.76476	

$\omega = 0$ Grad.

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
20'	(2).25266	2.11	(5).73497	1230	7.76476	361
10	(2).25477	2.10	(5).74727	1240	7.76837	357
20	(2).25687	2.11	(5).75967	1251	7.77194	355
30	(2).25898	2.11	(5).77218	1260	7.77549	351
40	(2).26109	2.10	(5).78478	1271	7.77900	349
50	(2).26319	2.11	(5).79749	1281	7.78249	346
21'	(2).26530	2.10	(5).81030	1292	7.78595	343
10	(2).26740	2.11	(5).82322	1301	7.78938	341
20	(2).26951	2.10	(5).83623	1312	7.79279	338
30	(2).27161	2.11	(5).84935	1322	7.79617	335
40	(2).27372	2.10	(5).86257	1332	7.79952	333
50	(2).27582	2.11	(5).87589	1342	7.80285	330
22'	(2).27793	2.11	(5).88931	1353	7.80615	328
10	(2).28004	2.10	(5).90284	1363	7.80943	326
20	(2).28214	2.11	(5).91647	1373	7.81269	322
30	(2).28425	2.10	(5).93020	1383	7.81591	321
40	(2).28635	2.11	(5).94403	1393	7.81912	318
50	(2).28846	2.10	(5).95796	1404	7.82230	316
23'	(2).29056	2.11	(5).97200	1414	7.82546	314
10	(2).29267	2.10	(5).98614	1423	7.82860	311
20	(2).29477	2.11	(4).10004	143	7.83171	309
30	(2).29688	2.11	(4).10147	145	7.83480	307
40	(2).29899	2.10	(4).10292	145	7.83787	305
50	(2).30109	2.11	(4).10437	147	7.84092	302
24'	(2).30320	2.10	(4).10584	147	7.84394	301
10	(2).30530	2.11	(4).10731	149	7.84695	298
20	(2).30741	2.10	(4).10880	149	7.84993	297
30	(2).30951	2.11	(4).11029	151	7.85290	294
40	(2).31162	2.11	(4).11180	151	7.85584	293
50	(2).31373	2.10	(4).11331	153	7.85877	290
25'	(2).31583	2.11	(4).11484	154	7.86167	289
10	(2).31794	2.10	(4).11638	154	7.86456	287
20	(2).32004	2.11	(4).11792	156	7.86743	284
30	(2).32215	2.10	(4).11948	157	7.87027	283
40	(2).32425	2.11	(4).12105	157	7.87310	281
50	(2).32636	2.10	(4).12262	159	7.87591	280
26'	(2).32846	2.11	(4).12421	160	7.87871	277
10	(2).33057	2.11	(4).12581	161	7.88148	276
20	(2).33268	2.10	(4).12742	161	7.88424	274
30	(2).33478	2.11	(4).12903	163	7.88698	272
40	(2).33689	2.10	(4).13066	164	7.88970	271
50	(2).33899	2.11	(4).13230	165	7.89241	269
27'	(2).34110	2.10	(4).13395	166	7.89510	267
10	(2).34320	2.11	(4).13561	167	7.89777	266
20	(2).34531	2.10	(4).13728	168	7.90043	264
30	(2).34741	2.11	(4).13896	169	7.90307	262
40	(2).34952	2.11	(4).14065	169	7.90569	261
50	(2).35163	2.10	(4).14234	171	7.90830	259
28'	(2).35373	2.11	(4).14405	172	7.91089	258
10	(2).35584	2.10	(4).14577	174	7.91347	256
20	(2).35794	2.11	(4).14751	174	7.91603	255
30	(2).36005	2.10	(4).14925	175	7.91858	253
40	(2).36215	2.11	(4).15100	176	7.92111	252
50	(2).36426	2.10	(4).15276	177	7.92363	250
29'	(2).36636	2.11	(4).15453	178	7.92613	249
10	(2).36847	2.11	(4).15631	179	7.92862	248
20	(2).37058	2.10	(4).15810	180	7.93110	246
30	(2).37268	2.11	(4).15990	181	7.93356	245
40	(2).37479	2.10	(4).16171	183	7.93601	243
50	(2).37689	2.11	(4).16354	183	7.93844	242
30'	(2).37900		(4).16537		7.94086	

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
30'	(2).37900	2.10	(4).16537	184	7.94086	240
10	(2).38110	2.11	(4).16721	185	7.94326	240
20	(2).38321	2.11	(4).16906	187	7.94566	238
30	(2).38532	2.10	(4).17093	187	7.94804	236
40	(2).38742	2.11	(4).17280	188	7.95040	236
50	(2).38953	2.10	(4).17468	190	7.95276	234
31'	(2).39163	2.11	(4).17658	190	7.95510	233
10	(2).39374	2.10	(4).17848	192	7.95743	231
20	(2).39584	2.11	(4).18040	192	7.95974	231
30	(2).39795	2.10	(4).18232	193	7.96205	229
40	(2).40005	2.11	(4).18425	195	7.96434	228
50	(2).40216	2.11	(4).18620	195	7.96662	227
32'	(2).40427	2.10	(4).18815	197	7.96889	225
10	(2).40637	2.11	(4).19012	197	7.97114	225
20	(2).40848	2.10	(4).19209	199	7.97339	223
30	(2).41058	2.11	(4).19408	200	7.97562	222
40	(2).41269	2.10	(4).19608	200	7.97784	221
50	(2).41479	2.11	(4).19808	202	7.98005	220
33'	(2).41690	2.10	(4).20010	202	7.98225	219
10	(2).41900	2.11	(4).20212	204	7.98444	218
20	(2).42111	2.11	(4).20416	205	7.98662	216
30	(2).42322	2.10	(4).20621	205	7.98878	216
40	(2).42532	2.11	(4).20826	207	7.99094	214
50	(2).42743	2.10	(4).21033	208	7.99308	214
34'	(2).42953	2.11	(4).21241	209	7.99522	212
10	(2).43164	2.10	(4).21450	209	7.99734	212
20	(2).43374	2.11	(4).21659	211	7.99946	210
30	(2).43585	2.11	(4).21870	212	8.00156	209
40	(2).43796	2.10	(4).22082	213	8.00365	209
50	(2).44006	2.11	(4).22295	214	8.00574	207
35'	(2).44217	2.10	(4).22509	215	8.00781	206
10	(2).44427	2.11	(4).22724	215	8.00987	206
20	(2).44638	2.10	(4).22939	217	8.01193	204
30	(2).44848	2.11	(4).23156	218	8.01397	203
40	(2).45059	2.10	(4).23374	219	8.01600	203
50	(2).45269	2.11	(4).23593	220	8.01803	201
36'	(2).45480	2.11	(4).23813	221	8.02004	201
10	(2).45691	2.10	(4).24034	222	8.02205	200
20	(2).45901	2.11	(4).24256	223	8.02405	199
30	(2).46112	2.10	(4).24479	224	8.02604	197
40	(2).46322	2.11	(4).24703	226	8.02801	197
50	(2).46533	2.10	(4).24929	226	8.02998	196
37'	(2).46743	2.11	(4).25155	227	8.03194	196
10	(2).46954	2.11	(4).25382	228	8.03390	194
20	(2).47165	2.10	(4).25610	229	8.03584	193
30	(2).47375	2.11	(4).25839	230	8.03777	193
40	(2).47586	2.10	(4).26069	232	8.03970	192
50	(2).47796	2.11	(4).26301	232	8.04162	191
38'	(2).48007	2.10	(4).26533	233	8.04353	190
10	(2).48217	2.11	(4).26766	234	8.04543	189
20	(2).48428	2.11	(4).27000	236	8.04732	189
30	(2).48639	2.10	(4).27236	236	8.04921	187
40	(2).48849	2.11	(4).27472	237	8.05108	187
50	(2).49060	2.10	(4).27709	239	8.05295	186
39'	(2).49270	2.11	(4).27948	239	8.05481	185
10	(2).49481	2.10	(4).28187	240	8.05666	185
20	(2).49691	2.11	(4).28427	242	8.05851	183
30	(2).49902	2.10	(4).28669	242	8.06034	183
40	(2).50112	2.11	(4).28911	244	8.06217	182
50	(2).50323	2.11	(4).29155	244	8.06399	182
40'	(2).50534		(4).29399		8.06581	

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
40′	(2).50534	2.10	(4).29399	216	8.06581	180
10	(2).50744	2.11	(4).29645	246	8.06761	180
20	(2).50955	2.10	(4).29891	248	8.06941	179
30	(2).51165	2.11	(4).30139	248	8.07120	178
40	(2).51376	2.10	(4).30387	250	8.07298	178
50	(2).51586	2.11	(4).30637	251	8.07476	177
41′	(2).51797	2.11	(4).30888	251	8.07653	176
10	(2).52008	2.10	(4).31139	253	8.07829	176
20	(2).52218	2.11	(4).31392	254	8.08005	175
30	(2).52429	2.10	(4).31646	254	8.08180	174
40	(2).52639	2.11	(4).31900	256	8.08354	173
50	(2).52850	2.10	(4).32156	257	8.08527	173
42′	(2).53060	2.11	(4).32413	258	8.08700	172
10	(2).53271	2.11	(4).32671	258	8.08872	171
20	(2).53482	2.10	(4).32929	260	8.09043	171
30	(2).53692	2.11	(4).33189	261	8.09214	170
40	(2).53903	2.10	(4).33450	262	8.09384	169
50	(2).54113	2.11	(4).33712	263	8.09553	169
43′	(2).54324	2.10	(4).33975	264	8.09722	168
10	(2).54534	2.11	(4).34239	264	8.09890	167
20	(2).54745	2.11	(4).34503	266	8.10057	167
30	(2).54956	2.10	(4).34769	267	8.10224	166
40	(2).55166	2.11	(4).35036	268	8.10390	165
50	(2).55377	2.10	(4).35304	269	8.10555	165
44′	(2).55587	2.11	(4).35573	270	8.10720	161
10	(2).55798	2.10	(4).35843	271	8.10884	164
20	(2).56008	2.11	(4).36114	272	8.11048	163
30	(2).56219	2.10	(4).36386	273	8.11211	162
40	(2).56429	2.11	(4).36659	275	8.11373	162
50	(2).56640	2.11	(4).36934	275	8.11535	161
45′	(2).56851	2.10	(4).37209	276	8.11696	161
10	(2).57061	2.11	(4).37485	277	8.11857	160
20	(2).57272	2.10	(4).37762	278	8.12017	159
30	(2).57482	2.11	(4).38040	279	8.12176	159
40	(2).57693	2.10	(4).38319	281	8.12335	158
50	(2).57903	2.11	(4).38600	281	8.12493	158
46′	(2).58114	2.11	(4).38881	282	8.12651	157
10	(2).58325	2.10	(4).39163	283	8.12808	157
20	(2).58535	2.11	(4).39446	285	8.12965	156
30	(2).58746	2.10	(4).39731	285	8.13121	155
40	(5).58956	2.11	(4).40016	286	8.13276	155
50	(5).59167	2.10	(4).40302	288	8.13431	154
47′	(2).59377	2.11	(4).40590	288	8.13585	154
10	(2).59588	2.11	(4).40878	289	8.13739	153
20	(2).59799	2.10	(4).41167	291	8.13892	153
30	(2).60009	2.11	(4).41458	291	8.14045	152
40	(2).60220	2.10	(4).41749	293	8.14197	151
50	(2).60430	2.11	(4).42042	293	8.14348	152
48′	(2).60641	2.10	(4).42335	295	8.14500	150
10	(2).60851	2.11	(4).42630	295	8.14650	150
20	(2).61062	2.11	(4).42925	297	8.14800	150
30	2).61273	2.10	(4).43222	298	8.14950	149
40	(2).61483	2.11	(4).43520	298	8.15099	148
50	(2).61694	2.10	(4).43818	300	8.15247	148
49′	(2).61904	2.11	(4).44118	300	8.15395	148
10	(2).62115	2.11	(4).44418	302	8.15543	147
20	(2).62326	2.10	(4).44720	303	8.15690	146
30	(2).62536	2.11	(4).45023	303	8.15836	146
40	(2).62747	2.10	(4).45326	305	8.15982	146
50	(2).62957	2.11	(4).45631	306	8.16128	145
50′	(2).63168		(4).45937		8.16273	

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
50′	(2).63168	2.10	(4).45937	307	8.16273	144
10	(2).63378	2.11	(4).46244	307	8.16417	144
20	(2).63589	2.11	(4).46551	309	8.16561	144
30	(2).63800	2.10	(4).46860	310	8.16705	143
40	(2).64010	2.11	(4).47170	311	8.16848	143
50	(2).64221	2.10	(4).47481	312	8.16991	142
51′	(2).64431	2.11	(4).47793	313	8.17133	142
10	(2).64642	2.10	(4).48106	314	8.17275	141
20	(2).64852	2.11	(4).48420	315	8.17416	141
30	(2).65063	2.11	(4).48735	316	8.17557	140
40	(2).65274	2.10	(4).49051	317	8.17697	140
50	(2).65484	2.11	(4).49368	318	8.17837	139
52′	(2).65695	2.10	(4).49686	319	8.17976	139
10	(2).65905	2.11	(4).50005	320	8.18115	139
20	(2).66116	2.10	(4).50325	321	8.18254	138
30	(2).66326	2.11	(4).50646	322	8.18392	138
40	(2).66537	2.11	(4).50968	323	8.18530	137
50	(2).66748	2.10	(4).51291	324	8.18667	137
53′	(2).66958	2.11	(4).51615	325	8.18804	136
10	(2) 67169	2.10	(4).51940	326	8.18940	136
20	(2).67379	2.11	(4).52266	327	8.19076	135
30	(2).67590	2.10	(4).52593	329	8.19211	136
40	(2).67800	2.10	(4).52922	329	8.19347	134
50	(2).68011	2.11	(4).53251	330	8.19481	135
54′	(2).68222	2.10	(4).53581	331	8.19616	133
10	(2).68432	2.11	(4).53912	333	8.19749	134
20	(2).68643	2.10	(4).54245	333	8.19883	133
30	(2).68853	2.11	(4).54578	334	8.20016	133
40	(2).69064	2.11	(4).54912	336	8.20149	132
50	(2).69275	2.10	(4).55248	336	8.20281	132
55′	(2).69485	2.11	(4).55584	337	8.20413	131
10	(2).69696	2.10	(4).55921	339	8.20544	131
20	(2).69906	2.11	(4).56260	339	8.20675	131
30	(2).70117	2.10	(4).56599	311	8.20806	130
40	(2).70327	2.11	(4).56940	341	8.20936	130
50	(2).70538	2.11	(4).57281	343	8.21066	129
56′	(2).70749	2.10	(4).57624	343	8.21195	129
10	(2).70959	2.11	(4).57967	345	8.21324	129
20	(2).71170	2.10	(4).58312	345	8.21453	128
30	(2).71380	2.11	(4).58657	347	8.21581	128
40	(2).71591	2.10	(4).59004	348	8.21709	128
50	(2).71801	2.11	(4).59352	348	8.21837	127
57′	(2).72012	2.11	(4).59700	350	8.21964	127
10	(2).72223	2.10	(4).60050	351	8.22091	126
20	(2).72433	2.11	(4).60401	351	8.22217	126
30	(2).72644	2.10	(4).60752	353	8.22343	126
40	(2).72854	2.11	(4).61105	354	8.22469	126
50	(2).73065	2.11	(4).61459	354	8.22595	125
58′	(2).73276	2.10	(4).61813	356	8.22720	124
10	(2).73486	2.11	(4).62169	357	8.22844	124
20	(2).73697	2.10	(4).62526	358	8.22968	124
30	(2).73907	2.11	(4).62884	359	8.23092	124
40	(2).74118	2.10	(4).63243	360	8.23216	123
50	(2).74328	2.11	(4).63603	360	8.23339	123
59′	(2).74539	2.11	(4).63963	362	8.23462	123
10	(2).74750	2.10	(4).64325	363	8.23585	122
20	(2).74960	2.11	(4).64688	364	8.23707	122
30	(2).75171	2.10	(4).65052	365	8.23829	121
40	(2).75381	2.11	(4).65417	366	8.23950	121
50	(2).75592	2.11	(4).65783	367	8.24071	121
60′	(2).75803		(4).66150		8.24192	

ω	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0′	(2),75803	2,10	(4),66150	368	8,24192	121
10	(2),76013	2,11	(4),66518	369	8,24313	120
20	(2),76224	2,10	(4),66887	370	8,24433	120
30	(2),76434	2,11	(4),67257	371	8,24553	119
40	(2),76645	2,10	(4),67628	373	8,24672	119
50	(2),76855	2,11	(4),68001	373	8,24791	119
1′	(2),77066	2,11	(4),68374	374	8,24910	119
10	(2),77277	2,10	(4),68748	375	8,25029	118
20	(2),77487	2,11	(4),69123	376	8,25147	118
30	(2),77698	2,10	(4),69499	377	8,25265	117
40	(2),77908	2,11	(4),69876	379	8,25382	118
50	(2),78119	2,11	(4),70255	379	8,25500	116
2′	(2),78330	2,10	(4),70634	380	8,25616	117
10	(2),78540	2,11	(4),71014	382	8,25733	116
20	(2),78751	2,10	(4),71396	382	8,25849	116
30	(2),78961	2,11	(4),71778	383	8,25965	116
40	(2),79172	2,10	(4),72161	385	8,26081	115
50	(2),79382	2,11	(4),72546	385	8,26196	116
3′	(2),79593	2,11	(4),72931	386	8,26312	114
10	(2),79804	2,10	(4),73317	388	8,26426	115
20	(2),80014	2,11	(4),73705	388	8,26541	114
30	(2),80225	2,10	(4),74093	390	8,26655	114
40	(2),80435	2,11	(4),74483	390	8,26769	113
50	(2),80646	2,11	(4),74873	392	8,26882	114
4′	(2),80857	2,10	(4),75265	392	8,26996	113
10	(2),81067	2,11	(4),75657	394	8,27109	112
20	(2),81278	2,10	(4),76051	394	8,27221	113
30	(2),81488	2,11	(4),76445	396	8,27334	112
40	(2),81699	2,11	(4),76841	397	8,27446	112
50	(2),81910	2,10	(4),77238	397	8,27558	111
5′	(2),82120	2,11	(4),77635	399	8,27669	111
10	(2),82331	2,10	(4),78034	400	8,27780	111
20	(2),82541	2,11	(4),78434	400	8,27891	111
30	(2),82752	2,10	(4),78834	402	8,28002	110
40	(2),82962	2,11	(4),79236	403	8,28112	111
50	(2),83173	2,11	(4),79639	404	8,28223	109
6′	(2),83384	2,10	(4),80043	404	8,28332	110
10	(2),83594	2,11	(4),80447	406	8,28442	109
20	(2),83805	2,10	(4),80853	407	8,28551	109
30	(2),84015	2,11	(4),81260	408	8,28660	109
40	(2),84226	2,11	(4),81668	409	8,28769	108
50	(2),84437	2,10	(4),82077	410	8,28877	109
7′	(2),84647	2,11	(4),82487	411	8,28986	108
10	(2),84858	2,10	(4),82898	412	8,29094	107
20	(2),85068	2,11	(4),83310	412	8,29201	108
30	(2),85279	2,11	(4),83722	414	8,29309	107
40	(2),85490	2,10	(4),84136	415	8,29416	107
50	(2),85700	2,11	(4),84551	416	8,29523	106
8′	(2),85911	2,10	(4),84967	418	8,29629	107
10	(2),86121	2,11	(4),85385	418	8,29736	106
20	(2),86332	2,11	(4),85803	419	8,29842	105
30	(2),86543	2,10	(4),86222	420	8,29947	106
40	(2),86753	2,11	(4),86642	421	8,30053	105
50	(2),86964	2,10	(4),87063	422	8,30158	105
9′	(2),87174	2,11	(4),87485	423	8,30263	105
10	(2),87385	2,11	(4),87908	424	8,30368	105
20	(2),87596	2,10	(4),88332	426	8,30473	104
30	(2),87806	2,11	(4),88758	426	8,30577	104
40	(2),88017	2,10	(4),89184	427	8,30681	104
50	(2),88227	2,11	(4),89611	428	8,30785	103
10′	(2),88438		(4),90039		8,30888	

ω	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
10′	(2),88438	2,11	(4),90039	430	8,30888	104
10	(2),88649	2,10	(4),90469	430	8,30992	103
20	(2),88859	2,11	(4),90899	431	8,31095	103
30	(2),89070	2,10	(4),91330	433	8,31198	102
40	(2),89280	2,11	(4),91763	433	8,31300	103
50	(2),89491	2,10	(4),92196	435	8,31403	102
11′	(2),89701	2,11	(4),92631	435	8,31505	101
10	(2),89912	2,11	(4),93066	436	8,31606	102
20	(2),90123	2,10	(4),93502	438	8,31708	101
30	(2),90333	2,11	(4),93940	438	8,31809	102
40	(2),90544	2,10	(4),94378	440	8,31911	101
50	(2),90754	2,11	(4),94818	440	8,32012	100
12′	(2),90965	2,11	(4),95258	442	8,32112	101
10	(2),91176	2,10	(4),95700	443	8,32213	100
20	(2),91386	2,11	(4),96143	443	8,32313	100
30	(2),91597	2,10	(4),96586	445	8,32413	100
40	(2),91807	2,11	(4),97031	445	8,32513	99
50	(2),92018	2,11	(4),97476	447	8,32612	99
13′	(2),92229	2,10	(4),97923	448	8,32711	99
10	(2),92439	2,11	(4),98371	448	8,32810	99
20	(2),92650	2,10	(4),98819	450	8,32909	99
30	(2),92860	2,11	(4),99269	451	8,33008	98
40	(2),93071	2,11	(4),99720	45	8,33106	99
50	(2),93282	2,10	(3),10017	45	8,33205	97
14′	(2),93492	2,11	(3),10062	46	8,33302	98
10	(2),93703	2,10	(3),10108	45	8,33400	98
20	(2),93913	2,11	(3),10153	46	8,33498	97
30	(2),94124	2,11	(3),10199	46	8,33595	97
40	(2),94335	2,10	(3),10245	45	8,33692	97
50	(2),94545	2,11	(3),10290	46	8,33789	97
15′	(2),94756	2,10	(3),10336	46	8,33886	96
10	(2),94966	2,11	(3),10382	46	8,33982	96
20	(2),95177	2,11	(3),10428	47	8,34078	96
30	(2),95388	2,10	(3),10475	46	8,34174	96
40	(2),95598	2,11	(3),10521	46	8,34270	96
50	(2),95809	2,10	(3),10567	47	8,34366	95
16′	(2),96019	2,11	(3),10614	46	8,34461	95
10	(2),96230	2,11	(3),10660	47	8,34556	95
20	(2),96441	2,10	(3),10707	47	8,34651	95
30	(2),96651	2,11	(3),10754	47	8,34746	94
40	(2),96862	2,11	(3),10801	47	8,34840	95
50	(2),97073	2,10	(3),10848	47	8,34935	94
17′	(2),97283	2,11	(3),10895	47	8,35029	94
10	(2),97494	2,10	(3),10942	47	8,35123	94
20	(2),97704	2,11	(3),10989	48	8,35217	93
30	(2),97915	2,11	(3),11037	47	8,35310	93
40	(2),98126	2,10	(3),11084	48	8,35403	94
50	(2),98336	2,11	(3),11132	48	8,35497	93
18′	(2),98547	2,10	(3),11180	48	8,35590	92
10	(2),98757	2,11	(3),11228	48	8,35682	93
20	(2),98968	2,11	(3),11276	48	8,35775	92
30	(2),99179	2,10	(3),11324	48	8,35867	92
40	(2),99389	2,11	(3),11372	48	8,35959	92
50	(2),99600	2,10	(3),11420	48	8,36051	92
19′	(2),99810	2,1	(3),11468	49	8,36143	92
10	(1),10002	2,1	(3),11517	48	8,36235	91
20	(1),10023	2,1	(3),11565	49	8,36326	91
30	(1),10044	2,1	(3),11614	49	8,36417	91
40	(1),10065	2,1	(3),11663	49	8,36508	91
50	(1),10086	2,1	(3),11712	48	8,36599	90
20′	(1),10107		(3),11760		8,36689	

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	logSin z	Diff.
20'	(1).10107	2.1	(3).11760	50	8.36689	91
10	(1).10128	2.2	(3).11810	49	8.36780	90
20	(1).10150	2.1	(3).11859	49	8.36870	90
30	(1).10171	2.1	(3).11908	49	8.36960	90
40	(1).10192	2.1	(3).11957	50	8.37050	90
50	(1).10213	2.1	(3).12007	49	8.37140	89
21'	(1).10234	2.1	(3).12056	50	8.37229	89
10	(1).10255	2.1	(3).12106	50	8.37318	90
20	(1).10276	2.1	(3).12156	50	8.37408	89
30	(1).10297	2.1	(3).12206	50	8.37497	88
40	(1).10318	2.1	(3).12256	50	8.37585	89
50	(1).10339	2.1	(3).12306	50	8.37674	88
22'	(1).10360	2.1	(3).12356	50	8.37762	88
10	(1).10381	2.1	(3).12406	51	8.37850	88
20	(1).10402	2.1	(3).12457	50	8.37938	88
30	(1).10423	2.1	(3).12507	51	8.38026	88
40	(1).10444	2.1	(3).12558	50	8.38114	88
50	(1).10465	2.2	(3).12608	51	8.38202	87
23'	(1).10487	2.1	(3).12659	51	8.38289	87
10	(1).10508	2.1	(3).12710	51	8.38376	87
20	(1).10529	2.1	(3).12761	51	8.38463	87
30	(1).10550	2.1	(3).12812	51	8.38550	86
40	(1).10571	2.1	(3).12863	52	8.38636	87
50	(1).10592	2.1	(3).12915	51	8.38723	86
24'	(1).10613	2.1	(3).12966	52	8.38809	86
10	(1).10634	2.1	(3).13018	51	8.38895	86
20	(1).10655	2.1	(3).13069	52	8.38981	86
30	(1).10676	2.1	(3).13121	52	8.39067	86
40	(1).10697	2.1	(3).13173	52	8.39153	85
50	(1).10718	2.1	(3).13225	52	8.39238	85
25'	(1).10739	2.1	(3).13277	52	8.39323	85
10	(1).10760	2.1	(3).13329	52	8.39408	85
20	(1).10781	2.1	(3).13381	52	8.39493	85
30	(1).10802	2.1	(3).13433	53	8.39578	85
40	(1).10823	2.2	(3).13486	52	8.39663	84
50	(1).10845	2.1	(3).13538	53	8.39747	85
26'	(1).10866	2.1	(3).13591	53	8.39832	84
10	(1).10887	2.1	(3).13644	52	8.39916	84
20	(1).10908	2.1	(3).13696	53	8.40000	83
30	(1).10929	2.1	(3).13749	53	8.40083	84
40	(1).10950	2.1	(3).13802	54	8.40167	83
50	(1).10971	2.1	(3).13856	53	8.40250	84
27'	(1).10992	2.1	(3).13909	53	8.40334	83
10	(1).11013	2.1	(3).13962	54	8.40417	83
20	(1).11034	2.1	(3).14016	53	8.40500	83
30	(1).11055	2.1	(3).14069	54	8.40583	82
40	(1).11076	2.1	(3).14123	54	8.40665	83
50	(1).11097	2.1	(3).14177	53	8.40748	82
28'	(1).11118	2.1	(3).14230	54	8.40830	83
10	(1).11139	2.1	(3).14284	54	8.40913	82
20	(1).11160	2.2	(3).14338	55	8.40995	82
30	(1).11182	2.1	(3).14393	54	8.41077	81
40	(1).11203	2.1	(3).14447	54	8.41158	82
50	(1).11224	2.1	(3).14501	55	8.41240	81
29'	(1).11245	2.1	(3).14556	54	8.41321	82
10	(1).11266	2.1	(3).14610	55	8.41403	81
20	(1).11287	2.1	(3).14665	55	8.41484	81
30	(1).11308	2.1	(3).14720	55	8.41565	81
40	(1).11329	2.1	(3).14775	55	8.41646	80
50	(1).11350	2.1	(3).14830	55	8.41726	81
30'	(1).11371		(3).14885		8.41807	

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	logSin z	Diff.
30'	(1).11371	2.1	(3).14885	55	8.41807	80
10	(1).11392	2.1	(3).14940	55	8.41887	80
20	(1).11413	2.1	(3).14995	56	8.41967	81
30	(1).11434	2.1	(3).15051	55	8.42048	79
40	(1).11455	2.1	(3).15106	56	8.42127	80
50	(1).11476	2.1	(3).15162	55	8.42207	80
31	(1).11497	2.2	(3).15217	56	8.42287	79
10	(1).11519	2.1	(3).15273	56	8.42366	80
20	(1).11540	2.1	(3).15329	56	8.42446	79
30	(1).11561	2.1	(3).15385	56	8.42525	79
40	(1).11582	2.1	(3).15441	56	8.42604	79
50	(1).11603	2.1	(3).15497	57	8.42683	79
32	(1).11624	2.1	(3).15554	56	8.42762	78
10	(1).11645	2.1	(3).15610	57	8.42840	79
20	(1).11666	2.1	(3).15667	56	8.42919	78
30	(1).11687	2.1	(3).15723	57	8.42997	78
40	(1).11708	2.1	(3).15780	57	8.43075	79
50	(1).11729	2.1	(3).15837	57	8.43154	78
33'	(1).11750	2.1	(3).15894	57	8.43232	77
10	(1).11771	2.1	(3).15951	57	8.43309	78
20	(1).11792	2.1	(3).16008	57	8.43387	77
30	(1).11813	2.1	(3).16065	57	8.43464	78
40	(1).11834	2.2	(3).16122	58	8.43542	77
50	(1).11856	2.1	(3).16180	57	8.43619	77
34'	(1).11877	2.1	(3).16237	58	8.43696	77
10	(1).11898	2.1	(3).16295	58	8.43773	77
20	(1).11919	2.1	(3).16353	58	8.43850	77
30	(1).11940	2.1	(3).16411	58	8.43927	76
40	(1).11961	2.1	(3).16469	58	8.44003	77
50	(1).11982	2.1	(3).16527	58	8.44080	76
35'	(1).12003	2.1	(3).16585	58	8.44156	76
10	(1).12024	2.1	(3).16643	58	8.44232	76
20	(1).12045	2.1	(3).16701	59	8.44308	76
30	(1).12066	2.1	(3).16760	58	8.44384	76
40	(1).12087	2.1	(3).16818	59	8.44460	76
50	(1).12108	2.1	(3).16877	59	8.44536	75
36'	(1).12129	2.1	(3).16936	59	8.44611	75
10	(1).12150	2.1	(3).16995	59	8.44686	76
20	(1).12171	2.2	(3).17054	59	8.44762	75
30	(1).12193	2.1	(3).17113	59	8.44837	75
40	(1).12214	2.1	(3).17172	59	8.44912	75
50	(1).12235	2.1	(3).17231	60	8.44987	74
37'	(1).12256	2.1	(3).17291	59	8.45061	75
10	(1).12277	2.1	(3).17350	60	8.45136	74
20	(1).12298	2.1	(3).17410	59	8.45210	75
30	(1).12319	2.1	(3).17469	60	8.45285	74
40	(1).12340	2.1	(3).17529	60	8.45359	74
50	(1).12361	2.1	(3).17589	60	8.45433	74
38'	(1).12382	2.1	(3).17649	60	8.45507	74
10	(1).12403	2.1	(3).17709	60	8.45581	74
20	(1).12424	2.1	(3).17769	60	8.45655	73
30	(1).12445	2.1	(3).17829	61	8.45728	74
40	(1).12466	2.1	(3).17890	60	8.45802	73
50	(1).12487	2.2	(3).17950	61	8.45875	73
39'	(1).12509	2.1	(3).18011	61	8.45948	73
10	(1).12530	2.1	(3).18072	60	8.46021	73
20	(1).12551	2.1	(3).18132	61	8.46094	73
30	(1).12572	2.1	(3).18193	61	8.46167	73
40	(1).12593	2.1	(3).18254	61	8.46240	72
50	(1).12614	2.1	(3).18315	62	8.46312	73
40'	(1).12635		(3).18377		8.46385	

$\omega = 1$ Grad.

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.	ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
40	(1).12635	2,1	(3).18377	61	8,46385	72	**50'**	(1).13899	2,1	(3).22236	68	8,50527	66
10	(1).12656	2,1	(3).18438	61	8,46457	72	10	(1).13920	2,1	(3).22304	67	8,50593	65
20	(1).12677	2,1	(3).18499	62	8,46529	73	20	(1).13941	2,1	(3).22371	68	8,50658	66
30	(1).12698	2,1	(3).18561	62	8,46602	72	30	(1).13962	2,1	(3).22439	68	8,50724	65
40	(1).12719	2,1	(3).18623	61	8,46674	71	40	(1).13983	2,1	(3).22507	68	8,50789	66
50	(1).12740	2,1	(3).18684	62	8,46745	72	50	(1).14004	2,1	(3).22575	68	8,50855	65
41'	(1).12761	2,1	(3).18746	62	8,46817	72	**51'**	(1).14025	2,1	(3).22643	68	8,50920	65
10	(1).12782	2,1	(3).18808	62	8,46889	71	10	(1).14046	2,1	(3).22711	68	8,50985	65
20	(1).12803	2,1	(3).18870	62	8,46960	72	20	(1).14067	2,1	(3).22779	68	8,51050	65
30	(1).12824	2,2	(3).18932	62	8,47032	71	30	(1).14088	2,1	(3).22847	69	8,51115	65
40	(1).12846	2,1	(3).18994	63	8,47103	71	40	(1).14109	2,2	(3).22916	68	8,51180	65
50	(1).12867	2,1	(3).19057	62	8,47174	71	50	(1).14131	2,1	(3).22984	69	8,51245	65
42'	(1).12888	2,1	(3).19119	63	8,47215	71	**52'**	(1).14152	2,1	(3).23053	68	8,51310	64
10	(1).12909	2,1	(3).19182	62	8,47316	71	10	(1).14173	2,1	(3).23121	69	8,51374	65
20	(1).12930	2,1	(3).19244	63	8,47387	71	20	(1).11194	2,1	(3).23190	69	8,51439	64
30	(1).12951	2,1	(3).19307	63	8,47458	70	30	(1).14215	2,1	(3).23259	69	8,51503	65
40	(1).12972	2,1	(3).19370	63	8,47528	71	40	(1).14236	2,1	(3).23328	69	8,51568	64
50	(1).12993	2,1	(3).19433	63	8,47599	70	50	(1).14257	2,1	(3).23397	69	8,51632	64
43'	(1).13014	2,1	(3).19496	63	8,47669	71	**53'**	(1).14278	2,1	(3).23466	69	8,51696	64
10	(1).13035	2,1	(3).19559	63	8,47740	70	10	(1).14299	2,1	(3).23535	70	8,51760	64
20	(1).13056	2,1	(3).19622	64	8,47810	70	20	(1).14320	2,1	(3).23605	69	8,51824	64
30	(1).13077	2,1	(3).19686	63	8,47880	70	30	(1).14341	2,1	(3).23674	70	8,51888	64
40	(1).13098	2,1	(3).19749	64	8,47950	70	40	(1).14362	2,1	(3).23744	70	8,51952	63
50	(1).13119	2,1	(3).19813	63	8,48020	69	50	(1).14383	2,1	(3).23814	69	8,52015	64
44'	(1).13140	2,2	(3).19876	64	8,48089	70	**54'**	(1).14404	2,1	(3).23883	70	8,52079	64
10	(1).13162	2,1	(3).19940	61	8,48159	69	10	(1).14425	2,2	(3).23953	70	8,52143	63
20	(1).13183	2,1	(3).20001	61	8,48228	70	20	(1).14447	2,1	(3).24023	70	8,52206	63
30	(1).13204	2,1	(3).20068	64	8,48298	69	30	(1).14468	2,1	(3).24093	71	8,52269	63
40	(1).13225	2,1	(3).20132	64	8,48367	69	40	(1).14489	2,1	(3).24164	70	8,52332	64
50	(1).13246	2,1	(3).20196	65	8,48436	69	50	(1).14510	2,1	(3).24234	70	8,52396	63
45'	(1).13267	2,1	(3).20261	64	8,48505	69	**55'**	(1).14531	2,1	(3).24304	71	8,52459	63
10	(1).13288	2,1	(3).20325	64	8,48574	69	10	(1).14552	2,1	(3).24375	70	8,52522	62
20	(1).13309	2,1	(3).20389	65	8,48643	68	20	(1).14573	2,1	(3).24445	71	8,52584	63
30	(1).13330	2,1	(3).20454	65	8,48711	69	30	(1).14594	2,1	(3).24516	71	8,52647	63
40	(1).13351	2,1	(3).20519	65	8,48780	69	40	(1).14615	2,1	(3).24587	71	8,52710	62
50	(1).13372	2,1	(3).20584	64	8,48849	68	50	(1).14636	2,1	(3).24658	71	8,52772	63
46'	(1).13393	2,1	(3).20648	65	8,48917	68	**56'**	(1).14657	2,1	(3).24729	71	8,52835	62
10	(1).13414	2,1	(3).20713	66	8,48985	68	10	(1).14678	2,1	(3).24800	71	8,52897	63
20	(1).13435	2,1	(3).20779	65	8,49053	68	20	(1).14699	2,1	(3).24871	72	8,52960	62
30	(1).13456	2,1	(3).20844	65	8,49121	68	30	(1).14720	2,1	(3).24943	71	8,53022	62
40	(1).13477	2,2	(3).20909	65	8,49189	68	40	(1).14741	2,2	(3).25014	72	8,53084	62
50	(1).13499	2,1	(3).20974	66	8,49257	68	50	(1).14763	2,1	(3).25086	71	8,53146	62
47'	(1).13520	2,1	(3).21040	66	8,49325	68	**57'**	(1).14784	2,1	(3).25157	72	8,53208	62
10	(1).13541	2,1	(3).21106	65	8,49393	67	10	(1).14805	2,1	(3).25229	72	8,53270	62
20	(1).13562	2,1	(3).21171	66	8,49460	68	20	(1).14826	2,1	(3).25301	72	8,53332	61
30	(1).13583	2,1	(3).21237	66	8,49528	67	30	(1).14847	2,1	(3).25373	72	8,53393	62
40	(1).13604	2,1	(3).21303	66	8,49595	67	40	(1).14868	2,1	(3).25445	72	8,53455	61
50	(1).13625	2,1	(3).21369	66	8,49662	67	50	(1).14889	2,1	(3).25547	72	8,53516	62
48'	(1).13646	2,1	(3).21435	66	8,49729	67	**58'**	(1).14910	2,1	(3).25589	73	8,53578	61
10	(1).13667	2,1	(3).21501	67	8,49796	67	10	(1).14931	2,1	(3).25662	72	8,53639	61
20	(1).13688	2,1	(3).21568	66	8,49863	67	20	(1).14952	2,1	(3).25731	73	8,53700	62
30	(1).13709	2,1	(3).21634	67	8,49930	67	30	(1).14973	2,1	(3).25807	72	8,53762	61
40	(1).13730	2,1	(3).21701	66	8,49997	66	40	(1).14994	2,1	(3).25879	73	8,53823	61
50	(1).13751	2,1	(3).21767	67	8,50063	67	50	(1).15045	2,1	(3).25952	73	8,53884	61
49'	(1).13772	2,1	(3).21834	67	8,50130	66	**59'**	(1).15036	2,1	(3).26025	73	8,53945	60
10	(1).13793	2,2	(3).21901	67	8,50196	67	10	(1).15057	2,2	(3).26098	73	8,54005	61
20	(1).13815	2,1	(3).21968	67	8,50263	66	20	(1).15079	2,1	(3).26171	73	8,54066	61
30	(1).13836	2,1	(3).22035	67	8,50329	66	30	(1).15100	2,1	(3).26244	73	8,54127	60
40	(1).13857	2,1	(3).22102	67	8,50395	66	40	(1).15121	2,1	(3).26317	74	8,54187	61
50	(1).13878	2,1	(3).22169	67	8,50461	66	50	(1).15142	2,1	(3).26391	73	8,54248	60
50'	(1).13899		(3).22236		8,50527		**60'**	(1).15163		(3).26464		8,54308	

$\omega = 2$ Grad.

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0'	(1).15163	2.1	(3).26464	74	8.54308	61
10	(1).15184	2.1	(3).26538	73	8.54369	60
20	(1).15205	2.1	(3).26611	74	8.54429	60
30	(1).15226	2.1	(3).26685	74	8.54489	60
40	(1).15247	2.1	(3).26759	74	8.54549	60
50	(1).15268	2.1	(3).26833	74	8.54609	60
1'	(1).15289	2.1	(3).26907	74	8.54669	60
10	(1).15310	2.1	(3).26981	75	8.54729	60
20	(1).15331	2.1	(3).27056	74	8.54789	59
30	(1).15352	2.1	(3).27130	74	8.54848	60
40	(1).15373	2.2	(3).27204	75	8.54908	59
50	(1).15395	2.1	(3).27279	75	8.54967	60
2'	(1).15416	2.1	(3).27354	75	8.55027	59
10	(1).15437	2.1	(3).27429	74	8.55086	59
20	(1).15458	2.1	(3).27503	76	8.55145	60
30	(1).15479	2.1	(3).27579	75	8.55205	59
40	(1).15500	2.1	(3).27654	75	8.55264	59
50	(1).15521	2.1	(3).27729	75	8.55323	59
3'	(1).15542	2.1	(3).27804	76	8.55382	59
10	(1).15563	2.1	(3).27880	75	8.55441	58
20	(1).15584	2.1	(3).27955	76	8.55499	59
30	(1).15605	2.1	(3).28031	75	8.55558	59
40	(1).15626	2.1	(3).28106	76	8.55617	58
50	(1).15647	2.1	(3).28182	76	8.55675	59
4'	(1).15668	2.2	(3).28258	76	8.55734	58
10	(1).15690	2.1	(3).28334	76	8.55792	58
20	(1).15711	2.1	(3).28410	77	8.55850	59
30	(1).15732	2.1	(3).28487	76	8.55909	58
40	(1).15753	2.1	(3).28563	76	8.55967	58
50	(1).15774	2.1	(3).28639	77	8.56025	58
5'	(1).15795	2.1	(3).28716	77	8.56083	58
10	(1).15816	2.1	(3).28793	76	8.56141	58
20	(1).15837	2.1	(3).28869	77	8.56199	57
30	(1).15858	2.1	(3).28946	77	8.56256	58
40	(1).15879	2.1	(3).29023	77	8.56314	58
50	(1).15900	2.1	(3).29100	77	8.56372	57
6'	(1).15921	2.1	(3).29177	78	8.56429	58
10	(1).15942	2.1	(3).29255	77	8.56487	57
20	(1).15963	2.1	(3).29332	77	8.56544	57
30	(1).15984	2.2	(3).29409	78	8.56601	58
40	(1).16006	2.1	(3).29487	78	8.56659	57
50	(1).16027	2.1	(3).29565	77	8.56716	57
7'	(1).16048	2.1	(3).29642	78	8.56773	57
10	(1).16069	2.1	(3).29720	78	8.56830	57
20	(1).16090	2.1	(3).29798	78	8.56887	57
30	(1).16111	2.1	(3).29876	78	8.56944	56
40	(1).16132	2.1	(3).29954	79	8.57000	57
50	(1).16153	2.1	(3).30033	78	8.57057	57
8'	(1).16174	2.1	(3).30111	79	8.57114	56
10	(1).16195	2.1	(3).30190	78	8.57170	57
20	(1).16216	2.1	(3).30268	79	8.57227	56
30	(1).16237	2.1	(3).30347	79	8.57283	57
40	(1).16258	2.1	(3).30426	79	8.57340	56
50	(1).16279	2.2	(3).30505	79	8.57396	56
9'	(1).16301	2.1	(3).30584	79	8.57452	56
10	(1).16322	2.1	(3).30663	79	8.57508	56
20	(1).16343	2.1	(3).30742	79	8.57564	56
30	(1).16364	2.1	(3).30821	80	8.57620	56
40	(1).16385	2.1	(3).30901	79	8.57676	56
50	(1).16406	2.1	(3).30980	80	8.57732	56
10'	(1).16427		(3).31060		8.57788	

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
10'	(1).16427	2.1	(3).31060	79	8.57788	55
10	(1).16448	2.1	(3).31139	80	8.57843	56
20	(1).16469	2.1	(3).31219	80	8.57899	56
30	(1).16490	2.1	(3).31299	80	8.57955	55
40	(1).16511	2.1	(3).31379	80	8.58010	55
50	(1).16532	2.1	(3).31459	80	8.58065	56
11'	(1).16553	2.1	(3).31539	81	8.58121	55
10	(1).16574	2.2	(3).31620	80	8.58176	55
20	(1).16596	2.1	(3).31700	81	8.58231	55
30	(1).16617	2.1	(3).31781	80	8.58286	55
40	(1).16638	2.1	(3).31861	81	8.58341	55
50	(1).16659	2.1	(3).31942	81	8.58396	55
12'	(1).16680	2.1	(3).32023	81	8.58451	55
10	(1).16701	2.1	(3).32104	81	8.58506	55
20	(1).16722	2.1	(3).32185	81	8.58561	55
30	(1).16743	2.1	(3).32266	81	8.58616	54
40	(1).16764	2.1	(3).32347	82	8.58670	55
50	(1).16785	2.1	(3).32429	81	8.68725	54
13'	(1).16806	2.1	(3).32510	82	8.58779	55
10	(1).16827	2.1	(3).32592	81	8.58834	54
20	(1).16848	2.1	(3).32673	82	8.58888	55
30	(1).16869	2.2	(3).32755	82	8.58943	54
40	(1).16891	2.1	(3).32837	82	8.58997	54
50	(1).16912	2.1	(3).32919	82	8.59051	54
14'	(1).16933	2.1	(3).33001	82	8.59105	54
10	(1).16954	2.1	(3).33083	82	8.59159	54
20	(1).16975	2.1	(3).33165	83	8.59213	54
30	(1).16996	2.1	(3).33248	82	8.59267	54
40	(1).17017	2.1	(3).33330	83	8.59321	54
50	(1).17038	2.1	(3).33413	82	8.59375	53
15'	(1).17059	2.1	(3).33495	83	8.59428	54
10	(1).17080	2.1	(3).33578	83	8.59482	54
20	(1).17101	2.1	(3).33661	83	8.59536	53
30	(1).17122	2.1	(3).33744	83	8.59589	53
40	(1).17143	2.1	(3).33827	83	8.59642	54
50	(1).17164	2.2	(3).33910	84	8.59696	53
16'	(1).17186	2.1	(3).33994	83	8.59749	53
10	(1).17207	2.1	(3).34077	84	8.59802	54
20	(1).17228	2.1	(3).34161	83	8.59856	53
30	(1).17249	2.1	(3).34244	84	8.59909	53
40	(1).17270	2.1	(3).34328	84	8.59962	53
50	(1).17291	2.1	(3).31412	84	8.60015	53
17'	(1).17312	2.1	(3).34496	84	8.60068	53
10	(1).17333	2.1	(3).34580	84	8.60121	52
20	(1).17354	2.1	(3).34664	84	8.50173	53
30	(1).17375	2.1	(3).34748	84	8.60226	53
40	(1).17396	2.1	(3).34832	85	8.60279	52
50	(1).17417	2.1	(3).34917	84	8.60331	53
18'	(1).17438	2.1	(3).35001	85	8.60384	52
10	(1).17459	2.2	(3).35086	84	8.60436	53
20	(1).17481	2.1	(3).35170	85	8.60489	52
30	(1).17502	2.1	(3).35255	85	8.60541	52
40	(1).17523	2.1	(3).35340	85	8.60593	53
50	(1).17544	2.1	(3).35425	85	8.60646	52
19'	(1).17565	2.1	(3).35510	86	8.60698	52
10	(1).17586	2.1	(3).35596	85	8.60750	52
20	(1).17607	2.1	(3).35681	85	8.60802	52
30	(1).17628	2.1	(3).35766	86	8.60854	52
40	(1).17649	2.1	(3).35852	85	8.60906	52
50	(1).17670	2.1	(3).35937	86	8.60958	51
20'	(1).17691		(3).36023		8.61009	

$\omega = 2$ Grad.

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	logSin z	Diff.	ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	logSin z	Diff.
20'	(1),17691	2,1	(3),36023	86	8,61009	52	**30'**	(1),18956	2,1	(3),41355	92	8,64009	49
10	(1),17712	2,1	(3),36109	86	8,61061	52	10	(1),18977	2,1	(3),41447	92	8,64058	48
20	(1),17733	2,1	(3),36195	86	8,61113	51	20	(1),18998	2,1	(3),41539	92	8,64106	48
30	(1),17754	2,2	(3),36281	86	8,61164	52	30	(1),19019	2,1	(3),41631	92	8,64154	48
40	(1),17776	2,1	(3),36367	86	8,61216	51	40	(1),19040	2,1	(3),41723	93	8,64202	48
50	(1),17797	2,1	(3),36453	87	8,61267	52	50	(1),19061	2,1	(3),41816	92	8,64250	48
21'	(1),17818	2,1	(3),36540	86	8,61319	51	**31'**	(1),19082	2,1	(4),41908	93	8,64298	48
10	(1),17839	2,1	(3),36626	87	8,61370	52	10	(1),19103	2,1	(4),42001	93	8,64346	48
20	(1),17860	2,1	(3),36713	87	8,61422	51	20	(1),19124	2,1	(4),42094	92	8,64394	48
30	(1),17881	2,1	(3),36800	86	8,61473	51	30	(1),19145	2,1	(3),42186	93	8,64442	48
40	(1),17902	2,1	(3),36886	87	8,61524	51	40	(1),19166	2,2	(3),42279	93	8,64490	48
50	(1),17923	2,1	(3),36973	87	8,61575	51	50	(1),19188	2,1	(3),42372	93	8,64538	47
22'	(1),17944	2,1	(3),37060	87	8,61626	51	**32'**	(1),19209	2,1	(3),42465	94	8,64585	48
10	(1),17965	2,1	(3),37147	87	8,61677	51	10	(1),19230	2,1	(3),42559	93	8,64633	48
20	(1),17986	2,1	(3),37234	88	8,61728	51	20	(1),19251	2,1	(3),42652	93	8,64681	47
30	(1),18007	2,1	(3),37322	87	8,61779	51	30	(1),19272	2,1	(3),42745	94	8,64728	48
40	(1),18028	2,1	(3),37409	87	8,61830	51	40	(1),19293	2,1	(3),42839	93	8,64776	47
50	(1),18049	2,2	(3),37496	88	8,61881	50	50	(1),19314	2,1	(3),42932	94	8,64823	47
23'	(1),18071	2,1	(3),37584	88	8,61931	51	**33'**	(1),19335	2,1	(3),43026	94	8,64870	48
10	(1),18092	2,1	(3),37672	88	8,61982	51	10	(1),19356	2,1	(3),43120	91	8,64918	47
20	(1),18113	2,1	(3),37760	87	8,62033	50	20	(1),19377	2,1	(3),43214	94	8,64965	47
30	(1),18134	2,1	(3),37847	88	8,62083	51	30	(1),19398	2,1	(3),43308	91	8,65012	48
40	(1),18155	2,1	(3),37935	89	8,62134	50	40	(1),19419	2,1	(3),43402	91	8,65060	47
50	(1),18176	2,1	(3),38024	88	8,62184	50	50	(1),19440	2,2	(3),43496	95	8,65107	47
24'	(1),18197	2,1	(3),38112	88	8,62234	51	**34'**	(1),19462	2,1	(3),43591	94	8,65154	47
10	(1),18218	2,1	(3),38200	88	8,62285	50	10	(1),19483	2,1	(3),43685	95	8,65201	47
20	(1),18239	2,1	(3),38288	89	8,62335	50	20	(1),19504	2,1	(3),43780	91	8,65248	47
30	(1),18260	2,1	(3),38377	89	8,62385	50	30	(1),19525	2,1	(3),43874	95	8,65295	47
40	(1),18281	2,1	(3),38466	88	8,62435	50	40	(1),19546	2,1	(3),43969	95	8,65342	47
50	(1),18302	2,1	(3),38554	89	8,62485	50	50	(1),19567	2,1	(3),44064	95	8,65388	47
25'	(1),18323	2,2	(3),38643	89	8,62535	50	**35'**	(1),19588	2,1	(3),44159	95	8,65435	47
10	(1),18345	2,1	(3),38732	89	8,62585	50	10	(1),19609	2,1	(3),44254	95	8,65482	47
20	(1),18366	2,1	(3),38821	89	8,62635	50	20	(1),19630	2,1	(3),44349	95	8,65529	46
30	(1),18387	2,1	(3),38910	89	8,62685	50	30	(1),19651	2,1	(3),44444	96	8,65575	47
40	(1),18408	2,1	(3),38999	90	8,62735	49	40	(1),19672	2,1	(3),44540	95	8,65622	46
50	(1),18429	2,1	(3),39089	89	8,62784	50	50	(1),19693	2,1	(3),44635	96	8,65668	47
26'	(1),18450	2,1	(3),39178	90	8,62834	50	**36'**	(1),19714	2,2	(3),44731	95	8,65715	46
10	(1),18471	2,1	(3),39268	89	8,62884	49	10	(1),19736	2,1	(3),44826	96	8,65761	47
20	(1),18492	2,1	(3),39357	90	8,62933	50	20	(1),19757	2,1	(3),44922	96	8,65808	46
30	(1),18513	2,1	(3),39447	90	8,62983	49	30	(1),19778	2,1	(3),45018	96	8,65854	46
40	(1),18534	2,1	(3),39537	90	8,63032	49	40	(1),19799	2,1	(3),45114	96	8,65900	47
50	(1),18555	2,1	(3),39627	90	8,63081	50	50	(1),19820	2,1	(3),45210	96	8,65947	46
27'	(1),18576	2,1	(3),39717	90	8,63131	49	**37'**	(1),19841	2,1	(3),45306	96	8,65993	46
10	(1),18597	2,1	(3),39807	90	8,63180	49	10	(1),19862	2,1	(3),45402	97	8,66039	46
20	(1),18618	2,2	(3),39897	90	8,63229	49	20	(1),19883	2,1	(3),45499	96	8,66085	46
30	(1),48640	2,1	(3),39987	91	8,63278	50	30	(1),19904	2,1	(3),45595	97	8,66131	46
40	(1),18661	2,1	(3),40078	90	8,63328	49	40	(1),19925	2,1	(3),45692	97	8,66177	46
50	(1),18682	2,1	(3),40168	91	8,63377	49	50	(1),19946	2,1	(3),45789	96	8,66223	46
28'	(1),18703	2,1	(3),40259	91	8,63426	49	**38'**	(1),19967	2,1	(3),45885	97	8,66269	46
10	(1),18724	2,1	(3),40350	91	8,63475	48	10	(1),19988	2,2	(3),45982	97	8,66315	46
20	(1),18745	2,1	(3),40441	91	8,63523	49	20	(1),20010	2,1	(3),46079	97	8,66361	45
30	(1),18766	2,1	(3),40532	91	8,63572	49	30	(1),20031	2,1	(3),46176	97	8,66406	46
40	(1),18787	2,1	(3),40623	91	8,63621	49	40	(1),20052	2,1	(3),46273	98	8,66452	46
50	(1),18808	2,1	(3),40714	91	8,63670	48	50	(1),20073	2,1	(3),46371	97	8,66498	45
29'	(1),18829	2,1	(3),40805	92	8,63718	49	**39'**	(1),20094	2,1	(3),46468	98	8,66543	46
10	(1),18850	2,1	(3),40897	91	8,63767	49	10	(1),20115	2,1	(3),46566	97	8,66589	45
20	(1),18871	2,1	(3),40988	92	8,63816	48	20	(1),20136	2,1	(3),46663	98	8,66634	46
30	(1),18892	2,2	(3),41080	91	8,63864	49	30	(1),20157	2,1	(3),46761	98	8,66680	45
40	(1),18914	2,1	(3),41171	92	8,63913	48	40	(1),20178	2,1	(3),46859	98	8,66725	46
50	(1),18935	2,1	(3),41263	92	8,63961	48	50	(1),20199	2,1	(3),46957	98	8,66771	45
30'	(1),18956		(3),41355		8,64009		**40'**	(1),20220		(3),47055		8,66816	

$\omega = 2$ Grad.

ω	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	logSin z	Diff.
40′	(1).20220	2.1	(3).47055	98	8.66816	45
10	(1).20241	2.1	(3).47153	98	8.66861	45
20	(1).20262	2.2	(3).47251	98	8.66906	46
30	(1).20284	2.1	(3).47349	99	8.66952	45
40	(1).20305	2.1	(3).47448	98	8.66997	45
50	(1).20326	2.1	(3).47546	99	8.67042	45
41′	(1).20347	2.1	(3).47645	99	8.67087	45
10	(1).20368	2.1	(3).47744	99	8.67132	45
20	(1).20389	2.1	(3).47843	98	8.67177	45
30	(1).20410	2.1	(3).47941	99	8.67222	45
40	(1).20431	2.1	(3).48040	100	8.67267	45
50	(1).20452	2.1	(3).48140	99	8.67312	44
42′	(1).20473	2.1	(3).48239	99	8.67356	45
10	(1).20494	2.1	(3).48338	100	8.67401	45
20	(1).20515	2.1	(3).48438	99	8.67446	44
30	(1).20536	2.2	(3).48537	100	8.67490	45
40	(1).20558	2.1	(3).48637	100	8.67535	44
50	(1).20579	2.1	(3).48737	100	8.67579	45
43′	(1).20600	2.1	(3).48837	99	8.67624	44
10	(1).20621	2.1	(3).48936	101	8.67668	45
20	(1).20642	2.1	(3).49037	100	8.67713	44
30	(1).20663	2.1	(3).49137	100	8.67757	44
40	(1).20684	2.1	(3).49237	100	8.67801	45
50	(1).20705	2.1	(3).49337	101	8.67846	44
44′	(1).20726	2.1	(3).49438	100	8.67890	44
10	(1).20747	2.1	(3).49538	101	8.67934	44
20	(1).20768	2.1	(3).49639	101	8.67978	44
30	(1).20789	2.1	(3).49740	101	8.68022	44
40	(1).20810	2.2	(3).49841	101	8.68066	44
50	(1).20832	2.1	(3).49942	101	8.68110	44
45′	(1).20853	2.1	(3).50043	101	8.68154	44
10	(1).20874	2.1	(3).50144	101	8.68198	44
20	(1).20895	2.1	(3).50245	102	8.68242	44
30	(1).20916	2.1	(3).50347	101	8.68286	44
40	(1).20937	2.1	(3).50448	102	8.68330	43
50	(1).20958	2.1	(3).50550	101	8.68373	44
46′	(1).20979	2.1	(3).50651	102	8.68417	44
10	(1).21000	2.1	(3).50753	102	8.68461	43
20	(1).21021	2.1	(3).50855	102	8.68504	44
30	(1).21042	2.1	(3).50957	102	8.68548	44
40	(1).21063	2.2	(3).51059	102	8.68592	43
50	(1).21085	2.1	(3).51161	103	8.68635	43
47′	(1).21106	2.1	(3).51264	102	8.68678	44
10	(1).21127	2.1	(3).51366	103	8.68722	43
20	(1).21148	2.1	(3).51469	102	8.68765	43
30	(1).21169	2.1	(3).51571	103	8.68808	44
40	(1).21190	2.1	(3).51674	103	8.68852	43
50	(1).21211	2.1	(3).51777	103	8.68895	43
48′	(1).21232	2.1	(3).51880	103	8.68938	43
10	(1).21253	2.1	(3).51983	103	8.68981	43
20	(1).21274	2.1	(3).52086	103	8.69024	43
30	(1).21295	2.1	(3).52189	103	8.69067	43
40	(1).21316	2.1	(3).52292	104	8.69110	43
50	(1).21337	2.2	(3).52396	103	8.69153	43
49′	(1).21359	2.1	(3).52499	104	8.69196	43
10	(1).21380	2.1	(3).52603	104	8.69239	43
20	(1).21401	2.1	(3).52707	104	8.69282	43
30	(1).21422	2.1	(3).52811	104	8.69325	43
40	(1).21443	2.1	(3).52915	104	8.69368	42
50	(1).21464	2.1	(3).53019	104	8.69410	43
50′	(1).21485		(3.)53123		8.69453	

ω	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	logSin z	Diff.
50′	(1).21485	2.1	(3).53123	104	8.69453	43
10	(1).21506	2.1	(3).53227	104	8.69496	42
20	(1).21527	2.1	(3).53331	105	8.69538	43
30	(1).21548	2.1	(3).53436	105	8.69581	42
40	(1).21569	2.1	(3).53541	104	8.69623	43
50	(1).21590	2.2	(3).53645	105	8.69666	42
51′	(1).21612	2.1	(3).53750	105	8.69708	42
10	(1).21633	2.1	(3).53855	105	8.69750	43
20	(1).21654	2.1	(3).53960	105	8.69793	42
30	(1).21675	2.1	(3).54065	105	8.69835	42
40	(1).21696	2.1	(3).54170	105	8.69877	43
50	(1).21717	2.1	(3).54275	106	8.69920	42
52′	(1).21738	2.1	(3).54381	105	8.69962	42
10	(1).21759	2.1	(3).54486	106	8.70004	42
20	(1).21780	2.1	(3).54592	105	8.70046	42
30	(1).21801	2.1	(3).54697	106	8.70088	42
40	(1).21822	2.1	(3).54803	106	8.70130	42
50	(1).21843	2.2	(3).54909	106	8.70172	42
53′	(1).21865	2.1	(3).55015	106	8.70214	42
10	(1).21886	2.1	(3).55121	106	8.70256	42
20	(1).21907	2.1	(3).55227	107	8.70298	41
30	(1).21928	2.1	(3).55334	106	8.70339	42
40	(1).21949	2.1	(3).55440	107	8.70381	42
50	(1).21970	2.1	(3).55547	106	8.70423	42
54′	(1).21991	2.1	(3).55653	107	8.70465	41
10	(1).22012	2.1	(3).55760	107	8.70506	42
20	(1).22033	2.1	(3).55867	107	8.70548	41
30	(1).22054	2.1	(3).55974	107	8.70589	42
40	(1).22075	2.1	(3).56081	107	8.70631	42
50	(1).22096	2.2	(3).56188	107	8.70673	41
55′	(1).22118	2.1	(3).56295	107	8.70714	41
10	(1).22139	2.1	(3).56402	108	8.70755	42
20	(1).22160	2.1	(3).56510	107	8.70797	41
30	(1).22181	2.1	(3).56617	108	8.70838	41
40	(1).22202	2.1	(3).56725	108	8.70879	42
50	(1).22223	2.1	(3).56833	108	8.70921	41
56′	(1).22244	2.1	(3).56941	107	8.70962	41
10	(1).22265	2.1	(3).57048	109	8.71003	41
20	(1).22286	2.1	(3).57157	108	8.71044	41
30	(1).22307	2.1	(3).57265	108	8.71085	41
40	(1).22328	2.1	(3).57373	108	8.71126	41
50	(1).22349	2.1	(3).57481	109	8.71167	41
57′	(1).22370	2.2	(3).57590	108	8.71208	41
10	(1).22392	2.1	(3).57698	109	8.71249	41
20	(1).22413	2.1	(3).57807	109	8.71290	41
30	(1).22434	2.1	(3).57916	109	8.71331	41
40	(1).22455	2.1	(3).58025	109	8.71372	41
50	(1).22476	2.1	(3).58134	109	8.71413	40
58′	(1).22497	2.1	(3).58243	109	8.71453	41
10	(1).22518	2.1	(3).58352	109	8.71494	41
20	(1).22539	2.1	(3).58461	109	8.71535	40
30	(1).22560	2.1	(3).58570	110	8.71575	41
40	(1).22581	2.1	(3).58680	109	8.71616	41
50	(1).22602	2.1	(3).58789	110	8.71657	40
59′	(1).22623	2.2	(3).58899	110	8.71697	41
10	(1).22645	2.1	(3).59009	110	8.71738	40
20	(1).22666	2.1	(3).59119	110	8.71778	41
30	(1).22687	2.1	(3).59229	110	8.71819	40
40	(1).22708	2.1	(3).59339	110	8.71859	40
50	(1).22729	2.1	(3).59449	110	8.71899	41
60′	(1).22750		(3).59559		8.71940	

ω = 3 Grad.

ω	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.	ω	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0′	(1),22750	2,1	(3),59559	111	8,71940	40	10′	(1),24015	2,1	(3),66364	117	8,74292	38
10	(1),22771	2,1	(3),59670	110	8,71980	40	10	(1),24036	2,1	(3),66481	117	8,74330	39
20	(1),22792	2,1	(3),59780	111	8,72020	40	20	(1),24057	2,1	(3),66598	116	8,74369	38
30	(1),22813	2,1	(3),59891	111	8,72060	40	30	(1),24078	2,1	(3),66714	117	8,74407	38
40	(1),22834	2,1	(3),60002	110	8,72100	41	40	(1),24099	2,2	(3),66831	117	8,74445	38
50	(1),22855	2,2	(3),60112	111	8,72141	40	50	(1),24121	2,1	(3),66948	117	8,74483	38
1′	(1),22877	2,1	(3),60223	111	8,72181	40	11′	(1),24142	2,1	(3),67065	117	8,74521	38
10	(1),22898	2,1	(3),60334	111	8,72221	40	10	(1),24163	2,1	(3),67182	118	8,74559	38
20	(1),22919	2,1	(3),60445	112	8,72261	40	20	(1),24184	2,1	(3),67300	117	8,74597	37
30	(1),22940	2,1	(3),60557	111	8,72301	40	30	(1),24205	2,1	(3),67417	117	8,74634	38
40	(1),22961	2,1	(3),60668	111	8,72341	39	40	(1),24226	2,1	(3),67534	118	8,74672	38
50	(1),22982	2,1	(3),60779	112	8,72380	40	50	(1),24247	2,1	(3),67652	118	8,74710	38
2′	(1),23003	2,1	(3),60891	112	8,72420	40	12′	(1),24268	2,1	(3),67770	117	8,74748	38
10	(1),23024	2,1	(3),61003	111	8,72460	40	10	(1),24289	2,1	(3),67887	118	8,74786	37
20	(1),23045	2,1	(3),61114	112	8,72500	40	20	(1),24310	2,1	(3),68005	118	8,74823	38
30	(1),23066	2,1	(3),61226	112	8,72540	39	30	(1),24331	2,2	(3),68123	118	8,74861	38
40	(1),23087	2,1	(3),61338	112	8,72579	40	40	(1),24353	2,1	(3),68241	118	8,74899	37
50	(1),23108	2,2	(3),61450	112	8,72619	40	50	(1),24374	2,1	(3),68359	119	8,74936	38
3′	(1),23130	2,1	(3),61562	112	8,72659	39	13′	(1),24395	2,1	(3),68478	118	8,74974	38
10	(1),23151	2,1	(3),61674	113	8,72698	40	10	(1),24416	2,1	(3),68596	119	8,75012	37
20	(1),23172	2,1	(3),61787	112	8,72738	39	20	(1),24437	2,1	(3),68715	118	8,75049	38
30	(1),23193	2,1	(3),61899	113	8,72777	40	30	(1),24458	2,1	(3),68833	119	8,75087	37
40	(1),23214	2,1	(3),62012	112	8,72817	39	40	(1),24479	2,1	(3),68952	119	8,75124	38
50	(1),23235	2,1	(3),62124	113	8,72856	40	50	(1),24500	2,1	(3),69071	119	8,75162	37
4′	(1),23256	2,1	(3),62237	113	8,72896	39	14′	(1),24521	2,1	(3),69190	119	8,75199	37
10	(1),23277	2,1	(3),62350	113	8,72935	40	10	(1),24542	2,1	(3),69309	119	8,75236	38
20	(1),23298	2,1	(3),62463	113	8,72975	39	20	(1),24563	2,2	(3),69428	119	8,75274	37
30	(1),23319	2,1	(3),62576	113	8,73014	39	30	(1),24585	2,1	(3),69547	119	8,75311	37
40	(1),23340	2,1	(3),62689	113	8,73053	40	40	(1),24606	2,1	(3),69666	120	8,75348	37
50	(1),23361	2,2	(3),62802	114	8,73093	39	50	(1),24627	2,1	(3),69786	119	8,75385	38
5′	(1),23383	2,1	(3),62916	113	8,73132	39	15′	(1),24648	2,1	(3),69905	120	8,75423	37
10	(1),23404	2,1	(3),63029	114	8,73171	39	10	(1),24669	2,1	(3),70025	119	8,75460	37
20	(1),25425	2,1	(3),63143	114	8,73210	39	20	(1),24690	2,1	(3),70144	120	8,75497	37
30	(1),23446	2,1	(3),63257	113	8,73249	39	30	(1),24711	2,1	(3),70264	120	8,75534	37
40	(1),23467	2,1	(3),63370	114	8,73288	39	40	(1),24732	2,1	(3),70384	120	8,75571	37
50	(1),23488	2,1	(3),63481	114	8,73327	39	50	(1),24753	2,1	(3),70504	120	8,75608	37
6′	(1),23509	2,1	(3),63598	144	8,73366	39	16′	(1),24774	2,1	(3),70624	120	8,75645	37
10	(1),23530	2,1	(3),63712	114	8,73405	39	10	(1),24795	2,2	(3),70744	121	8,75682	37
20	(1),23551	2,1	(3),63826	115	8,73444	39	20	(1),24817	2,1	(3),70865	120	8,75719	37
30	(1),23572	2,1	(3),63941	114	8,73483	39	30	(1),24838	2,1	(3),70985	121	8,75756	37
40	(1),23593	2,1	(3),64055	115	8,73522	39	40	(1),24859	2,1	(3),71106	120	8,75793	37
50	(1),23614	2,2	(3),64170	114	8,73561	39	50	(1),24880	2,1	(3),71226	121	8,75830	37
7′	(1),23636	2,1	(3),64284	115	8,73600	38	17′	(1),24901	2,1	(3),71347	121	8,75867	37
10	(1),23657	2,1	(3),64399	115	8,73638	39	10	(1),24922	2,1	(3),71468	121	8,75904	36
20	(1),33678	2,1	(3),64514	115	8,73677	39	20	(1),24943	2,1	(3),71589	121	8,75940	37
30	(1),23699	2,1	(3),64629	115	8,73716	38	30	(1),24964	2,1	(3),71710	121	8,75977	37
40	(1),23720	2,1	(3),64744	115	8,73754	39	40	(1),24985	2,1	(3),71831	121	8,76014	37
50	(1),23741	2,1	(3),64859	115	8,73793	39	50	(1),25006	2,1	(3),71952	122	8,76051	36
8′	(1),23762	2,1	(3),64974	115	8,73832	38	18′	(1),25027	2,1	(3),72074	121	8,76087	37
10	(1),23783	2,1	(3),65089	116	8,73870	39	10	(1),25048	2,2	(3),72195	122	8,76124	36
20	(1),23804	2,1	(3),65205	115	8,73909	38	20	(1),25070	2,1	(3),72317	121	8,76160	37
30	(1),23825	2,1	(3),65320	116	8,73947	39	30	(1),25091	2,1	(3),72438	122	8,76197	36
40	(1),23846	2,2	(3),65436	115	8,73986	38	40	(1),25112	2,1	(3),72560	122	8,76233	37
50	(1),23868	2,1	(3),65551	116	8,74024	39	50	(1),25133	2,1	(3),72682	122	8,76270	36
9′	(1),23889	2,1	(3),65667	116	8,74063	38	19′	(1),25154	2,1	(3),72804	122	8,76306	37
10	(1),23910	2,1	(3),65783	116	8,74101	38	10	(1),25175	2,1	(3),72926	122	8,76343	36
20	(1),23931	2,1	(3),65899	116	8,74139	39	20	(1),25196	2,1	(3),73048	123	8,76379	37
30	(1),23952	2,1	(3),66015	117	8,74178	38	30	(1),25217	2,1	(3),73171	122	8,76416	36
40	(1),23973	2,1	(3),66132	116	8,74216	38	40	(1),25238	2,1	(3),73293	122	8,76452	36
50	(1),23994	2,1	(3),66248	116	8,74254	38	50	(1),25259	2,1	(3),73415	123	8,76488	37
10′	(1),24015		(3),66364		8,74292		20′	(1),25280		(3),73538		8,76525	

ω = 3 Grad.

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
20'	(1),25280	2,2	(3),73538	123	8,76525	36
10	(1),25302	2,1	(3),73661	122	8,76561	36
20	(1),25323	2,1	(3),73783	123	8,76597	36
30	(1),25344	2,1	(3),73906	123	8,76633	36
40	(1),25365	2,1	(3),74029	123	8,76669	37
50	(1),25386	2,1	(3),74152	124	8,76706	36
21'	(1),25407	2,1	(3),74276	123	8,76742	36
10	(1),25428	2,1	(3),74399	123	8,76778	36
20	(1),25449	2,1	(3),74522	124	8,76814	36
30	(1),25470	2,1	(3),74646	123	8,76850	36
40	(1),25491	2,1	(3),74769	124	8,76886	36
50	(1),25512	2,2	(3),74893	124	8,76922	36
22'	(1),25531	2,1	(3),75017	124	8,76958	36
10	(1),25555	2,1	(3),75141	124	8,76991	36
20	(1),25576	2,1	(3),75265	124	8,77030	35
30	(1),25597	2,1	(3),75389	124	8,77065	36
40	(1),25618	2,1	(3),75513	125	8,77101	36
50	(1),25639	2,1	(3),75638	124	8,77137	36
23'	(1),25660	2,1	(3),75762	124	8,77173	35
10	(1),25681	2,1	(3),75886	125	8,77208	36
20	(1),25702	2,1	(3),76011	125	8,77244	36
30	(1),25723	2,2	(3),76136	125	8,77280	35
40	(1),25745	2,1	(3),76261	125	8,77315	36
50	(1),25766	2,1	(3),76386	125	8,77351	36
24'	(1),25787	2,1	(3),76511	125	8,77387	35
10	(1),25808	2,1	(3),76636	125	8,77422	36
20	(1),25829	2,1	(3),76761	125	8,77458	35
30	(1),25850	2,1	(3),76886	126	8,77493	36
40	(1),25871	2,1	(3),77012	125	8,77529	35
50	(1),25892	2,1	(3),77137	126	8,77564	36
25'	(1),25913	2,1	(3),77263	126	8,77600	35
10	(1),25934	2,1	(3),77389	126	8,77635	35
20	(1),25955	2,2	(3),77515	126	8,77670	36
30	(1),25977	2,1	(3),77641	126	8,77706	35
40	(1),25998	2,1	(3),77767	126	8,77741	35
50	(1),26019	2,1	(3),77893	126	8,77776	35
26'	(1),26040	2,1	(3),78019	126	8,77811	36
10	(1),26061	2,1	(3),78145	127	8,77847	35
20	(1),26082	2,1	(3),78272	127	8,77882	35
30	(1),26103	2,1	(3),78399	126	8,77917	35
40	(1),26124	2,1	(3),78525	127	8,77952	35
50	(1),26145	2,1	(3),78652	127	8,77987	35
27'	(1),26166	2,1	(3),78779	127	8,78022	35
10	(1),26187	2,2	(3),78906	127	8,78057	35
20	(1),26209	2,1	(3),79033	127	8,78092	35
30	(1),26230	2,1	(3),79160	127	8,78127	35
40	(1),26251	2,1	(3),79287	128	8,78162	35
50	(1),26272	2,1	(3),79415	127	8,78197	35
28'	(1),26293	2,1	(3),79542	128	8,78232	35
10	(1),26314	2,1	(3),79670	128	8,78267	35
20	(1),26335	2,1	(3),79798	127	8,78302	35
30	(1),26356	2,1	(3),79925	128	8,78337	34
40	(1),26377	2,1	(3),80053	128	8,78371	35
50	(1),26398	2,1	(3),80181	128	8,78406	35
29'	(1),26419	2,2	(3),80309	129	8,78441	34
10	(1),26441	2,1	(3),80438	128	8,78475	35
20	(1),26462	2,1	(3),80566	128	8,78510	35
30	(1),26483	2,1	(3),80694	129	8,78545	34
40	(1),26504	2,1	(3),80823	129	8,78579	35
50	(1),26525	2,1	(3),80952	128	8,78614	35
30'	(1),26546		(3),81080		8,78649	
30'	(1),26546	2,1	(3),81080	129	8,78649	34
10	(1),26567	2,1	(3),81209	129	8,78683	35
20	(1),26588	2,1	(3),81338	129	8,78718	34
30	(1),26609	2,1	(3),81467	129	8,78752	35
40	(1),26630	2,2	(3),81596	130	8,78787	34
50	(1),26652	2,1	(3),81726	129	8,78821	34
31'	(1),26673	2,1	(3),81855	129	8,78855	35
10	(1),26694	2,1	(3),81984	130	8,78890	34
20	(1),26715	2,1	(3),82114	129	8,78924	34
30	(1),26736	2,1	(3),82243	130	8,78958	35
40	(1),26757	2,1	(3),82373	130	8,78993	34
50	(1),26778	2,1	(3),82503	130	8,79027	34
32'	(1),26799	2,1	(3),82633	130	8,79061	35
10	(1),26820	2,1	(3),82763	130	8,79096	34
20	(1),26841	2,1	(3),82893	131	8,79130	34
30	(1),26862	2,2	(3),83024	130	8,79164	34
40	(1),26884	2,1	(3),83154	130	8,79198	34
50	(1),26905	2,1	(3),83284	131	8,79232	34
33'	(1),26926	2,1	(3),83415	131	8,79266	34
10	(1),26947	2,1	(3),83546	130	8,79300	34
20	(1),26968	2,1	(3),83676	131	8,79334	34
30	(1),26989	2,1	(3),83807	131	8,79368	34
40	(1),27010	2,1	(3),83938	131	8,79402	34
50	(1),27031	2,1	(3),84069	132	8,79436	34
34'	(1),27052	2,1	(3),84201	131	8,79470	34
10	(1),27073	2,2	(3),84332	131	8,79504	34
20	(1),27095	2,1	(3),84463	132	8,79538	34
30	(1),27116	2,1	(3),84595	131	8,79572	34
40	(1),27137	2,1	(3),84726	132	8,79606	33
50	(1),27158	2,1	(3),84858	132	8,79639	34
35'	(1),27179	2,1	(3),84990	132	8,79673	34
10	(1),27180	2,1	(3),85122	132	8,79707	34
20	(1),27221	2,1	(3),85254	132	8,79741	33
30	(1),27242	2,1	(3),85386	132	8,79774	34
40	(1),27263	2,1	(3),85518	132	8,79808	34
50	(1),27284	2,1	(3),85650	133	8,79842	33
36'	(1),27305	2,2	(3),85783	132	8,79875	34
10	(1),27327	2,1	(3),85915	133	8,79909	33
20	(1),27348	2,1	(3),86048	133	8,79942	34
30	(1),27369	2,1	(3),86181	132	8,79976	33
40	(1),27390	2,1	(3),86313	133	8,80009	34
50	(1),27411	2,1	(3),86446	133	8,80043	33
37'	(1),27432	2,1	(3),86579	134	8,80076	34
10	(1),27453	2,1	(3),86713	133	8,80110	33
20	(1),27474	2,1	(3),86846	133	8,80143	34
30	(1),27495	2,1	(3),86979	134	8,80177	33
40	(1),27516	2,2	(3),87113	133	8,80210	33
50	(1),27538	2,1	(3),87246	134	8,80243	34
38'	(1),27559	2,1	(3),87380	134	8,80277	33
10	(1),27580	2,1	(3),87514	133	8,80310	33
20	(1),27601	2,1	(3),87647	134	8,80343	33
30	(1),27622	2,1	(3),87781	134	8,80376	33
40	(1),27643	2,1	(3),87915	135	8,80409	34
50	(1),27664	2,1	(3),88050	134	8,80443	33
39'	(1),27685	2,1	(3),88184	134	8,80476	33
10	(1),27706	2,1	(3),88318	135	8,80509	33
20	(1),27727	2,2	(3),88453	134	8,80542	33
30	(1),27749	2,1	(3),88587	135	8,80575	33
40	(1),27770	2,1	(3),88722	135	8,80608	33
50	(1),27791	2,1	(3),88857	135	8,80641	33
40'	(1),27812		(3),88992		8,80674	

$\omega = 3$ Grad.

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.	ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
40	(1),27812	2,1	(3),88992	134	8,80674	33	50'	(1),29078	2,1	(3),97272	141	8,82610	32
10	(1),27833	2,1	(3),89126	136	8,80707	33	10	(1),29099	2,1	(3),97413	141	8,82642	31
20	(1),27854	2,1	(3),89262	135	8,80740	33	20	(1),29120	2,1	(3),97554	141	8,82673	32
30	(1),27875	2,1	(3),89397	135	8,80773	33	30	(1),29141	2,1	(3),97695	142	8,82705	31
40	(1),27896	2,1	(3),89532	135	8,80806	33	40	(1),29162	2,1	(3),97837	141	8,82736	32
50	(1),27917	2,1	(3),89667	136	8,80839	33	50	(1),29183	2,1	(3),97978	142	8,82768	31
41'	(1),27938	2,2	(3),89803	136	8,80872	33	51'	(1),29204	2,2	(3),98120	142	8,82799	32
10	(1),27960	2,1	(3),89939	135	8,80905	32	10	(1),29226	2,1	(3),98262	142	8,82831	31
20	(1),27981	2,1	(3),90074	136	8,80937	33	20	(1),29247	2,1	(3),98404	142	8,82862	31
30	(1),28002	2,1	(3),90210	136	8,80970	33	30	(1),29268	2,1	(3),98546	142	8,82893	32
40	(1),28023	2,1	(3),90346	136	8,81003	33	40	(1),29289	2,1	(3),98688	142	8,82925	31
50	(1),28044	2,1	(3),90482	136	8,81036	32	50	(1),29310	2,1	(3),98830	142	8,82956	31
42	(1),28065	2,1	(3),90618	136	8,81068	33	52'	(1),29331	2,1	(3),98972	142	8,82987	32
10	(1),28086	2,1	(3),90754	137	8,91101	33	10	(1),29352	2,1	(3),99114	143	8,83019	31
20	(1),28107	2,1	(3),90891	136	8,81131	32	20	(1),29373	2,1	(3),99257	142	8,83050	31
30	(1),28128	2,1	(3),91027	136	8,81166	33	30	(1),29394	2,2	(3),99399	143	8,83081	31
40	(1),28149	2,2	(3),91163	137	8,81199	33	40	(1),29416	2,1	(3),99542	143	8,83112	32
50	(1),28171	2,1	(3),91300	137	8,81232	32	50	(1),29437	2,1	(3),99685	143	8,83111	31
43'	(1),28192	2,1	(3),91437	137	8,81264	33	53'	(1),29458	2,1	(3),99828	143	8,83175	31
10	(1),28213	2,1	(3),91574	137	8,81297	32	10	(1),29479	2,1	(3),99971	14	8,83206	31
20	(1),28234	2,1	(3),91711	137	8,81329	33	20	(1),29500	2,1	(2),10011	15	8,83237	31
30	(1),28255	2,1	(3),91848	137	8,81362	32	30	(1),29521	2,1	(2),10026	14	8,83268	31
40	(1),28276	2,1	(3),91985	137	8,81394	33	40	(1),29542	2,1	(2),10040	14	8,83299	31
50	(1),28297	2,1	(3),92122	137	8,81427	32	50	(1),29563	2,1	(2),10054	15	8,83330	31
44'	(1),28318	2,1	(3),92259	138	8,81459	32	54'	(1),29584	2,1	(2),10069	14	8,83361	31
10	(1),28339	2,1	(3),92397	137	8,81491	33	10	(1),29605	2,2	(2),10083	14	8,83392	31
20	(1),28360	2,2	(3),92534	138	8,81524	32	20	(1),29627	2,1	(2),10097	15	8,83423	31
30	(1),28382	2,1	(3),92672	138	8,81556	32	30	(1),29648	2,1	(2),10112	14	8,83454	31
40	(1),28403	2,1	(3),92810	138	8,81588	33	40	(1),29669	2,1	(2),10126	15	8,83485	31
50	(1),28424	2,1	(3),92948	137	8,81621	32	50	(1),29690	2,1	(2),10141	14	8,83516	31
45'	(1),28445	2,1	(3),93085	139	8,81653	32	55'	(1),29711	2,1	(2),10155	14	8,83547	31
10	(1),28466	2,1	(3),93224	138	8,81685	32	10	(1),29732	2,1	(2),10169	15	8,83578	31
20	(1),28487	2,1	(3),93362	138	8,81717	33	20	(1),29753	2,1	(2),10184	14	8,83609	31
30	(1),28508	2,1	(3),93500	138	8,81750	32	30	(1),29774	2,1	(2),10198	15	8,83640	31
40	(1),28529	2,1	(3),93638	139	8,81782	32	40	(1),29795	2,1	(2),10213	14	8,83671	30
50	(1),28550	2,1	(3),93777	138	8,81814	32	50	(1),29816	2,2	(2),10227	15	8,83701	31
46'	(1),28571	2,2	(3),93915	139	8,81846	32	56'	(1),29838	2,1	(2),10242	14	8,83732	31
10	(1),28593	2,1	(3),94054	139	8,81878	32	10	(1),29859	2,1	(2),10256	15	8,83763	31
20	(1),28614	2,1	(3),94193	139	8,81910	32	20	(1),29880	2,1	(2),10271	14	8,83794	30
30	(1),28635	2,1	(3),94332	139	8,81942	32	30	(1),29901	2,1	(2),10285	15	8,83824	31
40	(1),28656	2,1	(3),94471	139	8,81974	32	40	(1),29922	2,1	(2),10300	14	8,83855	31
50	(1),28677	2,1	(3),94610	139	8,82006	32	50	(1),29943	2,1	(2),10314	15	8,83886	30
47'	(1),28698	2,1	(3),94749	139	8,82038	32	57'	(1),29964	2,1	(2),10329	14	8,83916	31
10	(1),28719	2,1	(3),94888	140	8,82070	32	10	(1),29985	2,1	(2),10343	15	8,83947	31
20	(1),28740	2,1	(3),95028	139	8,82102	32	20	(1),30006	2,2	(2),10358	14	8,83978	30
30	(1),28761	2,1	(3),95167	140	8,82134	32	30	(1),30028	2,1	(2),10372	15	8,84008	31
40	(1),28782	2,2	(3),95307	139	8,82166	32	40	(1),30049	2,1	(2),10387	15	8,84039	30
50	(1),28804	2,1	(3),95446	140	8,82198	32	50	(1),30070	2,1	(2),10402	14	8,84069	31
48'	(1),28825	2,1	(3),95586	140	8,82230	32	58'	(1),30091	2,1	(2),10416	15	8,84100	30
10	(1),28846	2,1	(3),95726	140	8,82262	31	10	(1),30112	2,1	(2),10431	14	8,84130	31
20	(1),28867	2,1	(3),95866	140	8,82293	32	20	(1),30133	2,1	(2),10445	15	8,84161	30
30	(1),28888	2,1	(3),96006	140	8,82325	32	30	(1),30154	2,1	(2),10460	15	8,84191	31
40	(1),28909	2,1	(3),96146	141	8,82357	32	40	(1),30175	2,1	(2),10475	14	8,84222	30
50	(1),28930	2,1	(3),96287	140	8,82389	31	50	(1),30196	2,1	(2),10489	15	8,84252	30
49'	(1),28951	2,1	(3),96427	141	8,82420	32	59'	(1),30217	2,2	(2),10504	15	8,84282	31
10	(1),28972	2,1	(3),96568	140	8,82452	32	10	(1),30239	2,1	(2),10519	14	8,84313	30
20	(1),28993	2,2	(3),96708	141	8,82484	31	20	(1),30260	2,1	(2),10533	15	8,84343	31
30	(1),29015	2,1	(3),96849	141	8,82515	32	30	(1),30281	2,1	(2),10548	15	8,84374	30
40	(1),29036	2,1	(3),96990	141	8,82547	32	40	(1),30302	2,1	(2),10563	14	8,84404	30
50	(1),29057	2,1	(3),97131	141	8,82579	31	50	(1),30323	2,1	(2),10577	15	8,84434	30
50'	(1),29078		(3),97272		8,82610		60'	(1),30344		(2),10592		8,84464	

$\omega = 4$ Grad.

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0'	(1),30344	2,1	(2),10592	15	8,84464	31
10	(1),30365	2,1	(2),10607	15	8,84495	30
20	(1),30386	2,1	(2),10622	14	8,84525	30
30	(1),30407	2,2	(2),10636	15	8,84555	30
40	(1),30429	2,1	(2),10651	15	8,84585	30
50	(1),30450	2,1	(2),10666	15	8,84615	31
1'	(1),30471	2,1	(2),10681	14	8,84646	30
10	(1),30492	2,1	(2),10695	15	8,84676	30
20	(1),30513	2,1	(2),10710	15	8,84706	30
30	(1),30534	2,1	(2),10725	15	8,84736	30
40	(1),30555	2,1	(2),10740	15	8,84766	30
50	(1),30576	2,1	(2),10755	15	8,84796	30
2'	(1),30597	2,2	(2),10770	14	8,84826	30
10	(1),30619	2,1	(2),10784	15	8,84856	30
20	(1),30640	2,1	(2),10799	15	8,84886	30
30	(1),30661	2,1	(2),10814	15	8,84916	30
40	(1),30682	2,1	(2),10829	15	8,84946	30
50	(1),30703	2,1	(2),10844	15	8,84976	30
3'	(1),30724	2,1	(2),10859	15	8,85006	30
10	(1),30745	2,1	(2),10874	15	8,85036	29
20	(1),30766	2,1	(2),10889	15	8,85065	30
30	(1),30787	2,1	(2),10904	14	8,85095	30
40	(1),30808	2,2	(2),10918	15	8,85125	30
50	(1),30830	2,1	(2),10933	15	8,85155	30
4'	(1),30851	2,1	(2),10948	15	8,85185	29
10	(1),30872	2,1	(2),10963	15	8,85214	30
20	(1),30893	2,1	(2),10978	15	8,85244	30
30	(1),30914	2,1	(2),10993	15	8,85274	30
40	(1),30935	2,1	(2),11008	15	8,85304	29
50	(1),30956	2,1	(2),11023	15	8,85333	30
5'	(1),30977	2,1	(2),11038	15	8,85363	29
10	(1),30998	2,2	(2),11053	15	8,85392	30
20	(1),31020	2,1	(2),11068	16	8,85422	30
30	(1),31041	2,1	(2),11084	15	8,85452	29
40	(1),31062	2,1	(2),11099	15	8,85481	30
50	(1),31083	2,1	(2),11114	15	8,85511	29
6'	(1),31104	2,1	(2),11129	15	8,85540	30
10	(1),31125	2,1	(2),11144	15	8,85570	29
20	(1),31146	2,1	(2),11159	15	8,85599	30
30	(1),31167	2,1	(2),11174	15	8,85629	29
40	(1),31188	2,2	(2),11189	15	8,85658	30
50	(1),31210	2,1	(2),11204	16	8,85688	29
7'	(1),31231	2,1	(2),11220	15	8,85717	30
10	(1),31252	2,1	(2),11235	15	8,85747	29
20	(1),31273	2,1	(2),11250	15	8,85776	29
30	(1),31294	2,1	(2),11265	15	8,85805	30
40	(1),31315	2,1	(2),11280	15	8,85835	29
50	(1),31336	2,1	(2),11295	16	8,85864	29
8'	(1),31357	2,1	(2),11311	15	8,85893	29
10	(1),31378	2,2	(2),11326	15	8,85922	30
20	(1),31400	2,1	(2),11341	15	8,85952	29
30	(1),31421	2,1	(2),11356	16	8,85981	29
40	(1),31442	2,1	(2),11372	15	8,86010	29
50	(1),31463	2,1	(2),11387	15	8,86039	30
9'	(1),31484	2,1	(2),11402	15	8,86069	29
10	(1),31505	2,1	(2),11417	16	8,86098	29
20	(1),31526	2,1	(2),11433	15	8,86127	29
30	(1),31547	2,1	(2),11448	15	8,86156	29
40	(1),31568	2,2	(2),11463	16	8,86185	29
50	(1),31590	2,1	(2),11479	15	8,86214	29
10'	(1),31611		(2),11494		8,86243	

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
10'	(1),31611	2,1	(2),11494	15	8,86243	29
10	(1),31632	2,1	(2),11509	16	8,86272	29
20	(1),31653	2,1	(2),11525	15	8,86301	29
30	(1),31674	2,1	(2),11540	15	8,86330	29
40	(1),31695	2,1	(2),11555	16	8,86359	29
50	(1),31716	2,1	(2),11571	15	8,86388	29
11'	(1),31737	2,1	(2),11586	16	8,86417	29
10	(1),31758	2,2	(2),11602	15	8,86446	29
20	(1),31780	2,1	(2),11617	15	8,86475	29
30	(1),31801	2,1	(2),11632	16	8,86504	29
40	(1),31822	2,1	(2),11648	15	8,86533	29
50	(1),31843	2,1	(2),11663	16	8,86562	29
12'	(1),31864	2,1	(2),11679	15	8,86591	28
10	(1),31885	2,1	(2),11694	16	8,86619	29
20	(1),31906	2,1	(2),11710	15	8,86648	29
30	(1),31927	2,1	(2),11725	16	8,86677	29
40	(1),31948	2,2	(2),11741	15	8,86706	28
50	(1),31970	2,1	(2),11756	16	8,86734	29
13'	(1),31991	2,1	(2),11772	15	8,86763	29
10	(1),32012	2,1	(2),11787	16	8,86792	29
20	(1),32033	2,1	(2),11803	15	8,86821	28
30	(1),32054	2,1	(2),11818	16	8,86849	29
40	(1),32075	2,1	(2),11834	15	8,86878	29
50	(1),32096	2,1	(2),11849	16	8,86907	28
14'	(1),32117	2,1	(2),11865	16	8,86935	29
10	(1),32138	2,2	(2),11881	15	8,86964	28
20	(1),32160	2,1	(2),11896	16	8,86992	29
30	(1),32181	2,1	(2),11912	15	8,87021	28
40	(1),32202	2,1	(2),11927	16	8,87049	29
50	(1),32223	2,1	(2),11943	16	8,87078	28
15'	(1),32244	2,1	(2),11959	15	8,87106	29
10	(1),32265	2,1	(2),11974	16	8,87135	28
20	(1),32286	2,1	(2),11990	16	8,87163	29
30	(1),32307	2,1	(2),12006	15	8,87192	28
40	(1),32328	2,2	(2),12021	16	8,87220	29
50	(1),32350	2,1	(2),12037	16	8,87249	28
16'	(1),32371	2,1	(2),12053	16	8,87277	28
10	(1),32392	2,1	(2),12069	15	8,87305	29
20	(1),32413	2,1	(2),12084	16	8,87334	28
30	(1),32434	2,1	(2),12100	16	8,87362	28
40	(1),32455	2,1	(2),12116	15	8,87390	29
50	(1),32476	2,1	(2),12131	16	8,87419	28
17'	(1),32497	2,2	(2),12147	16	8,87447	28
10	(1),32519	2,1	(2),12163	16	8,87475	28
20	(1),32540	2,1	(2),12179	16	8,87503	29
30	(1),32561	2,1	(2),12195	15	8,87532	28
40	(1),32582	2,1	(2),12210	16	8,87560	28
50	(1),32603	2,1	(2),12226	16	8,87588	28
18'	(1),32624	2,1	(2),12242	16	8,87616	28
10	(1),32645	2,1	(2),12258	16	8,87644	29
20	(1),32666	2,1	(2),12274	16	8,87673	28
30	(1),32687	2,2	(2),12290	15	8,87701	28
40	(1),32709	2,1	(2),12305	16	8,87729	28
50	(1),32730	2,1	(2),12321	16	8,87757	28
19'	(1),32751	2,1	(2),12337	16	8,87785	28
10	(1),32772	2,1	(2),12353	16	8,87813	28
20	(1),32793	2,1	(2),12369	16	8,87841	28
30	(1),32814	2,1	(2),12385	16	8,87869	28
40	(1),32835	2,1	(2),12401	16	8,87897	28
50	(1),32856	2,1	(2),12417	16	8,87925	28
20'	(1),32877		(2),12433		8,87953	

$\omega = 4$ Grad.

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.	ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
20'	(1),32877	2,1	(2),12133	16	8,87953	28	30'	(1),34145	2,1	(2),13409	16	8,89598	27
10	(1),32899	2,1	(2),12449	16	8,87981	28	10	(1),34166	2,1	(2),13425	17	8,89625	27
20	(1),32920	2,1	(2) 12465	16	8,88009	28	20	(1),34187	2,1	(2),13442	16	8,89652	27
30	(1),32941	2,1	(2),12481	16	8,88037	28	30	(1),34208	2,1	(2),13458	17	8,89679	27
40	(1),32962	2,1	(2),12497	16	8,88065	27	40	(1),34229	2,1	(2),13475	17	8,89706	37
50	(1),32983	2,1	(2),12513	16	8,88092	28	50	(1),34250	2,1	(2),13492	16	8,89733	27
21'	(1),33004	2,1	(2),12529	16	8,88120	28	31'	(1),34271	2,1	(2),13508	17	8,89760	26
10	(1),33025	2,1	(2),12545	16	8,88148	28	10	(1),34292	2,1	(2),13525	16	8,89786	27
20	(1),33046	2,1	(2),12561	16	8,88176	28	20	(1),34313	2,2	(2),13541	17	8,89813	27
30	(1),33067	2,2	(2),12577	16	8,88204	27	30	(1),34335	2,1	(2),13558	17	8,89840	27
40	(1),33089	2,1	(2),12593	16	8,88231	28	40	(1),34356	2,1	(2),13575	16	8,89867	27
50	(1),33110	2,1	(2),12609	16	8,88259	28	50	(1),34377	2,1	(2),13591	17	8,89894	26
22'	(1),33131	2,1	(2),12625	16	8,88287	28	32'	(1),34398	2,1	(2),13608	17	8,89920	27
10	(1),33152	2,1	(2),12641	16	8,88315	27	10	(1),34419	2,1	(2),13625	17	8,89947	27
20	(1),33173	2,1	(2),12657	16	8,88342	28	20	(1),34440	2,1	(2),13642	16	8,89974	26
30	(1),33194	2,1	(2),12673	16	8,88370	28	30	(1),34461	2,1	(2),13658	17	8,90000	27
40	(1),33215	2,1	(2),12689	16	8,88398	27	40	(1),34482	2,2	(2),13675	17	8,90027	27
50	(1),33236	2,2	(2),12705	17	8,88425	28	50	(1),34504	2,1	(2),13692	16	8,90054	26
23'	(1),33258	2,1	(2),12722	16	8,88453	28	33	(1),34525	2,1	(2),13708	17	8,90080	27
10	(1),33279	2,1	(2),12738	16	8,88481	27	10	(1),34546	2,1	(2),13725	17	8,90107	27
20	(1),33300	2,1	(2),12754	16	8,88508	28	20	(1),34567	2,1	(2),13742	17	8,90131	26
30	(1),33321	2,1	(2),12770	16	8,88536	27	30	(1),34588	2,1	(2),13759	17	8,90160	27
40	(1),33342	2,1	(2),12786	16	8,88563	28	40	(1),34609	2,1	(2),13776	16	8,90187	26
50	(1),33363	2,1	(2),12802	17	8,88591	27	50	(1),34630	2,1	(2),13792	17	8,90213	27
24'	(1),33384	2,1	(2),12819	16	8,88618	28	34'	(1),34651	2,2	(2),13809	17	8,90240	26
10	(1),33405	2,1	(2),12835	16	8,88646	28	10	(1),34673	2,1	(2),13826	17	8,90266	27
20	(1),33426	2,2	(2),12851	16	8,88674	27	20	(1),34694	2,1	(2),13843	17	8,90293	26
30	(1),33448	2,1	(2),12867	17	8,88701	27	30	(1),34715	2,1	(2),13860	17	8,90319	27
40	(1),33469	2,1	(2),12884	16	8,88728	28	40	(1),34736	2,1	(2),13877	16	8,90346	26
50	(1),33490	2,1	(2),12900	16	8,88756	27	50	(1),34757	2,1	(2),13893	17	8,90372	27
25'	(1),33511	2,1	(2),12916	16	8,88783	28	35'	(1),34778	2,1	(2),13910	17	8,90399	26
10	(1),33532	2,1	(2),12932	17	8,88811	27	10	(1),34799	2,1	(2),13927	17	8,90425	26
20	(1),33553	2,1	(2),12949	16	8,88838	28	20	(1),34820	2,2	(2),13944	17	8,90151	27
30	(1),33574	2,1	(2),12965	16	8,88866	27	30	(1),34842	2,1	(2),13961	17	8,90178	26
40	(1),33595	2,2	(2),12981	16	8,88893	27	40	(1),34863	2,1	(2),13978	17	8,90504	27
50	(1),33617	2,1	(2),12997	17	8,88920	28	50	(1),34884	2,1	(2),13995	17	8,90531	26
26'	(1),33638	2,1	(2),13014	16	8,88948	27	36'	(1),34905	2,1	(2),14012	17	8,90557	26
10	(1),33659	2,1	(2),13030	16	8,88975	27	10	(1),34926	2,1	(2),14029	17	8,90583	27
20	(1),33680	2,1	(2),13046	17	8,89002	27	20	(1),34947	2,1	(2),14046	17	8,90610	26
30	(1),33701	2,1	(2),13063	16	8,89029	28	30	(1),34968	2,1	(2),14063	17	8,90636	26
40	(1),33722	2,1	(2),13079	17	8,89057	27	40	(1),34989	2,2	(2),14080	17	8,90662	25
50	(1),33743	2,1	(2),13096	16	8,89084	27	50	(1),35011	2,1	(2),14097	17	8,90688	27
27	(1),33764	2,1	(2),13112	16	8,89111	27	37	(1),35032	2,1	(2),14114	17	8,90715	26
10	(1),33785	2,2	(2),13128	17	8,89138	28	10	(1),35053	2,1	(2),14131	17	8,90741	26
20	(1),33807	2,1	(2),13145	16	8,89166	27	20	(1),35074	2,1	(2),14148	17	8,90767	26
30	(1),33828	2,1	(2),13161	17	8,89193	27	30	(1),35095	2,1	(2),14165	17	8,90793	27
40	(1),33849	2,1	(2),13178	16	8,89220	27	40	(1),35116	2,1	(2),14182	17	8,90820	26
50	(1),33870	2,1	(2),13194	16	8,89247	27	50	(1),35137	2,1	(2),14199	17	8,90846	26
28'	(1),33891	2,1	(2),13210	17	8,89274	27	38	(1),35158	2,2	(2),14216	17	8,90872	26
10	(1),33912	2,1	(2),13227	16	8,89301	27	10	(1),35180	2,1	(2),14233	17	8,90898	26
20	(1),33933	2,1	(2),13243	17	8,89328	27	20	(1),35201	2,1	(2),14250	17	8,90924	26
30	(1),33954	2,2	(2),13260	16	8,89355	28	30	(1),35222	2,1	(2),14267	17	8,90950	26
40	(1),33976	2,1	(2),13276	17	8,89383	27	40	(1),35243	2,1	(2),14284	17	8,90976	26
50	(1),33997	2,1	(2),13293	16	8,89410	27	50	(1),35264	2,1	(2),14301	17	8,91002	27
29'	(1),34018	2,1	(2),13309	17	88,9137	27	39	(1),35285	2,1	(2),14318	17	8,91029	26
10	(1),34039	2,1	(2),13326	16	8,89464	27	10	(1),35306	2,1	(2),14335	18	8,91055	26
20	(1),34060	2,1	(2),13342	17	8,89491	27	20	(1),35327	2,2	(2),14353	17	8,91081	26
30	(1),34081	2,1	(2),13359	16	8,89518	27	30	(1),35349	2,1	(2),14370	17	8,91107	26
40	(1),34102	2,1	(2),13375	17	8,89545	26	40	(1),35370	2,1	(2),14387	17	8,91133	26
50	(1),34123	2,2	(2),13392	17	8,89571	27	50	(1),35391	2,1	(2),14404	17	8,91159	26
30'	(1),34145		(2),13409		8,89598		40'	(1),35412		(2),14421		8,91185	

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	logSin z	Diff.	ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	logSin z	Diff.
40′	(1).35412	2.1	(2).14421	17	8.91185	26	50′	(1).36680	2.1	(2).15471	18	8.92716	25
10	(1).35433	2.1	(2).14438	18	8.91211	25	10	(1).36701	2.1	(2).15489	18	8.92741	25
20	(1).35454	2.1	(2).14456	17	8.91236	26	20	(1).36722	2.1	(2).15507	17	8.92766	25
30	(1).35475	2.1	(2).14473	17	8.91262	26	30	(1).36743	2.1	(2).15524	18	8.92791	25
40	(1).35496	2.2	(2).14490	17	8.91288	26	40	(1).36764	2.1	(2).15542	18	8.92846	25
50	(1).35518	2.1	(2).14507	18	8.91314	26	50	(1).36785	2.1	(2).15560	18	8.92841	25
41′	(1).35539	2.1	(2).14525	17	8.91340	26	51′	(1).36806	2.1	(2).15578	18	8.92866	25
10	(1).35560	2.1	(2).14542	17	8.91366	26	10	(1).36827	2.2	(2).15596	18	8.92891	25
20	(1).35581	2.1	(2).14559	17	8.91392	26	20	(1).36819	2.1	(2).15614	18	8.92916	25
30	(1).35602	2.1	(2).14576	18	8.91418	25	30	(1).36870	2.1	(2).15632	18	8.92941	25
40	(1).35623	2.1	(2).14594	17	8.91443	26	40	(1).36891	2.1	(2).15650	17	8.92966	25
50	(1).35644	2.1	(2).14611	17	8.91469	26	50	(1).36912	2.1	(2).15667	18	8.92991	25
42′	(1).35665	2.2	(2).14628	18	8.91495	26	52′	(1).36933	2.1	(2).15685	18	8.93016	24
10	(1).35687	2.1	(2).14646	17	8.91521	26	10	(1).36954	2.1	(2).15703	18	8.93040	25
20	(1).35708	2.1	(2).14663	17	8.91547	25	20	(1).36975	2.2	(2).15721	18	8.93065	25
30	(1).35729	2.1	(2).14680	18	8.91572	26	30	(1).36997	2.1	(2).15739	18	8.93090	25
40	(1).35750	2.1	(2).14698	17	8.91598	26	40	(1).37018	2.1	(2).15757	18	8.93115	25
50	(1).35771	2.1	(2).14715	17	8.91624	26	50	(1).37039	2.1	(2).15775	18	8.93140	25
43′	(1).35792	2.1	(2).14732	18	8.91650	25	53′	(1).37060	2.1	(2).15793	18	8.93165	25
10	(1).35813	2.1	(2).14750	17	8.91675	26	10	(1).37081	2.1	(2).15811	18	8.93190	24
20	(1).35834	2.2	(2).14767	17	8.91701	26	20	(1).37102	2.1	(2).15829	18	8.93214	25
30	(1).35856	2.1	(2).14784	18	8.91727	25	30	(1).37123	2.1	(2).15847	18	8.93239	25
40	(1).35877	2.1	(2).14802	17	8.91752	26	40	(1).37144	2.2	(2).15865	18	8.93264	25
50	(1).35898	2.1	(2).14819	18	8.91778	25	50	(1).37166	2.1	(2).15883	18	8.93289	24
44′	(1).35919	2.1	(2).14837	17	8.91803	26	54′	(1).37187	2.1	(2).15901	18	8.93313	25
10	(1).35940	2.1	(2).14851	18	8.91829	26	10	(1).37208	2.1	(2).15919	18	8.93338	25
20	(1).35961	2.1	(2).14872	17	8.91855	25	20	(1).37229	2.1	(2).15937	18	8.93363	25
30	(1).35982	2.1	(2).14889	18	8.918[illegible]0	26	30	(1).37250	2.1	(2).15955	19	8.93388	24
40	(1).36003	2.2	(2).14907	17	8.91906	25	40	(1).37271	2.1	(2).15974	18	8.93412	25
50	(1).36025	2.1	(2).14924	18	8.91931	26	50	(1).37292	2.2	(2).15992	18	8.93437	25
45′	(1).36016	2.1	(2).14942	17	8.91957	25	55′	(1).37314	2.1	(2).16010	18	8.93462	24
10	(1).36067	2.1	(2).14959	18	8.91982	26	10	(1).37335	2.1	(2).16028	18	8.93486	25
20	(1).36088	2.1	(2).14977	17	8.92008	25	20	(1).37356	2.1	(2).16046	18	8.93511	25
30	(1).36109	2.1	(2).14994	18	8.92033	26	30	(1).37377	2.1	(2).16064	18	8.93536	24
40	(1).36130	2.1	(2).15012	17	8.92059	25	40	(1).37398	2.1	(2).16082	18	8.93560	25
50	(1).36151	2.1	(2).15029	18	8.92084	26	50	(1).37419	2.1	(2).16100	19	8.93585	24
46′	(1).36172	2.2	(2).15047	17	8.92110	25	56′	(1).37440	2.1	(2).16119	18	8.93609	25
10	(1).36194	2.1	(2).15064	18	8.92135	25	10	(1).37461	2.2	(2).16137	18	8.93634	24
20	(1).36215	2.1	(2).15082	17	8.92160	26	20	(1).37483	2.1	(2).16155	18	8.93658	25
30	(1).36236	2.1	(2).15099	18	8.92186	25	30	(1).37504	2.1	(2).16173	18	8.93683	24
40	(1).36257	2.1	(2).15117	18	8.92211	26	40	(1).37525	2.1	(2).16191	19	8.93707	25
50	(1).36278	2.1	(2).15135	17	8.92237	25	50	(1).37546	2.1	(2).16210	18	8.93732	24
47′	(1).36299	2.1	(2).15152	18	8.92262	25	57′	(1).37567	2.1	(2).16228	18	8.93756	25
10	(1).36320	2.1	(2).15170	17	8.92287	26	10	(1).37588	2.1	(2).16246	18	8.93781	24
20	(1).36341	2.2	(2).15187	18	8.92313	25	20	(1).37609	2.2	(2).16264	19	8.93805	25
30	(1).36363	2.1	(2) 15205	18	8.92338	25	30	(1).37631	2.1	(2).16283	18	8.93830	24
40	(1).36384	2.1	(2).15223	17	8.92363	25	40	(1).37652	2.1	(2).16301	18	8.93854	25
50	(1).36405	2.1	(2).15240	18	8.92388	26	50	(1).37673	2.1	(2).16319	18	8.93879	24
48′	(1).36426	2.1	(2) 15258	18	8.92114	25	58′	(1).37694	2.1	(2).16337	19	8.93903	25
10	(1).36447	2.1	(2).15276	17	8.92439	25	10	(1).37715	2.1	(2).16356	18	8.93928	24
20	(1).36468	2.1	(2).15293	18	8.92464	25	20	(1).37736	2.1	(2).16374	18	8.93952	24
30	(1).36489	2.2	(2).15311	18	8.92489	26	30	(1).37757	2.1	(2).16392	19	8.93976	25
40	(1).36511	2.1	(2).15329	18	8.92515	25	40	(1).37778	2.2	(2).16111	18	8.94001	24
50	(1).36532	2.1	(2).15347	17	8.92540	25	50	(1).37800	2.1	(2).16429	18	8.94025	24
49′	(1).36553	2.1	(2).15364	18	8.92565	25	59′	(1).37821	2.1	(2).16447	19	8.94049	25
10	(1).36574	2.1	(2).15382	18	8.92590	25	10	(1).37842	2.1	(2).16466	18	8.94074	24
20	(1).36595	2.1	(2).15400	18	8.92615	25	20	(1).37863	2.1	(2).16484	19	8.94098	24
30	(1).36616	2.1	(2).15418	17	8.92640	25	30	(1).37884	2.1	(2).16503	18	8.94122	25
40	(1).36637	2.1	(2).15435	18	8.92665	26	40	(1).37905	2.1	(2).16521	18	8.94147	24
50	(1).36658	2.2	(2).15453	18	8.92691	25	50	(1).37926	2.2	(2).16539	19	8.91171	24
50′	(1).36680		(2).15471		8.92716		60′	(1).37948		(2).16558		8.94195	

$\omega = 5$ Grad.

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0'	(1).37948	2.1	(2).16558	18	8,94195	24
10	(1).37969	2.1	(2).16576	19	8,94219	25
20	(1).37990	2.1	(2).16595	18	8,94244	24
30	(1).38011	2.1	(2).16613	19	8,94268	24
40	(1).38032	2.1	(2).16632	18	8,94292	24
50	(1).38053	2.1	(2).16650	18	8,94316	24
1'	(1).38074	2.1	(2).16668	19	8,91340	25
10	(1).38095	2.2	(2).16687	18	8,94365	21
20	(1).38117	2.1	(2).16705	19	8,94389	24
30	(1).38138	2.1	(2).16721	18	8,94113	24
40	(1).38159	2.1	(2).16742	19	8,94437	24
50	(1).38180	2.1	(2).16761	19	8,94461	24
2'	(1).38201	2.1	(2).16780	18	8,94485	21
10	(1).38222	2.1	(2).16798	19	8,94509	24
20	(1).38243	2.2	(2).16817	18	8,94533	21
30	(1).38265	2.1	(2).16835	19	8,94557	24
40	(1).38286	2.1	(2).16854	18	8,94581	25
50	(1).38307	2.1	(2).16872	19	8,94606	24
3'	(1).38328	2.1	(2).16891	19	8,94630	21
10	(1).38319	2.1	(2).16910	18	8,94654	24
20	(1).38370	2.1	(2).16928	19	8,94678	24
30	(1).38391	2.2	(2).16947	18	8,94702	23
40	(1).38113	2.1	(2).16965	19	8,94725	24
50	(1).38131	2.1	(2).16984	19	8,94749	24
4'	(1).38455	2.1	(2).17003	18	8,94773	24
10	(1).38176	2.1	(2).17021	19	8,94797	24
20	(1).38197	2.1	(2).17040	19	8,94821	24
30	(1).38518	2.1	(2).17059	19	8,94845	21
40	(1).38539	2.1	(2).17078	18	8,94869	24
50	(1).38560	2.2	(2).17096	19	8,94893	24
5'	(1).38582	2.1	(2).17115	19	8,94917	24
10	(1).38603	2.1	(2).17134	18	8,94941	23
20	(1).38624	2.1	(2).17152	19	8,94964	24
30	(1).38645	2.1	(2).17171	19	8,94988	24
40	(1).38666	2.1	(2).17190	19	8,95012	24
50	(1).38687	2.1	(2).17209	19	8,95036	24
6'	(1).38708	2.2	(2).17228	18	8,95060	23
10	(1).38720	2.1	(2).17246	19	8,95083	24
20	(1).38751	2.1	(2).17265	19	8,95107	24
30	(1).38772	2.1	(2).17284	19	8,95131	24
40	(1).38793	2.1	(2).17303	19	8,95155	23
50	(1).38814	2.1	(2).17322	18	8,95178	21
7'	(1).38835	2.1	(2).17340	19	8,95202	24
10	(1).38856	2.2	(2).17359	19	8,95226	23
20	(1).38878	2.1	(2).17378	19	8,95249	24
30	(1).38899	2.1	(2).17397	19	8,95273	24
40	(1).38920	2.1	(2).17416	19	8,95297	23
50	(1).38941	2.1	(2).17435	19	8,95320	24
8'	(1).38962	2.1	(2).17451	19	8,95341	24
10	(1).38983	2.1	(2).17473	19	8,95368	23
20	(1).39004	2.2	(2).17492	19	8,95391	24
30	(1).39026	2.1	(2).17511	19	8,95415	24
40	(1).39047	2.1	(2).17530	18	8,95439	23
50	(1).39068	2.1	(2).17548	19	8,95462	24
9'	(1).39089	2.1	(2).17567	19	8,95486	23
10	(1).39110	2.1	(2).17586	19	8,95509	24
20	(1).39131	2.1	(2).17605	19	8,95533	23
30	(1).39152	2.2	(2).17624	19	8,95556	24
40	(1).39174	2.1	(2).17643	19	8,95580	.23
50	(1).39195	2.1	(2).17662	20	8,95603	24
10'	(1).39216		(2).17682		8,95627	

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
10	(1).39216	2.1	(2).17682	19	8,95627	23
10	(1).39237	2.1	(2).17701	19	8,95650	24
20	(1).39258	2.1	(2).17720	19	8,95671	23
30	(1).39279	2.1	(2).17739	19	8,95697	21
40	(1).39300	2.2	(2).17758	19	8,95721	23
50	(1).39322	2.1	(2).17777	19	8,95744	23
11'	(1).39343	2.1	(2).17796	19	8,95767	24
10	(1).39364	2.1	(2).17815	19	8,95791	23
20	(1).39385	2.1	(2).17834	19	8,95814	21
30	(1).39406	2.1	(2).17853	19	8,95838	23
40	(1).39427	2.1	(2).17872	20	8,95861	23
50	(1).39448	2 2	(2).17892	19	8,95884	21
12	(1).39470	2.1	(2).17911	19	8,95908	23
10	(1).39491	2.1	(2).17930	19	8,95931	23
20	(1).39512	2.1	(2).17949	19	8,95954	23
30	(1).39533	2.1	(2).17968	19	8,95977	24
40	(1).39551	2.1	(2).17987	20	8,96001	23
50	(1).39575	2.1	(2).18007	19	8,96024	23
13'	(1).39596	2.2	(2).18026	19	8,96017	24
10	(1).39618	2.1	(2).18015	19	8,96071	23
20	(1).39639	2.1	(2).18064	20	8,96091	23
30	(1).39650	2.1	(2).18084	19	8,96147	23
40	(1).39681	2.1	(2).18103	19	8,96140	23
50	(1).39702	2.1	(2).18122	19	8,96163	24
14'	(1).39723	2.1	(2).18141	20	8,96187	23
10	(1).39744	2.2	(2).18161	19	8,96210	23
20	(1).39766	2.1	(2).18180	19	8,96233	23
30	(1).39787	2.1	(2).18199	20	8,96256	23
40	(1).39808	2.1	(2).18219	19	8,96279	23
50	(1).39829	2.1	(2).18238	19	8,96302	23
15'	(1).39850	2.1	(2).18257	20	8,96325	24
10	(1).39871	2.1	(2).18277	19	8,96349	23
20	(1).39892	2.2	(2).18296	19	8,96372	23
30	(1).39941	2.1	(2).18315	20	8,96395	23
40	(1).39935	2.1	(2).18335	19	8,96418	23
50	(1).39956	2.1	(2).18354	20	8,96441	23
16'	(1).39977	2.1	(2).18374	19	8,96464	23
10	(1).39998	2.1	(2).18393	19	8,96187	23
20	(1).40019	2.1	(2).18412	20	8,96540	23
30	(1).40010	2.2	(2).18432	19	8,96533	23
40	(1).40062	2.1	(2).18451	20	8,96556	23
50	(1).40083	2.1	(2).18471	19	8,96579	23
17'	(1).40104	2.1	(2).18490	20	8,96602	23
10	(1).40125	2.1	(2).18510	19	8,96625	23
20	(1).40146	2.1	(2).18529	20	8,96648	23
30	(1).40167	2.1	(2).18549	19	8,96671	23
40	(1).40188	2.2	(2).18568	20	8,96694	23
50	(1).40200	2.1	(2).18588	19	8,96717	22
18'	(1).40231	2.1	(2).18607	20	8,96739	23
10	(1).40252	2.1	(2).18627	19	8,96762	23
20	(1).40273	2.1	(2).18646	20	8,96785	23
30	(1).40294	2.1	(2).18666	19	8,96808	23
40	(1).40315	2.1	(2).18685	20	8,96831	23
50	(1).40336	2.2	(2).18705	20	8,96854	23
19	(1).40358	2.1	(2).18725	19	8,96877	22
10	(1).40379	2.1	(2).18744	20	8,96899	23
20	(1).40390	2.1	(2).18764	19	8,96922	23
30	(1).40421	2.1	(2).18783	20	8,96945	23
40	(1).40442	2.1	(2).18803	20	8,96968	23
50	(1).40463	2.1	(2).18823	19	8,96991	22
20'	(1).40484		(2).18842		8,97013	

$\omega = 5$ Grad.

ω	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
20′	(1).40481	2.2	(2).18842	20	8.97013	23
10	(1).40506	2.1	(2).18862	20	8.97036	23
20	(1).40527	2.1	(2).18882	19	8.97059	22
30	(1).40548	2.1	(2).18901	20	8.97081	23
40	(1).40569	2.1	(2).18921	20	8.97104	23
50	(1).40590	2.1	(2).18941	19	8.97127	23
21′	(1).40611	2.2	(2).18960	20	8.97150	22
10	(1).40633	2.1	(2).18980	20	8.97172	23
20	(1).40654	2.1	(2).19000	20	8.97195	23
30	(1).40675	2.1	(2).19020	19	8.97218	22
40	(1).40696	2.1	(2).19039	20	8.97240	23
50	(1).40717	2.1	(2).19059	20	8.97263	22
22′	(1).40738	2.1	(2).19079	20	8.97285	23
10	(1).40759	2.2	(2).19099	20	8.97308	23
20	(1).40781	2.1	(2).19119	19	8.97331	22
30	(1).40802	2.1	(2).19138	20	8.97353	23
40	(1).40823	2.1	(2).19158	20	8.97376	22
50	(1).40844	2.1	(2).19178	20	8.97398	23
23′	(1).40865	2.1	(2).19198	20	8.97421	22
10	(1).40886	2.1	(2).19218	20	8.97443	23
20	(1).40907	2.2	(2).19238	19	8.97466	22
30	(1).40929	2.1	(2).19257	20	8.97488	23
40	(1).40940	2.1	(2).19277	20	8.97511	22
50	(1).40971	2.1	(2).19297	20	8.97533	23
24′	(1).40992	2.1	(2).19317	20	8.97556	22
10	(1).41013	2.1	(2).19337	20	8.97578	23
20	(1).41034	2.1	(2).19357	20	8.97601	22
30	(1).41055	2.2	(2).19377	20	8.97623	23
40	(1).41077	2.1	(2).19397	20	8.97646	22
50	(1).41098	2.1	(2).19417	20	8.97668	23
25′	(1).41119	2.1	(2).19437	20	8.97691	22
10	(1).41140	2.1	(2).19457	20	8.97713	22
20	(1).41161	2.1	(2).19477	20	8.97735	23
30	(1).41182	2.2	(2).19497	20	8.97758	22
40	(1).41204	2.1	(2).19517	20	8.97780	22
50	(1).41225	2.1	(2).19537	20	8.97802	23
26′	(1).41246	2.1	(2).19557	20	8.97825	22
10	(1).41267	2.1	(2).19577	20	8.97847	22
20	(1).41288	2.1	(2).19597	20	8.97869	23
30	(1).41309	2.1	(2).19617	20	8.97892	22
40	(1).41330	2.2	(2).19637	20	8.97914	22
50	(1).41352	2.1	(2).19657	20	8.97936	23
27′	(1).41373	2.1	(2).19677	20	8.97959	22
10	(1).41394	2.1	(2).19697	20	8.97981	22
20	(1).41415	2.1	(2).19717	20	8.98003	22
30	(1).41436	2.1	(2).19737	20	8.98025	23
40	(1).41457	2.1	(2).19757	21	8.98048	22
50	(1).41478	2.2	(2).19778	20	8.98070	22
28′	(1).41490	2.1	(2).19798	20	8.98092	22
10	(1).41521	2.1	(2).19818	20	8.98114	22
20	(1).41542	2.1	(2).19838	20	8.98136	23
30	(1).41563	2.1	(2).19858	20	8.98159	22
40	(1).41584	2.1	(2).19878	21	8.98181	22
50	(1).41605	2.2	(2).19899	20	8.98203	22
29′	(1).41627	2.1	(2).19919	20	8.98225	22
10	(1).41648	2.1	(2).19939	20	8.98247	22
20	(1).41669	2.1	(2).19959	20	8.98269	22
30	(1).41690	2.1	(2).19979	21	8.98291	23
40	(1).41711	2.1	(2).20000	20	8.98314	22
50	(1).41732	2.1	(2).20020	20	8.98336	22
30′	(1).41753		(2).20040		8.98358	

ω	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
30′	(1).41753	2.2	(2).20040	21	8.98358	22
10	(1).41775	2.1	(2).20061	20	8.98380	22
20	(1).41796	2.1	(2).20081	20	8.98402	22
30	(1).41817	2.1	(2).20101	20	8.98424	22
40	(1).41838	2.1	(2).20121	21	8.98446	22
50	(1).41859	2.1	(2).22142	20	8.98468	22
31′	(1).41880	2.2	(2).20162	20	8.98490	22
10	(1).41902	2.1	(2).20182	21	8.98512	22
20	(1).41923	2.1	(2).20203	20	8.98534	22
30	(1).41944	2.1	(2).20223	20	8.98556	22
40	(1).41965	2.1	(2).20243	21	8.98578	22
50	(1).41986	2.1	(2).20264	20	8.98609	22
32′	(1).42007	2.1	(2).20284	21	8.98622	22
10	(1).42028	2.2	(2).20305	20	8.98644	22
20	(1).42040	2.1	(2).20325	20	8.98666	21
30	(1).42071	2.1	(2).20345	21	8.98687	22
40	(1).42092	2.1	(2).20366	20	8.98709	22
50	(1).42113	2.1	(2).20386	21	8.98731	22
33′	(1).42134	2.1	(2).20407	20	8.98753	22
10	(1).42155	2.2	(2).20427	21	8.98775	22
20	(1).42177	2.1	(2).20448	20	8.98797	22
30	(1).42198	2.1	(2).20468	21	8.98819	22
40	(1).42219	2.1	(2).20489	20	8.98841	21
50	(1).42240	2.1	(2).20509	21	8.98862	22
34′	(1).42261	2.1	(2).20530	20	8.98884	22
10	(1).42282	2.1	(2).20550	21	8.98906	22
20	(1).42303	2.2	(2).20571	20	8.98928	22
30	(1).42325	2.1	(2).20591	21	8.98950	21
40	(1).42346	2.1	(2).20612	20	8.98971	22
50	(1).42367	2.1	(2).20632	21	8.98993	22
35′	(1).42388	2.1	(2).20653	21	8.99015	22
10	(1).42409	2.1	(2).20674	20	8.99037	21
20	(1).42430	2.2	(2).20694	21	8.99058	22
30	(1).42452	2.1	(2).20715	20	8.99080	22
40	(1).42473	2.1	(2).20735	21	8.99102	21
50	(1).42494	2.1	(2).20756	21	8.99123	22
36′	(1).42515	2.1	(2).20777	20	8.99145	22
10	(1).42536	2.1	(2).20797	21	8.99167	21
20	(1).42557	2.1	(2).20818	21	8.99188	22
30	(1).42578	2.2	(2).20839	20	8.99210	22
40	(1).42590	2.1	(2).20859	21	8.99232	21
50	(1).42621	2.1	(2).20880	21	8.99253	22
37′	(1).42612	2.1	(2).20901	21	8.99275	22
10	(1).42663	2.1	(2).20922	20	8.99297	21
20	(1).42684	2.1	(2).20942	21	8.99318	22
30	(1).42705	2.2	(2).20963	21	8.99340	21
40	(1).42727	2.1	(2).20984	20	8.99361	22
50	(1).42748	2.1	(2).21004	21	8.99383	22
38′	(1).42769	2.1	(2).21025	21	8.99405	21
10	(1).42790	2.1	(2).21046	21	8.99426	22
20	(1).42811	2.1	(2).21067	21	8.99448	21
30	(1).42832	2.2	(2).21088	20	8.99469	22
40	(1).42854	2.1	(2).21108	21	8.99491	21
50	(1).42875	2.1	(2).21129	21	8.99512	22
39′	(1).42896	2.1	(2).21150	21	8.99534	21
10	(1).42917	2.1	(2).21171	21	8.99555	22
20	(1).42938	2.1	(2).21192	21	8.99577	21
30	(1).42959	2.1	(3).21213	20	8.99598	22
40	(1).42980	2.2	(2).21233	21	8.99620	21
50	(1).43002	2.1	(2).21254	21	8.99641	22
40′	(1).43023		(2).21275		8.99662	

ω = 5 Grad.

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.	ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
40'	(1).43023	2.1	(2),21275	21	8,99662	22	**50'**	(1).41292	2.2	(2),22547	22	9,00930	21
10	(1).43044	2.1	(2),21296	21	8,99684	21	10	(1).44314	2.1	(2),22569	21	9,00951	20
20	(1).43065	2.1	(2),21317	21	8,99705	22	20	(1).41335	2.1	(2),22590	22	9,00971	21
30	(1).43086	2.1	(2),21338	21	8,99727	21	30	(1).44356	2.1	(2),22612	21	9,00992	21
40	(1).43107	2.2	(2),21359	21	8,99748	21	40	(1).41377	2.1	(2),22633	22	9,01013	21
50	(1).13129	2.1	(2),21380	21	8,99769	22	50	(1).34398	2.1	(2),22655	22	9,01034	21
41'	(1).43140	2.1	(2),21401	21	8,99791	21	**51'**	(1).44419	2.2	(2),22677	21	9,01055	20
10	(1).43171	2.1	(2),21422	21	8,99812	22	10	(1).41441	2.1	(2),22698	22	9,01075	21
20	(1).13192	2.1	(2),21443	21	8,99834	21	20	(1).44162	2.1	(2),22720	21	9,01096	21
30	(1).13213	2.1	(2),21464	21	8,99855	21	30	(1).44483	2.1	(2),22741	22	9,01117	21
40	(1).13234	2.2	(2),21485	21	8,99876	22	40	(1).44504	2.1	(2),22763	22	9,01138	20
50	(1).43256	2.1	(2),21506	21	8,99898	21	50	(1).44525	2.1	(2),22785	21	9,01158	21
42'	(1).43277	2.1	(2),21527	21	8,99919	21	**52'**	(1).44546	2.2	(2),22806	22	9,01179	21
10	(1).43298	2.1	(2),21548	21	8,99940	21	10	(1).44568	2.1	(2),22828	21	9,01200	20
20	(1).43319	2.1	(2),21569	21	8,99961	22	20	(1).44589	2.1	(2),22849	22	9,01220	21
30	(1).43310	2.1	(2),21590	21	8,99983	21	30	(1).44610	2.1	(2),22871	22	9,01241	21
40	(1).43361	2.1	(2),21611	21	9,00004	21	40	(1).44631	2.1	(2),22893	21	9,01262	20
50	(1).43382	2.2	(2),21632	21	9,00025	21	50	(1).44652	2.1	(2),22914	22	9,01282	21
43'	(1).43404	2.1	(2),21653	21	9,00046	22	**53'**	(1).44673	2.2	(2),22936	22	9,01303	21
10	(1).43425	2.1	(2),21674	21	9,00068	21	10	(1).44695	2.1	(2),22958	22	9,01324	20
20	(1).43446	2.1	(2),21695	21	9,00089	21	20	(1).44716	2.1	(2),22980	21	9,01341	21
30	(1).43167	2.1	(2),21716	21	9,00110	21	30	(1).44737	2.1	(2),23001	22	9,01365	21
40	(1).43188	2.1	(2),21737	21	9,00131	22	40	(1).44758	2.1	(2),23023	22	9,01386	20
50	(1).43509	2.2	(2),21758	22	9,00153	21	50	(1).44779	2.1	(2),23045	22	9,01406	21
44'	(1).43531	2.1	(2),21780	21	9,00174	21	**54'**	(1).44800	2.2	(2),23067	21	9,01427	20
10	(1).43552	2.1	(2),21801	21	9,00195	21	10	(1).41822	2.1	(2),23088	22	9,01447	21
20	(1).43573	2.1	(2),21822	21	9,00216	21	20	(1).41843	2.1	(2),23110	22	9,01468	21
30	(1).43591	2.1	(2),21843	21	9,00237	21	30	(1).44864	2.1	(2),23132	22	9,01489	20
40	(1).43615	2.1	(2),21864	21	9,00258	22	40	(1).44885	2.1	(2),23154	21	9,01509	21
50	(1).13636	2.2	(2),21885	22	9,00280	21	50	(1).44906	2.1	(2),23175	22	9,01530	20
45'	(1).43658	2.1	(2),21907	21	9,00301	21	**55'**	(1).44927	2.2	(2),23197	22	9,01550	21
10	(1).43679	2.1	(2),21928	21	9,00322	21	10	(1).44949	2.1	(2),23219	22	9,01571	20
20	(1).43690	2.1	(2),21949	21	9,00313	21	20	(1).44960	2.1	(2),23241	22	9,01591	21
30	(1).43721	2.1	(2),21970	21	9,00364	21	30	(1).44991	2.1	(2),23263	22	9,01612	20
40	(1).43742	2.1	(2),21991	22	9,00385	21	40	(1).45012	2.1	(2),23285	21	9,01632	21
50	(1).43763	2.2	(2),22013	21	9,00106	21	50	(1).45033	2.1	(2),23306	22	9,01653	20
46'	(1).43785	2.1	(2),22034	21	9,00427	21	**56'**	(1).45054	2.2	(2),23328	22	9,01673	21
10	(1).43806	2.1	(2),22055	22	9,00448	21	10	(1).45076	2.1	(2),23350	22	9,01694	20
20	(1).43827	2.1	(2),22077	21	9,00169	21	20	(1).45097	2.1	(2),23372	22	9,01714	21
30	(1).43848	2.1	(2),22098	21	9,00190	21	30	(1).45118	2.1	(2),23394	22	9,01735	20
40	(1).43869	2.1	(2),22119	21	9,00511	21	40	(1).45139	2.1	(2),23416	22	9,01755	21
50	(1).43890	2.2	(2),22140	22	9,00532	21	50	(1).45160	2.1	(2),23438	22	9,01776	20
47'	(1).43912	2.1	(2),22162	21	9,00553	21	**57'**	(1).45181	2.2	(2),23460	22	9,01796	20
10	(1).43933	2.1	(2),22183	21	9,00574	21	10	(1).45203	2.1	(2),23482	22	9,01816	21
20	(1).43954	2.1	(2),22204	22	9,00595	21	20	(1).45224	2.1	(2),23504	22	9,01837	20
30	(1).13975	2.1	(2),22226	21	9,00616	21	30	(1).45245	2.1	(2),23526	22	9,01857	21
40	(1).13996	2.1	(2),22217	22	9,00637	21	40	(1).45266	2.1	(2),23548	22	9,01878	20
50	(1).44017	2.2	(2),22269	21	9,00658	21	50	(1).45287	2.2	(2),23570	22	9,01898	20
48'	(1).44039	2.1	(2),22290	21	9,00679	21	**58'**	(1).45309	2.1	(2),23592	22	9,01918	21
10	(1).44050	2.1	(2),22311	22	9,00700	21	10	(1).45320	2.1	(2),23614	22	9,01939	20
20	(1).44081	2.1	(2),22333	21	9,00721	21	20	(1).45351	2.1	(2),23636	22	9,01959	20
30	(1).44102	2.1	(2),22354	22	9,00742	21	30	(1).45372	2.1	(2),23658	22	9,01979	21
40	(1).44123	2.1	(2),22376	21	9,00763	21	40	(1).45393	2.1	(2),23680	22	9,02000	20
50	(1).44144	2.1	(2),22397	21	9,00784	21	50	(1).45411	2.2	(2),23702	22	9,02020	20
49'	(1).44165	2.2	(2),22118	22	9,00805	21	**59'**	(1).45436	2.1	(2),23724	22	9,02010	21
10	(1).44187	2.1	(2),22440	21	9,00826	20	10	(1).45457	2.1	(2),23746	22	9,02061	20
20	(1).44208	2.1	(2),22461	22	9,00846	21	20	(1).45478	2.1	(2),23768	22	9,02081	20
30	(1).44229	2.1	(2),22183	21	9,00867	21	30	(1).45499	2.1	(2),23790	22	9,02101	20
40	(1).44250	2.1	(2),22501	22	9,00888	21	40	(1).45520	2.1	(2),23812	22	9,02121	21
50	(1).44271	2.1	(2),22526	21	9,00909	21	50	(1).45541	2.2	(2),23834	23	9,02142	20
50'	(1).41292		(2),22547		9,00930		**60'**	(1).45563		(2),23857		9,02162	

$\omega = 6$ Grad.

ω ′	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	(1),45563	127	(2),23857	132	9,02162	121
1	(1),45690	127	(2),23989	134	9,02283	121
2	(1),45817	127	(2),24123	134	9,02404	121
3	(1),45944	127	(2),24257	134	9,02525	120
4	(1),46071	127	(2),24391	134	9,02645	121
5	(1),46198	127	(2),24525	135	9,02766	119
6	(1),46325	127	(2),24660	135	9,02885	120
7	(1),46452	127	(2),24795	136	9,03005	119
8	(1),46579	127	(2),24931	136	9,03124	118
9	(1),46706	127	(2),25067	136	9,03242	119
10	(1),46833	127	(2),25203	137	9,03361	118
11	(1),46960	127	(2),25340	137	9,03179	118
12	(1),47087	127	(2),25477	137	9,03597	117
13	(1),47214	127	(2),25614	138	9,03714	118
14	(1),47341	127	(2),25752	138	9,03832	116
15	(1),47468	127	(2),25890	139	9,03948	117
16	(1),47595	128	(2),26029	138	9,04065	116
17	(1),47723	127	(2),26167	140	9,04181	116
18	(1),47850	127	(2),26307	139	9,04297	116
19	(1),47977	127	(2),26446	140	9,04413	115
20	(1),48104	127	(2),26586	141	9,04528	115
21	(1),48231	127	(2),26727	141	9,04643	115
22	(1),48358	127	(2),26868	141	9,04758	115
23	(1),48485	127	(2),27009	141	9,04873	114
24	(1),48612	127	(2),27150	142	9,04987	114
25	(1),48739	128	(2),27292	142	9,05101	113
26	(1),48867	127	(2),27434	143	9,05214	114
27	(1),48994	127	(2),27577	143	9,05328	113
28	(1),49121	127	(2),27720	143	9,05441	112
29	(1),49248	127	(2),27863	144	9,05553	113
30	(1),49375	127	(2),28007	144	9,05666	112
31	(1),49502	127	(2),28151	145	9,05778	112
32	(1),49629	128	(2),28296	145	9,05890	112
33	(1),49757	127	(2),28441	145	9,06002	111
34	(1),49884	127	(2),28586	146	9,06113	111
35	(1),50011	127	(2),28732	146	9,06224	111
36	(1),50138	127	(2),28878	146	9,06335	110
37	(1),50265	127	(2),29024	147	9,06445	111
38	(1),50392	128	(2),29171	147	9,06556	110
39	(1),50520	127	(2),29318	147	9,06666	109
40	(1),50647	127	(2),29465	148	9,06775	110
41	(1),50774	127	(2),29613	148	9,06885	109
42	(1),50901	127	(2),29761	149	9,06991	109
43	(1),51028	128	(2),29910	149	9,07103	108
44	(1),51156	127	(2),30059	149	9,07211	109
45	(1),51283	127	(2),30208	150	9,07320	108
46	(1),51410	127	(2),30358	150	9,07428	108
47	(1),51537	128	(2),30509	150	9,07536	107
48	(1),51665	127	(2),30658	151	9,07643	108
49	(1),51792	127	(2),30809	151	9,07751	107
50	(1),51919	127	(2),30960	152	9,07858	106
51	(1),52046	127	(2),31112	152	9,07961	107
52	(1),52173	128	(2),31264	152	9,08071	106
53	(1),52301	127	(2),31416	153	9,08177	106
54	(1),52428	127	(2),31569	153	9,08283	106
55	(1),52555	127	(2),31722	153	9,08389	106
56	(1),52682	128	(2),31875	154	9,08495	105
57	(1),52810	127	(2),32029	154	9,08600	105
58	(1),52937	127	(2),32183	155	9,08705	105
59	(1),53064	128	(2),32338	155	9,08810	104
60	(1),53192		(2),32493		9,08914	

$\omega = 7$ Grad.

ω ′	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	(1),53192	127	(2),32493	155	9,08914	105
1	(1),53319	127	(2),32648	156	9,09019	104
2	(1),53446	127	(2),32804	156	9,09123	104
3	(1),53573	128	(2),32960	156	9,09227	103
4	(1),53701	127	(2),33116	157	9,09330	101
5	(1),53828	127	(2),33273	157	9,09431	103
6	(1),53955	128	(2),33430	158	9,09537	103
7	(1),54083	127	(2),33588	158	9,09640	102
8	(1),54210	127	(2),33746	158	9,09742	103
9	(1),54337	128	(2),33904	159	9,09845	102
10	(1),54465	127	(2),34063	159	9,09947	102
11	(1),54592	127	(2),34222	159	9,10049	101
12	(1),54719	128	(2),34381	160	9,10150	102
13	(1),54847	127	(2),34541	160	9,10252	101
14	(1),54974	127	(2),34701	161	9,10353	101
15	(1),55101	128	(2),34862	161	9,10454	101
16	(1),55229	127	(2),35023	161	9,10555	101
17	(1),55356	127	(2),35184	161	9,10656	100
18	(1),55483	128	(2),35345	162	9,10756	100
19	(1),55611	127	(2),35507	163	9,10856	100
20	(1),55738	127	(2),35670	163	9,10956	100
21	(1),55865	128	(2),35833	163	9,11056	99
22	(1),55993	127	(2),35996	163	9,11155	99
23	(1),56120	128	(2),36159	164	9,11254	99
24	(1),56248	127	(2),36323	164	9,11353	99
25	(1),56375	127	(2),36487	165	9,11452	99
26	(1),56502	128	(2),36652	165	9,11551	98
27	(1),56630	127	(2),36817	165	9,11649	98
28	(1),56757	128	(2),36982	166	9,11747	98
29	(1),56885	127	(2),37148	166	9,11845	98
30	(1),57012	127	(2),37314	167	9,11913	97
31	(1),57139	128	(2),37481	167	9,12010	98
32	(1),57267	127	(2),37648	167	9,12138	97
33	(1),57491	128	(2),37815	168	9,12235	97
34	(1),57522	127	(2),37983	168	9,12332	96
35	(1),57649	128	(2),38151	168	9,12428	97
36	(1),57777	127	(2),38319	169	9,12525	96
37	(1),57904	128	(2),38488	169	9,12621	96
38	(1),58032	127	(2),38657	169	9,12717	96
39	(1),58159	128	(2),38826	170	9,12813	96
40	(1),58287	127	(2),38996	170	9,12909	95
41	(1),58414	127	(2),39166	171	9,13004	95
42	(1),58541	128	(2),39337	171	9,13099	95
43	(1),58669	127	(2),39508	171	9,13194	95
44	(1),58796	128	(2),39679	172	9,13289	95
45	(1),58924	127	(2),39851	172	9,13384	94
46	(1),59051	128	(2),40023	173	9,13478	95
47	(1),59179	127	(2),40196	173	9,13573	91
48	(1),59306	128	(2),40369	173	9,13667	94
49	(1),59434	127	(2),40542	174	9,13761	93
50	(1),59561	128	(2),40716	173	9,13854	94
51	(1),59689	128	(2),40889	175	9,13948	93
52	(1),59817	127	(2),41064	175	9,14041	93
53	(1),59944	128	(2),41239	175	9,14134	93
54	(1),60072	127	(2),41414	175	9,14227	93
55	(1),60199	128	(2),41589	176	9,14320	92
56	(1),69327	127	(2),41765	176	9,14412	92
57	(1),60454	128	(2),41941	177	9,14504	93
58	(1),60582	127	(2),42118	177	9,14597	91
59	(1),60709	128	(2),42295	177	9,14688	92
60	(1),60837		(2),42472		9,14780	

$\omega = 8$ Grad.

ω ′	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	(1).60837	128	(2).42472	178	9.14780	92
1	(1).60965	127	(2).42650	178	9.14872	91
2	(1).61092	128	(2).42828	179	9.14963	91
3	(1).61220	127	(2).43007	178	9.15054	91
4	(1).61347	128	(2).43185	180	9.15145	91
5	(1).61475	127	(2).43365	179	9.15236	91
6	(1).61602	128	(2).43544	180	9.15327	90
7	(1).61730	128	(2).43724	181	9.15417	91
8	(1).61858	127	(2).43905	180	9.15508	90
9	(1).61985	128	(2).44085	181	9.15598	90
10	(1).62113	128	(2).44266	182	9.15688	89
11	(1).62241	127	(2).44448	182	9.15777	90
12	(1).62368	128	(2).44630	182	9.15867	89
13	(1).62496	127	(2).44812	183	9.15956	90
14	(1).62623	128	(2).44995	183	9.16046	89
15	(1).62751	128	(2).45178	183	9.16135	89
16	(1).62879	127	(2).45361	184	9.16224	88
17	(1).63006	128	(2).45545	184	9.16312	89
18	(1).63134	128	(2).45729	184	9.16401	88
19	(1).63262	127	(2).45913	185	9.16489	88
20	(1).63389	128	(2).46098	185	9.16577	88
21	(1).63517	128	(2).46283	186	9.16665	88
22	(1).63645	128	(2).46469	186	9.16753	88
23	(1).63773	127	(2).46655	186	9.16841	87
24	(1).63900	128	(2).46841	187	9.16928	88
25	(1).64028	128	(2).47028	187	9.17016	87
26	(1).64156	127	(2).47215	188	9.17103	87
27	(1).64283	128	(2).47403	188	9.17190	87
28	(1).64411	128	(2).47591	188	9.17277	86
29	(1).64539	128	(2).47779	188	9.17363	87
30	(1).64667	127	(2).47967	189	9.17450	86
31	(1).64794	128	(2).48156	190	9.17536	86
32	(1).64922	128	(2).48346	190	9.17622	86
33	(1).65050	128	(2).48536	190	9.17708	86
34	(1).65178	127	(2).48726	190	9.17794	86
35	(1).65305	128	(2).48916	191	9.17880	85
36	(1).65433	128	(2).49107	191	9.17965	86
37	(1).65561	128	(2).49298	192	9.18051	85
38	(1).65689	127	(2).49490	192	9.18136	85
39	(1).65816	128	(2).49682	192	9.18221	85
40	(1).65944	128	(2).49874	193	9.18306	85
41	(1).66072	128	(2).50067	193	9.18391	84
42	(1).66200	128	(2).50260	194	9.18475	85
43	(1).66328	127	(2).50454	194	9.18560	84
44	(1).66455	128	(2).50648	194	9.18644	84
45	(1).66583	128	(2).50842	194	9.18728	84
46	(1).66711	128	(2).51036	195	9.18812	84
47	(1).66839	128	(2).51231	196	9.18896	83
48	(1).66967	127	(2).51427	196	9.18979	84
49	(1).67094	128	(2).51623	196	9.19063	83
50	(1).67222	128	(2).51819	196	9.19146	83
51	(1).67350	128	(2).52015	197	9.19229	83
52	(1).67478	128	(2).52212	197	9.19312	83
53	(1).67606	128	(2).52409	198	9.19395	83
54	(1).67734	128	(2).52607	198	9.19478	83
55	(1).67862	128	(2).52805	198	9.19561	82
56	(1).67990	127	(2).53003	199	9.19643	82
57	(1).68117	128	(2).53202	199	9.19725	82
58	(1).68245	128	(2).53401	200	9.19807	82
59	(1).68373	128	(2).53601	200	9.19889	82
60	(1).68501		(2).53801		9.19971	

$\omega = 9$ Grad.

ω ′	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	(1).68501	128	(2).53801	200	9.19971	82
1	(1).68629	128	(2).54001	201	9.20053	81
2	(1).68757	128	(2).54202	201	9.20134	82
3	(1).68885	128	(2).54403	201	9.20216	81
4	(1).69013	128	(2).54604	202	9.20297	81
5	(1).69141	128	(2).54806	202	9.20378	81
6	(1).69269	128	(2).55008	203	9.20459	81
7	(1).69397	128	(2).55211	202	9.20540	81
8	(1).69525	127	(2).55413	204	9.20621	80
9	(1).69652	128	(2).55617	203	9.20701	81
10	(1).69780	128	(2).55820	205	9.20782	80
11	(1).69908	128	(2).56025	204	9.20862	80
12	(1).70036	128	(2).56229	205	9.20942	80
13	(1).70164	128	(2).56434	275	9.21022	80
14	(1).70292	128	(2).56639	205	9.21102	80
15	(1).70420	128	(2).56844	206	9.21182	79
16	(1).70548	128	(2).57050	207	9.21261	80
17	(1).70676	128	(2).57257	206	9.21341	79
18	(1).70804	128	(2).57463	207	9.21420	79
19	(1).70932	128	(2).57670	208	9.21499	79
20	(1).71060	128	(2).57878	208	9.21578	79
21	(1).71188	128	(2).58086	208	9.21657	79
22	(1).71316	129	(2).58294	208	9.21736	78
23	(1).71445	128	(2).58502	209	9.21814	79
24	(1).71573	128	(2).58711	210	9.21893	78
25	(1).71701	128	(2).58921	209	9.21971	78
26	(1).71829	128	(2).59130	211	9.22049	78
27	(1).71957	128	(2).59341	210	9.22127	78
28	(1).72085	128	(2).59551	211	9.22205	78
29	(1).72213	128	(2).59762	211	9.22283	78
30	(1).72341	128	(2).59973	212	9.22361	77
31	(1).72469	128	(2).60185	212	9.22438	78
32	(1).72597	128	(2).60397	212	9.22516	77
33	(1).72725	128	(2).60609	213	9.22593	77
34	(1).72853	128	(2).60822	213	9.22670	77
35	(1).72981	129	(2).61035	213	9.22747	77
36	(1).73110	128	(2).61248	214	9.22824	77
37	(1).73238	128	(2).61462	214	9.22901	76
38	(1).73366	128	(2).61676	215	9.22977	77
39	(1).73494	128	(2).61891	215	9.23054	76
40	(1).73622	128	(2).62106	215	9.23130	76
41	(1).73750	128	(2).62321	216	9.23206	77
42	(1).73878	129	(2).62537	216	9.23283	76
43	(1).74007	128	(2).62753	217	9.23359	76
44	(1).74135	128	(2).62970	217	9.23435	75
45	(1).74263	128	(2).63187	217	9.23510	76
46	(1).74391	128	(2).63404	218	9.23586	75
47	(1).74519	129	(2).63622	218	9.23661	76
48	(1).74648	128	(2).63840	218	9.23737	75
49	(1).74776	128	(2).64058	219	9.23812	75
50	(1).74904	128	(2).64277	219	9.23887	75
51	(1).75032	128	(2).64496	219	9.23962	75
52	(1).75160	129	(2).64715	220	9.24037	75
53	(1).75289	128	(2).64935	221	9.24112	74
54	(1).75417	128	(2).65156	220	9.24186	75
55	(1).75545	128	(2).65376	221	9.24261	74
56	(1).75673	129	(2).65597	222	9.24335	75
57	(1).75802	128	(2).65819	222	9.24410	74
58	(1).75930	128	(2).66041	222	9.24484	74
59	(1).76058	128	(2).66263	222	9.24558	74
60	(1).76186		(2).66485		9.24632	

$\omega = 10$ Grad. $\omega = 11$ Grad.

ω ′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.	ω ′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	(1).76186	129	(2).66485	223	9.24632	74	0	(1).83896	128	(2).80534	246	9.28865	68
1	(1).76315	128	(2).66708	224	9.24706	73	1	(1).84024	129	(2).80780	246	9.28933	67
2	(1).76443	128	(2).66932	223	9.24779	74	2	(1).84153	129	(2).81026	247	9.29000	67
3	(1).76571	129	(2).67155	224	9.24853	73	3	(1).84282	128	(2).81273	247	9.29067	67
4	(1).76700	128	(2).67379	225	9.24926	74	4	(1).84410	129	(2).81520	247	9.29134	67
5	(1).76828	128	(2).67604	225	9.25000	73	5	(1).84539	129	(2).81767	247	9.29201	67
6	(1).76956	129	(2).67829	225	9.25073	73	6	(1).84668	129	(2).82014	249	9.29268	67
7	(1).77085	128	(2).68054	226	9.25146	73	7	(1).84797	128	(2).82263	248	9.29335	67
8	(1).77213	128	(2).68280	226	9.25219	73	8	(1).84925	129	(2).82511	249	9.29402	66
9	(1).77341	129	(2).68506	226	9.25292	73	9	(1).85054	129	(2).82760	249	9.29468	67
10	(1).77470	128	(2).68732	227	9.25365	72	10	(1).85183	129	(2).83009	250	9.29535	66
11	(1).77598	128	(2).68959	227	9.25437	73	11	(1).85312	128	(2).83259	249	9.29601	67
12	(1).77726	129	(2).69186	227	9.25510	72	12	(1).85440	129	(2).83508	251	9.29668	66
13	(1).77855	128	(2).69413	228	9.25582	73	13	(1).85569	129	(2).83759	251	9.29734	66
14	(1).77983	128	(2).69641	228	9.25655	72	14	(1).85698	129	(2).84010	251	9.29800	66
15	(1).78111	129	(2).69869	229	9.25727	72	15	(1).85827	129	(2).84261	251	9.29866	66
16	(1).78240	128	(2).70098	229	9.25799	72	16	(1).85956	128	(2).84512	252	9.29932	66
17	(1).78368	129	(2).70327	229	9.25871	72	17	(1).86084	129	(2).84764	252	9.29998	66
18	(1).78497	128	(2).70556	230	9.25943	72	18	(1).86213	129	(2).85016	253	9.30064	66
19	(1).78625	128	(2).60786	230	9.26015	71	19	(1).86342	129	(2).85269	253	9.30130	65
20	(1).78753	129	(2).71016	231	9.26086	72	20	(1).86471	129	(2).85522	253	9.30195	66
21	(1).78882	128	(2).71247	231	9.26158	71	21	(1).86600	129	(2).85775	254	9.30261	65
22	(1).79010	129	(2).71478	231	9.26229	72	22	(1).86729	128	(2).86029	254	9.30326	65
23	(1).79139	128	(2).71709	232	9.26301	71	23	(1).86857	129	(2).86283	255	9.30391	66
24	(1).79267	129	(2).71941	232	9.26372	71	24	(1).86986	129	(2).86538	255	9.30457	65
25	(1).79396	128	(2).72173	232	9.26443	71	25	(1).87115	129	(2).86793	255	9.30522	65
26	(1).79524	128	(2).72405	233	9.26514	71	26	(1).87244	129	(2).87048	256	9.30587	65
27	(1).79652	129	(2).72638	233	9.26585	70	27	(1).87373	129	(2).87304	256	9.30652	65
28	(1).79781	128	(2).72871	234	9.26655	71	28	(1).87502	129	(2).87560	256	9.30717	65
29	(1).79909	129	(2).73105	234	9.26726	71	29	(1).87631	129	(2).87816	257	9.30782	64
30	(1).80038	128	(2).73339	234	9.26797	70	30	(1).87760	129	(2).88073	257	9.30846	65
31	(1).80166	129	(2).73573	235	9.26867	70	31	(1).87889	129	(2).88330	258	9.30911	64
32	(1).80295	128	(2).73808	235	9.26937	71	32	(1).88018	129	(2).88588	258	9.30975	65
33	(1).80423	129	(2).74043	235	9.27008	70	33	(1).88147	128	(2).88846	258	9.31040	64
34	(1).80552	128	(2).74278	236	9.27078	70	34	(1).88275	129	(2).89104	259	9.31104	64
35	(1).80680	129	(2).74514	236	9.27148	70	35	(1).88404	129	(2).89363	259	9.31168	65
36	(1).80809	128	(2).74750	237	9.27218	70	36	(1).88533	129	(2).89622	259	9.31233	64
37	(1).80937	129	(2).74987	237	9.27288	69	37	(1).88662	129	(2).89881	260	9.31297	64
38	(1).81066	129	(2).75224	237	9.27357	70	38	(1).88791	129	(2).90141	261	9.31361	64
39	(1).81195	128	(2).75461	238	9.27427	69	39	(1).88920	129	(2).90402	260	9.31425	64
40	(1).81323	129	(2).75699	238	9.27496	70	40	(1).89049	129	(2).90662	261	9.31489	63
41	(1).81452	128	(2).75937	239	9.27566	69	41	(1).89178	129	(2).90923	262	9.31552	64
42	(1).81580	129	(2).76176	239	9.27635	69	42	(1).89307	129	(2).91185	262	9.31616	63
43	(1).81709	128	(2).76415	239	9.27704	69	43	(1).89436	129	(2).91447	262	9.31679	64
44	(1).81837	129	(2).76654	240	9.27773	69	44	(1).89565	129	(2).91709	262	9.31743	63
45	(1).81966	128	(2).76894	240	9.27842	69	45	(1).89694	129	(2).91971	263	9.31806	64
46	(1).82094	129	(2).77134	240	9.27911	69	46	(1).89823	129	(2).92234	264	9.31870	63
47	(1).82223	129	(2).77374	241	9.27980	69	47	(1).89952	130	(2).92498	263	9.31933	63
48	(1).82352	128	(2).77615	241	9.28049	68	48	(1).90082	129	(2).92761	265	9.31996	63
49	(1).82480	129	(2).77856	242	9.28117	69	49	(1).90211	129	(2).93026	264	9.32059	63
50	(1).82609	129	(2).78098	242	9.28186	68	50	(1).90340	129	(2).93290	265	9.32122	63
51	(1).82738	128	(2).78340	242	9.28254	69	51	(1).90469	129	(2).93555	265	9.32185	63
52	(1).82866	129	(2).78582	243	9.28323	68	52	(1).90598	129	(2).93820	266	9.32248	63
53	(1).82995	128	(2).78825	243	9.28391	68	53	(1).90727	129	(2).94086	266	9.32311	62
54	(1).83123	129	(2).79068	243	9.28459	68	54	(1).90856	129	(2).94352	266	9.32373	63
55	(1).83252	129	(2).79311	244	9.28527	68	55	(1).90985	129	(2).94618	267	9.32436	62
56	(1).83381	128	(2).79555	244	9.28595	67	56	(1).91114	129	(2).94885	267	9.32498	63
57	(1).83509	129	(2).79799	245	9.28662	68	57	(1).91243	129	(2).95152	268	9.32561	62
58	(1).83638	129	(2).80044	245	9.28730	68	58	(1).91372	130	(2).95420	268	9.32623	62
59	(1).83767	129	(2).80289	245	9.28798	67	59	(1).91502	129	(2).95688	268	9.32685	62
60	(1).83896		(2).80534		9.28865		60	(1).91631		(2).95956		9.32747	

$\omega = 12$ Grad.

ω ′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	(1),91631	129	(2),95956	269	9,32747	63
1	(1),91760	129	(2),96225	269	9,32810	62
2	(1),91889	129	(2),96494	269	9,32872	61
3	(1),92018	129	(2),96763	270	9,32933	62
4	(1),92147	130	(2),97033	270	9,32995	62
5	(1),92277	129	(2),97303	271	9,33057	62
6	(1),92406	129	(2),97574	271	9,33119	61
7	(1),92535	129	(2),97845	272	9,33180	62
8	(1),92664	129	(2),98117	271	9,33242	61
9	(1),92793	130	(2),98388	273	9,33303	62
10	(1),92923	129	(2),98661	272	9,33365	61
11	(1),93052	129	(2),98933	273	9,33426	61
12	(1),93181	129	(2),99206	273	9,33487	61
13	(1),93310	130	(2),99479	274	9,33548	61
14	(1),93440	129	(2),99753	28	9,33609	61
15	(1),93569	129	(1),10003	27	9,33670	61
16	(1),93698	130	(1),10030	28	9,33731	61
17	(1),93828	129	(1),10058	27	9,33792	61
18	(1),93957	129	(1),10085	28	9,33853	60
19	(1),94086	129	(1),10113	27	9,33913	61
20	(1),94215	130	(1),10140	28	9,33974	60
21	(1),94345	129	(1),10168	28	9,34034	61
22	(1),94474	129	(1),10196	27	9,34095	60
23	(1),94603	130	(1),10223	28	9,34155	60
24	(1),94733	129	(1),10251	28	9,34215	61
25	(1),94862	130	(1),10279	28	9,34276	60
26	(1),94992	129	(1),10307	28	9,34336	60
27	(1),95121	129	(1),10335	28	9,34396	60
28	(1),95250	130	(1),10363	27	9,34456	60
29	(1),95380	129	(1),10390	28	9,34516	60
30	(1),95509	129	(1),10418	29	9,34576	59
31	(1),95638	130	(1),10447	28	9,34635	60
32	(1),95768	129	(1),10475	28	9,34695	60
33	(1),95897	130	(1),10503	28	9,34755	59
34	(1),96027	129	(1),10531	28	9,34814	60
35	(1),96156	130	(1),10559	28	9,34874	59
36	(1),96286	129	(1),10587	28	9,34933	59
37	(1),96415	129	(1),10615	29	9,34992	59
38	(1),96544	130	(1),10644	28	9,35051	60
39	(1),96674	129	(1),10672	28	9,35111	59
40	(1),96803	130	(1),10700	29	9,35170	59
41	(1),96933	129	(1),10729	28	9,35229	59
42	(1),97062	130	(1),10757	29	9,35288	59
43	(1),97192	129	(1),10786	28	9,35347	58
44	(1),97321	130	(1),10814	29	9,35405	29
45	(1),97451	129	(1),10843	29	9,35464	59
46	(1),97580	130	(1),10872	28	9,35523	58
47	(1),97710	130	(1),10900	29	9,35581	59
48	(1),97840	129	(1),10929	29	9,35640	58
49	(1),97969	130	(1),10958	28	9,35698	59
50	(1),98099	129	(1),10986	29	9,35757	58
51	(1),98228	130	(1),11015	29	9,35815	58
52	(1),98358	129	(1),11044	29	9,35873	58
53	(1),98487	130	(1),11073	29	9,35931	58
54	(1),98617	130	(1),11102	29	9,35989	58
55	(1),98747	129	(1),11131	29	9,36047	58
56	(1),98876	130	(1),11160	29	9,36105	58
57	(1),99006	130	(1),11189	29	9,36163	58
58	(1),99136	129	(1),11218	29	9,36221	58
59	(1),99265	130	(1),11247	29	9,36279	57
60	(1),99395		(1),11276		9,36336	

$\omega = 13$ Grad.

ω ′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	(1),99395	129	(1),11276	29	9,36336	58
1	(1),99524	130	(1),11305	29	9,36394	58
2	(1),99654	130	(1),11334	30	9,36452	57
3	(1),99784	129	(1),11364	29	9,36509	57
4	(1),99913	13	(1),11393	29	9,36566	58
5	0,10004	13	(1),11422	30	9,36624	57
6	0,10017	13	(1),11452	29	9,33681	57
7	0,10030	13	(1),11481	30	9,36738	57
8	0,10043	13	(1),11511	29	9,36795	57
9	0,10056	13	(1),11540	30	9,36852	57
10	0,10069	13	(1),11570	29	9,36909	57
11	0,10082	13	(1),11599	30	9,36966	57
12	0,10095	13	(1),11629	29	9,37023	57
13	0,10108	13	(1),11658	30	9,37080	57
44	0,10121	13	(1),11688	30	9,37137	56
15	0,10134	13	(1),11718	30	9,37193	57
16	0,10147	13	(1),11748	29	9,37250	56
17	0,10160	13	(1),11777	30	9,37306	57
18	0,10173	13	(1),11807	30	9,37363	56
19	0,10186	13	(1),11837	30	9,37419	57
20	0,10199	13	(1),11867	30	9,37476	56
21	0,10212	13	(1),11897	30	9,37532	56
22	0,10225	13	(1),11927	30	9,37588	56
23	0,10238	13	(1),11957	30	9,37644	56
24	0,10251	13	(1),11987	30	9,37700	56
25	0,10264	13	(1),12017	30	9,37756	56
26	0,10277	13	(1),12047	31	9,37812	56
27	0,10290	13	(1),12078	30	9,37868	56
28	0,10303	13	(1),12108	30	9,37924	56
29	0,10316	13	(1),12138	30	9,37980	55
30	0,10329	13	(1),12168	31	9,38035	56
31	0,10342	13	(1),12199	30	9,38091	56
32	0,10355	13	(1),12229	31	9,38147	55
33	0,10368	13	(1),12260	30	9,38202	55
34	0,10381	13	(1),12290	31	9,38257	56
35	0,10394	13	(1),12321	30	9,38313	55
36	0,10407	13	(1),12351	31	9,38368	55
37	0,10420	13	(1),12382	30	9,38423	56
38	0,10433	13	(1),12412	31	9,38479	55
39	0,10446	13	(1),12443	31	9,38534	55
40	0,10459	13	(1),12474	30	9,38589	55
41	0,10472	13	(1),12504	31	9,38644	55
42	0,10485	13	(1),12535	31	9,38699	55
43	0,10498	13	(1),12566	31	9,38754	54
44	0,10511	13	(1),12597	31	9,38808	55
45	0,10524	13	(1),12628	31	9,38863	55
46	0,10537	13	(1),12659	31	9,38918	54
47	0,10550	13	(1),12690	31	9,38972	55
48	0,10563	13	(1),12721	31	9,39027	55
49	0,10576	13	(1),12752	31	9,39082	54
50	0,10589	13	(1),12783	31	9,39136	54
51	0,10602	13	(1),12814	31	9,39190	55
52	0,10615	13	(1),12845	31	9,39245	54
53	0,10628	13	(1),12876	32	9,39299	54
54	0,10641	13	(1),12908	31	9,39353	54
55	0,10654	13	(1),12939	31	9,39407	54
56	0,10667	13	(1),12970	32	9,39461	54
57	0,10680	13	(1),13002	31	9,39515	54
58	0,10693	13	(1),13033	31	9,39569	54
59	0,10706	13	(1),13064	32	9,39623	54
60	0,10719		(1),13096		9,39677	

ω = 14 Grad.

ω'	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0,10719	13	(1),13096	31	9,39677	54
1	0,10732	13	(1),13127	32	9,39731	54
2	0,10745	13	(1),13159	32	9,39785	53
3	0,10758	13	(1),13191	31	9,39838	54
4	0,10771	13	(1),13222	32	9,39892	53
5	0,10784	13	(1),13254	32	9,39945	54
6	0,10797	13	(1),13286	31	9,39999	53
7	0,10810	13	(1),13317	32	9,40052	54
8	0,10823	13	(1),13349	32	9,40106	53
9	0,10836	13	(1),13381	32	9,40159	53
10	0,10849	13	(1),13413	32	9,40212	54
11	0,10862	13	(1),13445	32	9,40266	53
12	0,10875	13	(1),13477	32	9,40319	53
13	0,10888	13	(1),13509	32	9,40372	53
14	0,10901	13	(1),13541	32	9,40425	53
15	0,10914	13	(1),13573	32	9,40478	53
16	0,10927	13	(1),13605	32	9,40531	53
17	0,10940	14	(1),13637	32	9,40584	52
18	0,10954	13	(1),13669	32	9,40636	53
19	0,10967	13	(1),13701	33	9,40689	53
20	0,10980	13	(1),13734	32	9,40742	53
21	0,10993	13	(1),13766	32	9,40795	52
22	0,11006	13	(1),13798	33	9,40847	53
23	0,11019	13	(1),13831	32	9,40900	52
24	0,11032	13	(1),13863	33	9,40952	53
25	0,11045	13	(1),13896	32	9,41005	52
26	0,11058	13	(1),13928	33	9,41057	52
27	0,11071	13	(1),13961	32	9,41109	52
28	0,11084	13	(1),13993	33	9,41161	53
29	0,11097	13	(1),14026	32	9,41214	52
30	0,11110	13	(1),14058	33	9,41266	52
31	0,11123	13	(1),14091	33	9,41318	52
32	0,11136	13	(1),14124	33	9,41370	52
33	0,11149	13	(1),14157	32	9,41422	52
34	0,11162	13	(1),14189	33	9,41474	52
35	0,11175	13	(1),14222	33	9,41526	52
36	0,11188	13	(1),14255	33	9,41578	51
37	0,11201	13	(1),14288	33	9,41629	52
38	0,11214	14	(1),14321	33	9,41681	52
39	0,11228	13	(1),14354	33	9,41733	51
40	0,11241	13	(1),14387	33	9,41784	52
41	0,11254	13	(1),14420	33	9,41836	51
42	0,11267	13	(1),14453	33	9,41887	52
43	0,11280	13	(1),14486	34	9,41939	51
44	0,11293	13	(1),14520	33	9,41990	51
45	0,11306	13	(1),14553	33	9,42041	52
46	0,11319	13	(1),14586	33	9,42093	51
47	0,11332	13	(1),14619	34	9,42144	51
48	0,11345	13	(1),14653	33	9,42195	51
49	0,11358	13	(1),14686	34	9,42246	51
50	0,11371	13	(1),14720	33	9,42297	51
51	0,11384	13	(1),14753	34	9,42348	51
52	0,11397	13	(1),14787	33	9,42399	51
53	0,11410	13	(1),14820	34	9,42450	51
54	0,11423	14	(1),14854	33	9,42501	51
55	0,11437	13	(1),14887	34	9,42552	51
56	0,11450	13	(1),14921	34	9,42603	50
57	0,11463	13	(1),14955	34	9,42653	51
58	0,11476	13	(1),14989	33	9,42704	51
59	0,11489	13	(1),15022	34	9,42755	50
60	0,11502		(1),15056		9,42805	

ω = 15 Grad.

ω'	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0,11502	13	(1),15056	34	9,42805	51
1	0,11515	13	(1),15090	34	9,42856	50
2	0,11528	13	(1),15124	34	9,42906	51
3	0,11541	13	(1),15158	34	9,42957	50
4	0,11554	13	(1),15192	34	9,43007	50
5	0,11567	13	(1),15226	34	9,43057	51
6	0,11580	14	(1),15260	34	9,43108	50
7	0,11594	13	(1),15294	34	9,43158	50
8	0,11607	13	(1),15328	34	9,43208	50
9	0,11620	13	(1),15362	35	9,43258	50
10	0,11633	13	(1),15397	34	9,43308	50
11	0,11646	13	(1),15431	34	9,43358	50
12	0,11659	13	(1),15465	35	9,43408	50
13	0,11672	13	(1),15500	34	9,43458	50
14	0,11685	13	(1),15534	34	9,43508	50
15	0,11698	13	(1),15568	35	9,43558	49
16	0,11711	13	(1),15603	34	9,43607	50
17	0,11724	14	(1),15637	35	9,43657	50
18	0,11738	13	(1),15672	34	9,43707	49
19	0,11751	13	(1),15706	35	9,43756	50
20	0,11764	13	(1),15741	35	9,43806	49
21	0,11777	13	(1),15776	34	9,43855	50
22	0,11790	13	(1),15810	35	9,43905	49
23	0,11803	13	(1),15845	35	9,43954	40
24	0,11816	13	(1),15880	35	9,44004	49
25	0,11829	13	(1),15915	35	9,44053	49
26	0,11842	13	(1),15950	35	9,44102	49
27	0,11855	14	(1),15985	34	9,44151	40
28	0,11869	13	(1),16019	35	9,44201	49
29	0,11882	13	(1),16054	35	9,44250	49
30	0,11895	13	(1),16089	36	9,44299	49
31	0,11908	13	(1),16125	35	9,44348	49
32	0,11921	13	(1),16160	35	9,44397	49
33	0,11934	13	(1),16195	35	9,44446	49
34	0,11947	13	(1),16230	35	9,44495	49
35	0,11960	13	(1),16265	35	9,44544	48
36	0,11973	14	(1),16300	36	9,44592	49
37	0,11987	13	(1),16336	35	9,44641	49
38	0,12000	13	(1),16371	35	9,44690	48
39	0,12013	13	(1),16406	36	9,44738	49
40	0,12026	13	(1),16442	35	9,44787	49
41	0,12039	13	(1),16477	36	9,44836	48
42	0,12052	13	(1),16513	35	9,44884	49
43	0,12065	13	(1),16548	36	9,44933	48
44	0,12078	14	(1),16584	35	9,44981	48
45	0,12092	13	(1),16619	36	9,45029	49
46	0,12105	13	(1),16655	36	9,45078	48
47	0,12118	13	(1),16691	36	9,45126	48
48	0,12131	13	(1),16727	35	9,45174	48
49	0,12144	13	(1),16762	36	9,45222	49
50	0,12157	13	(1),16798	36	9,45271	48
51	0,12170	13	(1),16834	36	9,45319	48
52	0,12183	14	(1),16870	36	9,45367	48
53	0,12197	13	(1),16906	36	9,45415	48
54	0,12210	13	(1),16942	36	9,45463	48
55	0,12223	13	(1),16978	36	9,45511	48
56	0,12236	13	(1),17014	36	9,45559	47
57	0,12249	13	(1),17050	36	9,45606	48
58	0,12262	13	(1),17086	36	9,45654	48
59	0,12275	14	(1),17122	36	9,45702	48
60	0,12289		(1),17158		9,45750	

$\omega = 16$ Grad.

ω ′	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0.12289		(1).17158		9.45750	
1	0.12302	13	(1).17195	37	9.45797	47
2	0.12315	13	(1).17231	36	9.45845	48
3	0.12328	13	(1).17267	36	9.45892	47
4	0.12341	13	(1).17304	37	9.45940	48
5	0.12354	13	(1).17340	36	9.45987	47
6	0.12367	13	(1).17376	36	9.46035	48
7	0.12381	14	(1).17413	37	9.46082	47
8	0.12394	13	(1).17449	36	9.46130	48
9	0.12407	13	(1).17486	37	9.46177	47
10	0.12420	13	(1).17523	37	9.46224	47
11	0.12433	13	(1).17559	36	9.46271	47
12	0.12446	13	(1).17596	37	9.46319	48
13	0.12460	14	(1).17633	37	9.46366	47
14	0.12473	13	(1).17669	36	9.46413	47
15	0.12486	13	(1).17706	37	9.46460	47
16	0.12499	13	(1).17743	37	9.46507	47
17	0.12512	13	(1).17780	37	9.46554	47
18	0.12525	13	(1).17817	37	9.46601	47
19	0.12538	13	(1).17854	37	9.46648	47
20	0.12552	14	(1).17891	37	9.46694	46
21	0.12565	13	(1).17928	37	9.46741	47
22	0.12578	13	(1).17965	37	9.46788	47
23	0.12591	13	(1).18002	37	9.46835	47
24	0.12604	13	(1).18039	37	9.46881	46
25	0.12617	13	(1).18076	37	9.46928	47
26	0.12631	14	(1).18114	38	9.46975	47
27	0.12644	13	(1).18151	37	9.47021	46
28	0.12657	13	(1).18188	37	9.47068	47
29	0.12670	13	(1).18226	38	9.47114	46
30	0.12683	13	(1).18263	37	9.47160	46
31	0.12697	14	(1).18300	37	9.47207	47
32	0.12710	13	(1).18338	38	9.47253	46
33	0.12723	13	(1).18375	37	9.47299	46
34	0.12736	13	(1).18413	38	9.47346	47
35	0.12749	13	(1).18451	38	9.47392	46
36	0.12762	13	(1).18488	37	9.47438	46
37	0.12776	14	(1).18526	38	9.47484	46
38	0.12789	13	(1).18564	38	9.47530	46
39	0.12802	13	(1).18601	37	9.47576	46
40	0.12815	13	(1).18639	38	9.47622	46
41	0.12828	13	(1).18677	38	9.47668	46
42	0.12842	14	(1).18715	38	9.47714	46
43	0.12855	13	(1).18753	38	9.47760	46
44	0.12868	13	(1).18791	38	9.47806	46
45	0.12881	13	(1).18829	38	9.47852	46
46	0.12894	13	(1).18867	38	9.47897	45
47	0.12907	13	(1).18905	38	9.47943	46
48	0.12921	14	(1).18943	38	9.47989	46
49	0.12934	13	(1).18981	38	9.48035	46
50	0.12947	13	(1).19019	38	9.48080	45
51	0.12960	13	(1).19058	39	9.48126	46
52	0.12973	13	(1).19096	38	9.48171	45
53	0.12987	14	(1).19134	38	9.48217	46
54	0.13000	13	(1).19173	39	9.48262	45
55	0.13013	13	(1).19211	38	9.48307	45
56	0.13026	13	(1).19250	39	9.48353	46
57	0.13039	13	(1).19288	38	9.48398	45
58	0.13053	14	(1).19327	39	9.48443	45
59	0.13066	13	(1).19365	38	9.48489	46
60	0.13079	13	(1).19404	39	9.48534	45

$\omega = 17$ Grad.

ω ′	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0.13079		(1).19404		9.48534	
1	0.13092	13	(1).19442	38	9.48579	45
2	0.13106	14	(1).19481	39	9.48624	45
3	0.13119	13	(1).19520	39	9.48669	45
4	0.13132	13	(1).19558	38	9.48714	45
5	0.13145	13	(1).19597	39	9.48759	45
6	0.13158	13	(1).19636	39	9.48804	45
7	0.13172	14	(1).19675	39	9.48849	45
8	0.13185	13	(1).19714	39	9.48894	45
9	0.13198	13	(1).19753	39	9.48939	45
10	0.13211	13	(1).19792	39	9.48984	45
11	0.13224	13	(1).19831	39	9.49029	45
12	0.13238	14	(1).19870	39	9.49073	44
13	0.13251	13	(1).19909	39	9.49118	45
14	0.13264	13	(1).19948	39	9.49163	45
15	0.13277	13	(1).19988	40	9.49207	44
16	0.13291	14	(1).20027	39	9.49252	45
17	0.13304	13	(1).20066	39	9.49296	44
18	0.13317	13	(1).20105	39	9.49341	45
19	0.13330	13	(1).20145	40	9.49385	44
20	0.13344	14	(1).20184	39	9.49430	45
21	0.13357	13	(1).20224	40	9.49474	44
22	0.13370	13	(1).20263	39	9.49519	45
23	0.13384	14	(1).20303	40	9.49563	44
24	0.13397	13	(1).20342	39	9.49607	44
25	0.13410	13	(1).20382	40	9.49652	45
26	0.13423	13	(1).20421	39	9.49696	44
27	0.13436	13	(1).20461	40	9.49740	44
28	0.13449	13	(1).20501	40	9.49784	44
29	0.13463	14	(1).20541	40	9.49828	44
30	0.13476	13	(1).20580	39	9.49872	44
31	0.13489	13	(1).20620	40	9.49916	44
32	0.13502	13	(1).20660	40	9.49960	44
33	0.13516	14	(1).20700	40	9.50004	44
34	0.13529	13	(1).20740	40	9.50048	44
35	0.13542	13	(1).20780	40	9.50092	44
36	0.13555	13	(1).20820	40	9.50136	44
37	0.13569	14	(1).20860	40	9.50180	44
38	0.13582	13	(1).20900	40	9.50223	43
39	0.13595	13	(1).20941	41	9.50267	44
40	0.13608	13	(1).20981	40	9.50311	44
41	0.13622	14	(1).21021	40	9.50355	44
42	0.13635	13	(1).21061	40	9.50398	43
43	0.13649	14	(1).21102	41	9.50442	44
44	0.13662	13	(1).21142	40	9.50485	43
45	0.13675	13	(1).21183	41	9.50529	44
46	0.13688	13	(1).21223	40	9.50572	43
47	0.13701	13	(1).21263	40	9.50616	44
48	0.13715	14	(1).21304	41	9.50659	43
49	0.13728	13	(1).21345	41	9.50703	44
50	0.13741	13	(1).21385	40	9.50746	43
51	0.13754	13	(1).21426	41	9.50789	43
52	0.13768	14	(1).21467	41	9.50833	44
53	0.13781	13	(1).21507	40	9.50876	43
54	0.13794	13	(1).21548	41	9.50919	43
55	0.13807	13	(1).21589	41	9.50962	43
56	0.13821	14	(1).21630	41	9.51005	43
57	0.13834	13	(1).21671	41	9.51048	43
58	0.13847	13	(1).21712	41	9.51092	44
59	0.13861	14	(1).21753	41	9.51135	43
60	0.13874	13	(1).21794	41	9.51178	43

ω = 18 Grad.

ω'	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0.13874	13	(1).21791	41	9.51178	43
1	0.13887	13	(1).21835	41	9.51221	43
2	0.13900	14	(1).21876	41	9.51264	42
3	0.13914	13	(1).21917	41	9.51306	43
4	0.13927	13	(1).21958	41	9.51349	43
5	0.13940	14	(1).21999	42	9.51392	43
6	0.13954	13	(1).22041	41	9.51435	43
7	0.13967	13	(1).22082	41	9.51478	42
8	0.13980	13	(1).22123	42	9.51520	43
9	0.13993	14	(1).22165	41	9.51563	43
10	0.14007	13	(1).22206	42	9.51606	42
11	0.14020	13	(1).22248	41	9.51648	43
12	0.14033	14	(1).22289	42	9.51691	43
13	0.14047	13	(1).22331	41	9.51734	42
14	0.14060	13	(1).22372	42	9.51776	43
15	0.14073	14	(1).22414	42	9.51819	42
16	0.14087	13	(1).22456	41	9.51861	42
17	0.14100	13	(1).22497	42	9.51903	43
18	0.14113	14	(1).22539	42	9.51946	42
19	0.14127	13	(1).22581	42	9.51988	43
20	0.14140	13	(1).22623	42	9.52031	42
21	0.14153	13	(1).22665	42	9.52073	42
22	0.14166	14	(1).22707	42	9.52115	42
23	0.14180	13	(1).22749	42	9.52157	43
24	0.14193	13	(1).22791	42	9.52200	42
25	0.14206	14	(1).22833	42	9.52242	42
26	0.14220	13	(1).22875	42	9.52284	42
27	0.14233	13	(1).22917	42	9.52326	42
28	0.14246	14	(1).22959	42	9.52368	42
29	0.14260	13	(1).23001	42	9.52410	42
30	0.14273	13	(1).23043	43	9.52452	42
31	0.14286	14	(1).23086	42	9.52494	42
32	0.14300	13	(1).23128	42	9.52536	42
33	0.14313	13	(1).23170	43	9.52578	42
34	0.14326	14	(1).23213	42	9.52620	41
35	0.14340	13	(1).23255	43	9.52661	42
36	0.14353	13	(1).23298	42	9.52703	42
37	0.14366	14	(1).23340	43	9.52745	42
38	0.14380	13	(1).23383	43	9.52787	42
39	0.14393	13	(1).23426	42	9.52829	41
40	0.14406	14	(1).23468	43	9.52870	42
41	0.14420	13	(1).23511	43	9.52912	41
42	0.14433	13	(1).23554	42	9.52953	42
43	0.14446	14	(1).23596	43	9.52995	42
44	0.14460	13	(1).23639	43	9.53037	41
45	0.14473	13	(1).23682	43	9.53078	42
46	0.14486	14	(1).23725	43	9.53120	41
47	0.14500	13	(1).23768	43	9.53161	41
48	0.14513	13	(1).23811	43	9.53202	42
49	0.14526	14	(1).23854	43	9.53244	41
50	0.14540	13	(1).23897	43	9.53285	42
51	0.14553	13	(1).23940	43	9.53327	41
52	0.14566	14	(1).23983	43	9.53368	41
53	0.14580	13	(1).24026	44	9.53409	41
54	0.14593	13	(1).24070	43	9.53450	42
55	0.14606	14	(1).24113	43	9.53492	41
56	0.14620	13	(1).24156	44	9.53533	41
57	0.14633	13	(1).24200	43	9.53574	41
58	0.14646	14	(1).24243	43	9.53615	41
59	0.14660	13	(1).24286	44	9.53656	41
60	0.14673		(1).24330		9.53697	

ω = 19 Grad.

ω'	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0.14673	14	(1).24330	43	9.53697	41
1	0.14687	13	(1).24373	44	9.53738	41
2	0.14700	13	(1).24417	44	9.53779	41
3	0.14713	14	(1).24461	43	9.53820	41
4	0.14727	13	(1).24504	44	9.53861	41
5	0.14740	13	(1).24548	44	9.53902	41
6	0.14753	14	(1).24592	43	9.53943	41
7	0.14767	13	(1).24635	44	9.53984	41
8	0.14789	14	(1).24679	44	9.54025	40
9	0.14794	13	(1).24723	44	9.54065	41
10	0.14807	13	(1).24767	44	9.54106	41
11	0.14820	14	(1).24811	44	9.54147	40
12	0.14834	13	(1).24855	44	9.54187	41
13	0.14847	13	(1).24899	44	9.54228	41
44	0.14860	14	(1).24943	44	9.54269	40
15	0.14874	13	(1).24987	44	9.54309	41
16	0.14887	14	(1).25031	44	9.54350	40
17	0.14901	13	(1).25075	45	9.54390	41
18	0.14914	13	(1).25120	44	9.54431	40
19	0.14927	14	(1).25164	44	9.54471	41
20	0.14941	13	(1).25208	44	9.54512	40
21	0.14954	13	(1).25252	45	9.54552	41
22	0.14967	14	(1).25297	54	9.54593	40
23	0.14981	13	(1).25341	45	9.54633	40
24	0.14994	14	(1).25386	44	9.54673	41
25	0.15008	13	(1).25430	45	9.54714	40
26	0.15021	13	(1).25475	44	9.54754	40
27	0.15034	14	(1).25519	45	9.54794	41
28	0.15048	13	(1).25564	45	9.54835	40
29	0.15061	14	(1).25609	44	9.54875	40
30	0.15075	13	(1).25653	45	9.54915	40
31	0.15088	13	(1).25698	45	9.54955	40
32	0.15101	14	(1).25743	45	9.54995	40
33	0.15115	13	(1).25788	45	9.55035	40
34	0.15128	14	(1).25833	45	9.55075	40
35	0.15142	13	(1).25878	45	9.55115	40
36	0.15155	13	(1).25923	45	9.55155	40
37	0.15168	14	(1).25968	45	9.55195	40
38	0.15182	13	(1).26013	45	9.55235	40
39	0.15195	14	(1).26058	45	9.55275	41
40	0.15209	13	(1).26103	45	9.55315	40
41	0.15222	14	(1).26148	45	9.55355	40
42	0.15236	13	(1).26193	56	9.55395	39
43	0.15249	13	(1).26239	45	9.55434	40
41	0.15262	14	(1).26284	45	9.55474	40
45	0.15276	13	(1).26329	46	9.55514	40
46	0.15289	14	(1).26375	45	9.55554	39
47	0.15303	13	(1).26420	45	9.55593	40
48	0.15316	14	(1).26465	46	9.55633	40
49	0.15330	13	(1).26511	45	9.55673	39
50	0.15343	13	(1).26556	46	9.55712	40
51	0.15356	14	(1).26602	46	9.55752	39
52	0.15370	13	(1).26648	45	9.55791	40
53	0.15383	14	(1).26693	46	9.55831	39
54	0.15397	13	(1).26739	46	9.55870	40
55	0.15410	14	(1).26785	46	9.55910	39
56	0.15424	13	(1).26831	45	9.55949	40
57	0.15437	13	(1).26876	46	9.55989	39
58	0.15450	14	(1).26922	46	9.56028	39
59	0.15464	13	(1).26968	46	9.56067	40
60	0.15477		(1).27014		9.56107	

$\omega = 20$ Grad.

ω ′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0,15477	14	(1),27014	46	9,56107	39
1	0,15491	13	(1),27060	46	9,56146	39
2	0,15504	14	(1),27106	46	9,56185	39
3	0,15518	13	(1),27152	46	9,56224	40
4	0,15531	14	(1),27198	47	9,56264	39
5	0,15545	13	(1),27245	46	9,56303	39
6	0,15558	13	(1),27291	46	9,56342	39
7	0,15571	14	(1),27337	46	9,56381	39
8	0,15585	13	(1),27383	47	9,56420	39
9	0,15598	14	(1),27430	46	9,56459	39
10	0,15612	13	(1),27476	46	9,56498	39
11	0,15625	14	(1),27522	47	9,56537	39
12	0,15639	13	(1),27569	46	9,56576	39
13	0,15652	14	(1),27615	47	9,56615	39
14	0,15666	13	(1),27662	47	9,56654	39
15	0,15679	14	(1),27709	46	9,56693	39
16	0,15693	13	(1),27755	47	9,56732	39
17	0,15706	14	(1),27802	47	9,56771	39
18	0,15720	13	(1),27849	46	9,56810	39
19	0,15733	13	(1),27895	47	9,56849	38
20	0,15746	14	(1),27942	47	9,56887	39
21	0,15760	13	(1),27989	47	9,56926	39
22	0,15773	14	(1),28036	47	9,56965	39
23	0,15787	13	(1),28083	47	9,57004	38
24	0,15800	14	(1),28130	47	9,57042	39
25	0,15814	13	(1),28177	47	9,57081	39
26	0,15827	14	(1),28224	47	9,57120	38
27	0,15841	13	(1),28271	47	9,57158	39
28	0,15851	14	(1),28318	47	9,57197	38
29	0,15868	13	(1),28365	47	9,57235	39
30	0,15881	14	(1),28412	48	9,57274	38
31	0,15895	13	(1),28460	47	9,57312	39
32	0,15908	14	(1),28507	47	9,57351	38
33	0,15922	13	(1),28554	48	9,57389	39
34	0,15935	14	(1),28602	47	9,57428	38
35	0,15919	13	(1),28649	48	9,57466	38
36	0,15962	14	(1),28697	47	9,57504	39
37	0,15976	13	(1),28744	48	9,57543	38
38	0,15989	14	(1),28792	47	9,57581	38
39	0,16003	13	(1),28839	48	9,57619	39
40	0,16016	14	(1),28887	47	9,57658	38
41	0,16030	13	(1),28934	48	9,57696	38
42	0,16013	14	(1),28982	48	9,57734	38
43	0,16057	13	(1),29030	48	9,57772	38
44	0,16070	14	(1),29078	48	9,57810	39
45	0,16084	13	(1),29126	47	9,57849	38
46	0,16097	14	(1),29173	48	9,57887	38
47	0,16111	13	(1),29221	48	9,57925	38
48	0,16124	14	(1),29269	48	9,57963	38
49	0,16138	13	(1),29317	48	9,58001	38
50	0,16151	14	(1),29365	49	9,58039	38
51	0,16165	13	(1),29414	48	9,58077	38
52	0,16178	14	(1),29462	48	9,58115	38
53	0,16192	13	(1),29510	48	9,58153	38
54	0,16205	14	(1),29558	48	9,58191	38
55	0,16219	13	(1),29606	49	9,58229	38
56	0,16232	14	(1),29655	48	9,58267	37
57	0,16246	14	(1),29703	48	9,58304	38
58	0,16260	13	(1),29751	49	9,58342	38
59	0,16273	14	(1),29800	48	9,58380	38
60	0,16287		(1),29848		9,58418	

$\omega = 21$ Grad.

ω ′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0,16287	13	(1),29848	49	9,58418	37
1	0,16300	14	(1),29897	48	9,58455	38
2	0,16314	13	(1),29945	49	9,58493	38
3	0,16327	14	(1),29994	49	9,58531	38
4	0,16341	13	(1),30043	48	9,58569	37
5	0,16354	14	(1),30091	49	9,58606	38
6	0,16368	13	(1),30140	49	9,58644	37
7	0,16381	14	(1),30189	49	9,58681	38
8	0,16395	13	(1),30238	48	9,58719	38
9	0,16408	14	(1),30286	48	9,58757	37
10	0,16422	14	(1),30335	49	9,56794	38
11	0,16436	13	(1),30384	49	9,58832	37
12	0,16449	14	(1),30433	49	9,58869	38
13	0,16463	13	(1),30482	49	9,58907	37
14	0,16476	14	(1),30531	49	9,58944	37
15	0,16490	13	(1),30580	50	9,58981	38
16	0,16503	14	(1),30630	49	9,59019	37
17	0,16517	13	(1),30679	49	9,59056	38
18	0,16530	14	(1),30728	49	9,59094	37
19	0,16544	14	(1),30777	50	9,59131	37
20	0,16558	13	(1),30827	49	9,59168	37
21	0,16571	14	(1),30876	49	9,59205	38
22	0,16585	13	(1),30925	50	9,59243	37
23	0,16598	14	(1),30975	49	9,59280	37
24	0,16612	13	(1),31024	50	9,59317	37
25	0,16625	14	(1),31074	49	9,59354	37
26	0,16639	13	(1),31123	50	9,59391	38
27	0,16652	14	(1),31173	50	9,59429	37
28	0,16666	14	(1),31223	49	9,59466	37
29	0,16680	13	(1),31272	50	9,59503	37
30	0,16693	14	(1),31322	50	9,59540	37
31	0,16707	13	(1),31372	50	9,59577	37
32	0,16720	14	(1),31422	50	9,59614	37
33	0,16734	14	(1),31472	49	9,59651	37
34	0,16748	13	(1),31521	50	9,59688	37
35	0,16761	14	(1),31571	50	9,59725	37
36	0,16775	13	(1),31621	50	9,59762	37
37	0,16788	14	(1),31671	51	9,59799	36
38	0,16802	13	(1),31722	50	9,59835	37
39	0,16815	14	(1),31772	50	9,59872	37
40	0,16829	14	(1),31822	50	9,59909	37
41	0,16843	13	(1),31872	50	9,59946	37
42	0,16856	14	(1),31922	51	9,59983	36
43	0,16870	13	(1),31973	50	9,60019	37
44	0,16883	14	(1),32023	50	9,60056	37
45	0,16897	14	(1),32073	51	9,60093	37
46	0,16911	13	(1),32124	50	9,60130	36
47	0,16924	14	(1),32174	51	9,60166	37
48	0,16938	13	(1),32225	50	9,60203	37
49	0,16951	14	(1),32275	51	9,60240	36
50	0,16965	14	(1),32326	50	9,60276	37
51	0,16979	13	(1),32376	51	9,60313	36
52	0,16992	14	(1),32427	51	9,60349	37
53	0,17006	14	(1),32478	51	9,60386	36
54	0,17020	13	(1),32529	50	9,60422	37
55	0,17033	14	(1),32579	51	9,60459	36
56	0,17047	13	(1),32630	51	9,60495	37
57	0,17060	14	(1),32681	51	9,60532	36
58	0,17074	14	(1),32732	51	9,60568	37
59	0,17088	13	(1),32783	51	9,60605	36
60	0,17101		(1),32834		9,60641	

ω = 22 Grad.

ω'	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0.17101	14	(1).32834	51	9.60641	36
1	0.17115	14	(1).32885	51	9.60677	37
2	0.17129	13	(1).32936	51	9.60714	36
3	0.17142	14	(1).32987	52	9.60750	36
4	0.17156	13	(1).33039	51	9.60786	37
5	0.17169	14	(1).33090	51	9.60823	36
6	0.17183	14	(1).33141	51	9.60859	36
7	0.17197	13	(1).33192	52	9.60895	36
8	0.17210	14	(1).33244	51	9.60931	36
9	0.17224	14	(1).33295	52	9.60967	37
10	0.17238	13	(1).33347	51	9.61004	36
11	0.17251	14	(1).33398	52	9.61040	36
12	0.17265	14	(1).33450	51	9.61076	36
13	0.17279	13	(1).33501	52	9.61112	36
14	0.17292	14	(1).33553	52	9.61148	36
15	0.17306	13	(1).33605	51	9.61184	26
16	0.17319	14	(1).33656	52	9.61220	36
17	0.17333	14	(1).33708	52	9.61256	36
18	0.17347	13	(1).33760	52	9.61292	36
19	0.17360	14	(1).33812	52	9.61328	36
20	0.17374	14	(1).33864	51	9.61364	36
21	0.17388	13	(1).33915	52	9.61400	36
22	0.17401	14	(1).33967	52	9.61436	36
23	0.17415	14	(1).34019	52	9.61472	36
24	0.17429	13	(1).34071	53	9.61508	36
25	0.17442	14	(1).34124	52	9.61544	35
26	0.17456	14	(1).34176	52	9.61579	36
27	0.17470	13	(1).34228	52	9.61615	36
28	0.17483	14	(1).34280	52	9.61651	36
29	0.17497	14	(1).34332	53	9.61687	35
30	0.17511	13	(1).34385	52	9.61722	36
31	0.17524	14	(1).34437	52	9.61758	36
32	0.17538	14	(1).34489	53	9.61794	36
33	0.17552	13	(1).34542	52	9.61830	35
34	0.17565	14	(1).34594	53	9.61865	36
35	0.17579	14	(1).34647	52	9.61901	35
36	0.17593	13	(1).34699	53	9.61936	36
37	0.17606	14	(1).34752	53	9.61972	36
38	0.17620	14	(1).34805	52	9.62008	35
39	0.17634	14	(1).34857	53	9.62043	36
40	0.17648	13	(1).34910	53	9.62079	35
41	0.17661	14	(1).34963	53	9.62114	36
42	0.17675	14	(1).35016	53	9.62150	35
43	0.17689	13	(1).35069	52	9.62185	36
44	0.17702	14	(1).35121	53	9.62221	35
45	0.17716	14	(1).35174	53	9.62256	36
46	0.17730	13	(1).35227	53	9.62292	35
47	0.17743	14	(1).35280	54	9.62327	35
48	0.17757	14	(1).35334	53	9.62362	36
49	0.17771	14	(1).35387	53	9.62398	35
50	0.17785	13	(1).35440	53	9.62433	35
51	0.17798	14	(1).35493	53	9.62468	36
52	0.17812	14	(1).35546	54	9.62504	35
53	0.17826	13	(1).35600	53	9.62539	35
54	0.17839	14	(1).35653	53	9.62574	35
55	0.17853	14	(1).35706	54	9.62609	36
56	0.17867	14	(1).35760	53	9.62645	35
57	0.17881	13	(1).35813	54	9.62680	35
58	0.17894	14	(1).35867	53	9.62715	35
59	0.17908	14	(1).35920	54	9.62750	35
60	0.17922		(1).35974		9.62785	

ω = 23 Grad.

ω'	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0.17922	13	(1).35974	54	9.62785	35
1	0.17935	14	(1).36028	53	9.62820	35
2	0.17949	14	(1).36081	54	9.62855	35
3	0.17963	14	(1).36135	54	9.62890	36
4	0.17977	13	(1).36189	54	9.62926	35
5	0.17990	14	(1).36243	53	9.62961	35
6	0.18004	14	(1).36296	54	9.62996	35
7	0.18018	14	(1).36350	54	9.63031	35
8	0.18032	13	(1).36404	54	9.63066	35
9	0.18045	14	(1).36458	54	9.63101	34
10	0.18059	14	(1).36512	54	9.63135	35
11	0.18073	14	(1).36566	55	9.63170	35
12	0.18087	13	1).36621	54	9.63205	35
13	0.18100	14	(1).36675	54	9.63240	35
14	0.18114	14	(1).36729	54	9.63275	35
15	0.18128	14	(1).36783	54	9.63310	35
16	0.18142	13	(1).36837	55	9.63345	34
17	0.18155	14	(1).36892	54	9.63379	35
18	0.18169	14	(1).36946	55	9.63414	35
19	0.18183	14	(1).37001	54	9.63449	35
20	0.18197	13	(1).37055	55	9.63484	35
21	0.18210	14	(1).37110	54	9.63519	34
22	0.18224	14	(1).37164	55	9.63553	35
23	0.18238	14	(1).37219	54	9.63588	35
24	0.18252	13	(1).37273	55	9.63623	34
25	0.18265	14	(1).37328	55	9.63657	35
26	0.18279	14	(1).37383	55	9.63692	34
27	0.18293	14	(1).37438	54	9.63726	35
28	0.18307	13	(1).37492	55	9.63761	35
29	0.18320	14	(1).37547	55	9.63796	34
30	0.18334	14	(1).37602	55	9.63830	35
31	0.18348	14	(1).37657	55	9.63865	34
32	0.18362	14	(1).37712	55	9.63899	35
33	0.18376	13	(1).37767	55	9.63934	34
34	0.18389	14	(1).37822	55	9.63968	35
35	0.18403	14	(1).37877	56	9.64003	34
36	0.18417	14	(1).37933	55	9.64037	35
37	0.18431	13	(1).37988	55	9.64072	34
38	0.18444	14	(1).38043	55	9.64106	34
39	0.18458	14	(1).38098	56	9.64140	35
40	0.18472	14	(1).38154	55	9.64175	34
41	0.18486	14	(1).38209	56	9.64209	34
42	0.18500	13	(1).38265	55	9.64243	35
43	0.18513	14	(1).38320	56	9.64278	34
44	0.18527	14	(1).38376	55	9.64312	34
45	0.18541	14	(1).38431	56	9.64346	45
46	0.18555	14	(1).38487	55	9.64381	34
47	0.18569	13	(1).38542	56	9.64415	34
48	0.18582	14	(1).38598	56	9.64449	34
49	0.18596	14	(1).38654	56	9.64483	34
50	0.18610	14	(1).38710	55	9.64517	35
51	0.14624	14	(1).38765	56	9.64552	34
52	0.18638	14	(1).38821	56	9.64586	34
53	0.18652	13	(1).38877	56	9.64620	34
54	0.18665	14	(1).38933	56	9.64654	34
55	0.18679	14	(1).38989	56	9.64688	34
56	0.18693	14	(1).39045	56	9.64722	34
57	0.18707	14	(1).39101	56	9.64756	34
58	0.18721	13	(1).39157	57	9.64790	34
59	0.18734	14	(1).39214	56	9.64824	34
60	0.18748		(1).39270		9.64858	

ω = 24 Grad.

ω ′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0.18748	14	(1).39270	56	9.64858	34
1	0.18762	14	(1).39326	56	9.64892	34
2	0.18776	14	(1).39382	57	9.64926	34
3	0.18790	14	(1).39439	56	9.64960	34
4	0.18804	13	(1).39495	57	9.64994	34
5	0.18817	14	(1).39552	56	9.65028	34
6	0.18831	14	(1).39608	57	9.65062	34
7	0.18845	14	(1).39665	56	9.65096	34
8	0.18859	14	(1).39721	57	9.65130	34
9	0.18873	14	(1).39778	57	9.65164	33
10	0.18887	13	(1).39835	56	9.65197	34
11	0.18900	14	(1).39891	57	9.65231	34
12	0.18914	14	(1).39948	57	9.65265	34
13	0.18928	14	(1).40005	57	9.65299	34
14	0.18942	14	(1).40062	56	9.65333	33
15	0.18956	14	(1).40118	57	9.65366	34
16	0.18970	14	(1).40175	57	9.65400	34
17	0.18984	13	(1).40232	57	9.65434	33
18	0.18997	14	(1).40289	57	9.65467	34
19	0.19011	14	(1).40346	58	9.65501	34
20	0.19025	14	(1).40404	57	9.65535	33
21	0.19039	14	(1).40461	57	9.65568	34
22	0.19053	14	(1).40518	57	9.65602	34
23	0.19067	14	(1).40575	57	9.65636	33
24	0.19081	14	(1).40632	58	9.65669	34
25	0.19095	13	(1).40690	57	9.65703	33
26	0.19108	14	(1).40747	58	9.65736	34
27	0.19122	14	(1).40805	57	9.65770	33
28	0.19136	14	(1).40862	58	9.65803	34
29	0.19150	14	(1).40920	57	9.65837	33
30	0.19164	14	(1).40977	58	9.65870	34
31	0.19178	14	(1).41035	57	9.65904	33
32	0.19192	14	(1).41092	58	9.65937	34
33	0.19206	13	(1).41150	58	9.65971	33
34	0.19219	14	(1).41208	58	9.66004	34
35	0.19233	14	(1).41266	57	9.66038	33
36	0.19247	14	(1).41323	58	9.66071	33
37	0.19261	14	(1).41381	58	9.66104	34
38	0.19275	14	(1).41439	58	9.66138	33
39	0.19289	14	(1).41497	58	9.66171	33
40	0.19303	14	(1).41555	58	9.66204	34
41	0.19317	14	(1).41613	58	9.66238	33
42	0.19331	14	(1).41671	58	9.66271	33
43	0.19345	13	(1).41729	58	9.66304	33
44	0.19358	14	(1).41787	59	9.66337	34
55	0.19372	14	(1).41846	58	9.66371	33
46	0.19386	14	(1).41904	58	9.66404	33
47	0.19400	14	(1).41962	59	9.66437	33
48	0.19414	14	(1).42021	58	9.66470	33
49	0.19428	14	(1).42079	58	9.66503	34
50	0.19442	14	(1).42137	59	9.66537	33
51	0.19456	14	(1).42196	58	9.66570	33
52	0.19470	14	(1).42254	59	9.66603	33
53	0.19484	14	(1).42313	59	9.66636	33
54	0.19498	14	(1).42372	58	9.66669	33
55	0.19512	14	(1).42430	59	9.66702	33
56	0.19526	13	(1).42489	59	9.66735	33
57	0.19539	14	(1).42548	59	9.66768	33
58	0.19553	14	(1).42607	58	9.66801	33
59	0.19567	14	(1).42665	59	9.66834	33
60	0.19581		(1).42724		9.66867	

ω = 25 Grad.

ω ′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0.19581	14	(1).42724	59	9.66867	33
1	0.19595	14	(1).42783	59	9.66900	33
2	0.19609	14	(1).42842	59	9.66933	33
3	0.19623	14	(1).42901	59	9.66966	33
4	0.19637	14	(1).42960	59	9.66999	33
5	0.19651	14	(1).43019	60	9.67032	33
6	0.19665	14	(1).43079	59	9.67065	33
7	0.19679	14	(1).43138	59	9.67098	33
8	0.19693	14	(1).43197	59	9.67131	32
9	0.19707	14	(1).43256	60	9.67163	33
10	0.19721	14	(1).43316	59	9.67196	33
11	0.19735	14	(1).43375	59	9.67229	33
12	0.19749	14	(1).43434	60	9.67262	33
13	0.19763	14	(1).43494	59	9.67295	32
14	0.19777	14	(1).43553	60	9.67327	33
15	0.19791	14	(1).43613	60	9.67360	33
16	0.19805	14	(1).43673	59	9.67393	33
17	0.19819	13	(1).43732	60	9.67426	32
18	0.19832	14	(1).43792	60	9.67458	33
19	0.19846	14	(1).43852	59	9.67491	33
20	0.19860	14	(1).43911	60	9.67524	32
21	0.19874	14	(1).43971	60	9.67556	33
22	0.19888	14	(1).44031	60	9.67589	33
23	0.19902	14	(1).44091	60	9.67622	32
24	0.19916	14	(1).44151	60	9.67654	33
25	0.19930	14	(1).44211	60	9.67687	32
26	0.19944	14	(1).44271	60	9.67719	33
27	0.19958	14	(1).44331	60	9.67752	33
28	0.19972	14	(1).44391	61	9.67785	32
29	0.19986	14	(1).44452	60	9.67817	33
30	0.20000	14	(1).44512	60	9.67850	32
31	0.20014	14	(1).44572	60	9.67882	33
32	0.20028	14	(1).44632	61	9.67915	32
33	0.20042	14	(1).44693	60	9.67947	33
34	0.20056	14	(1) 44753	61	9.67980	32
35	0.20070	14	(1).44814	60	9.68012	32
36	0.20084	14	(1).44874	61	9.68044	33
37	0.20098	14	(1).44935	60	9.68077	32
38	0.20112	14	(1).44995	61	9.68109	33
39	0.20126	14	(1).45056	61	9.68142	32
40	0.20140	14	(1).45117	60	9.68174	32
41	0.20154	14	(1).45177	61	9.68206	33
42	0.20168	14	(1).45238	61	9.68239	32
43	0.20182	14	(1).45299	61	9.68271	32
44	0.20196	14	(1).45360	61	9.68303	33
45	0.20210	14	(1).45421	61	9.68336	32
46	0.20224	15	(1).45482	61	9.68368	32
47	0.20239	14	(1).45543	61	9.68400	32
48	0.20253	14	(1).45604	61	9.68432	33
49	0.20267	14	(1).45665	61	9.68465	32
50	0.20281	14	(1).45726	61	9.68497	32
51	0.20295	14	(1).45787	61	9.68529	32
52	0.20309	14	(1).45848	62	9.68561	32
53	0.20323	14	(1).45910	61	9.68593	33
54	0.20337	14	(1).45971	61	9.68626	32
55	0.20351	14	(1).46032	62	9.68658	32
56	0.20365	14	(1).46094	61	9.68690	32
57	0.20379	14	(1).46155	62	9.68722	32
58	0.20393	14	(1).46217	61	9.68754	32
59	0.20407	14	(1).46278	62	9.68786	32
60	0.20421		(1).46340		9.68818	

$\omega = 26$ Grad.

ω ′	z	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0,20421	14	(1),46340	61	9,68818	32
1	0,20435	14	(1),46401	62	9,68850	32
2	0,20449	14	(1),46463	62	9,68882	32
3	0,20463	14	(1),46525	62	9,68914	32
4	0,20477	14	(1),46587	61	9,68946	32
5	0,20491	14	(1),46648	62	9,68978	32
6	0,20505	15	(1),46710	62	9,69010	32
7	0,20520	14	(1),46772	62	9,69042	32
8	0,20534	14	(1),46834	62	9,69074	32
9	0,20548	14	(1),46896	62	9,69106	32
10	0,20562	14	(1),46958	62	9,69138	32
11	0,20576	14	(1),47020	62	9,69170	32
12	0,20590	14	(1),47082	63	9,69202	32
13	0,20604	14	(1),47145	62	9,69234	32
14	0,20618	14	(1),47207	62	9,69266	32
15	0,20632	14	(1),47269	62	9,69298	31
16	0,20646	14	(1),47331	63	9,69329	32
17	0,20660	14	(1),47394	62	9,69361	32
18	0,20674	14	(1),47456	63	9,69393	32
19	0,20688	15	(1),47519	62	9,69425	32
20	0,20703	14	(1),47581	63	9,69457	31
21	0,20717	14	(1),47644	62	9,69488	32
22	0,20731	14	(1),47706	63	9,69520	32
23	0,20745	14	(1),47769	63	9,69552	32
24	0,20759	14	(1),47832	62	9,69584	31
25	0,20773	14	(1),47894	63	9,69615	32
26	0,20787	14	(1),47957	63	9,69647	32
27	0,20801	14	(1),48020	63	9,69679	31
28	0,20815	15	(1),48083	63	9,69710	32
29	0,20830	14	(1),48146	63	9,69742	32
30	0,20844	14	(1),48209	63	9,69774	31
31	0,20858	14	(1),48272	63	9,69805	32
32	0,20872	14	(1),48335	63	9,69837	31
33	0,20886	14	(1),48398	63	9,69868	32
34	0 20900	14	(1),49461	63	9,69900	32
35	0,20914	14	(1),48524	64	9,69932	31
36	0,20928	15	(1),48588	63	9,69963	32
37	0,20943	14	(1),48651	63	9,69995	31
38	0,20957	14	(1),48714	64	9,70026	32
39	0,20971	14	(1),48778	63	9,70058	31
40	0,20985	14	(1),48841	63	9,70089	32
41	0,20999	14	(1),48904	64	9,70121	31
42	0,21013	14	(1),48968	64	9,70152	32
43	0,21027	14	(1),49032	63	9,70184	31
44	0,21041	15	(1),49095	64	9,70215	32
45	0,21056	14	(1),49159	63	9,70247	31
46	0,21070	14	(1),49222	64	9,70278	31
47	0,21084	14	(1),49286	64	9,70309	32
48	0,21098	14	(1),49350	64	9,70341	31
49	0,21112	14	(1),49414	64	9,70372	32
50	0,21126	15	(1),49478	64	9,70404	31
51	0,21141	14	(1),49542	64	9,70435	31
52	0,21155	14	(1),49606	64	9,70466	32
53	0,21169	14	(1),49670	64	9,70498	31
54	0,21183	14	(1),49734	64	9,70529	31
55	0,21197	14	(1),49798	64	9,70560	32
56	0,21211	15	(1),49862	64	9,70592	31
57	0,21226	14	(1),49926	64	9,70623	31
58	0,21240	14	(1),49990	65	9,70654	31
59	0,21254	14	(1),50055	64	9,70685	32
60	0,21268		(1),50119		9,70717	

$\omega = 27$ Grad.

ω ′	z	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0,21268	14	(1),50119	65	9,70717	31
1	0,21282	14	(1),50184	64	9,70748	31
2	0,21296	15	(1),50248	64	9,70779	31
3	0,21311	14	(1),50312	65	9,70810	31
4	0,21325	14	(1),50377	65	9,70841	32
5	0,21339	14	(1),50442	64	9,70873	31
6	0,21353	14	(1),50506	65	9,70904	31
7	0,21367	15	(1),50571	65	9,70935	31
8	0,21382	14	(1),50636	64	9,70966	31
9	0,21396	14	(1),50700	65	9,70997	31
10	0,21410	14	(1),50765	65	9,71028	31
11	0,21424	14	(1),50830	65	9,71059	31
12	0,21438	15	(1),50895	65	9,71090	31
13	0,21453	14	(1),50960	65	9,71121	32
14	0,21467	14	(1),51025	65	9,71153	31
15	0,21481	14	(1),51090	65	9,71184	31
16	0,21495	14	(1),51155	65	9,71215	31
17	0,21509	15	(1),51220	65	9,71246	31
18	0,21524	14	(1),51285	65	9,71277	31
19	0,21538	14	(1),51350	66	9,71308	31
20	0,21552	14	(1),51416	65	9,71339	31
21	0,21566	15	(1),51481	65	9,71370	31
22	0,21581	14	(1),51546	66	9,71401	30
23	0,21595	14	(1),51612	65	9,71431	31
24	0,21609	14	(1),51677	66	9,71462	31
25	0,21623	14	(1),51743	65	9,71493	31
26	0,21637	15	(1),51808	66	9,71524	31
27	0,21652	14	(1),51874	66	9,71555	31
28	0,21666	14	(1),51940	65	9,71586	31
29	0,21680	14	(1),52005	66	9,71617	31
30	0,21694	15	(1),52071	66	9,71648	31
31	0,21709	14	(1),52137	66	9,71679	30
32	0,21723	14	(1),52203	66	9,71709	31
33	0,21737	14	(1),52269	66	9,71740	31
34	0,21751	15	(1),52335	65	9,71771	31
35	0,21766	14	(1),52400	67	9,71802	31
36	0,21780	14	(1),52467	66	9,71833	30
37	0,21794	14	(1),52533	66	9,71863	31
38	0,21808	15	(1),52599	66	9,71894	31
39	0,21823	14	(1),52665	66	9,71925	30
40	0,21837	14	(1),52731	66	9,71955	31
41	0,21851	14	(1),52797	67	9,71986	31
42	0,21865	15	(1),52864	66	9,72017	31
43	0,21880	14	(1),52930	66	9,72048	30
44	0,21894	14	(1),52996	67	9,72078	31
45	0,21908	15	(1),53063	66	9,72109	31
46	0,21923	14	(1),53129	67	9,72140	30
47	0,21937	14	(1),53196	66	9,72170	31
48	0,21951	14	(1),53262	67	9,72201	30
49	0,21965	15	(1),53329	67	9,72231	31
50	0,21980	14	(1),53396	66	9,72262	31
51	0,21994	14	(1),53462	67	9,72293	30
52	0,22008	15	(1),53529	67	9,72323	31
53	0,22023	14	(1),53596	67	9,72354	30
54	0,22037	14	(1),53663	67	9,72384	31
55	0,22051	14	(1),53730	67	9,72415	30
56	0,22065	15	(1),53797	67	9,72445	31
57	0,22080	14	(1),53864	67	9,72476	30
58	0,22094	14	(1),53931	67	9,72506	31
59	0,22108	15	(1),53998	67	9,72537	30
60	0,22123		(1),54065		9,72567	

$\omega = 28$ Grad.

ω ′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0,22123	14	(1).54065	67	9,72567	31
1	0,22137	14	(1).54132	68	9,72598	30
2	0,22151	15	(1).54200	67	9,72628	31
3	0,22166	14	(1).54267	67	9,72659	30
4	0,22180	14	(1).54334	68	9,72689	31
5	0,22194	15	(1).54402	67	9,72720	30
6	0,22209	14	(1).54469	67	9,72750	30
7	0,22223	14	(1).54536	68	9,72780	31
8	0,22237	14	(1).54604	68	9,72811	30
9	0,22251	15	(1).54672	67	9,72841	31
10	0,22266	14	(1).54739	68	9,72872	30
11	0,22280	14	(1).54807	68	9,72902	30
12	0,22294	15	(1).54875	67	9,72932	31
13	0,22309	14	(1).54942	68	9,72963	30
14	0,22323	14	(1).55010	68	9,72993	30
15	0,22337	15	(1).55078	68	9,73023	31
16	0,22352	14	(1).52146	68	9,73054	30
17	0,22366	14	(1).55214	68	9,73084	30
18	0,22381	14	(1).55282	68	9,73114	30
19	0,22395	15	(1).55350	68	9,73144	31
20	0,22409	14	(1).55418	68	9,73175	30
21	0,22424	14	(1).55486	68	9,73205	30
22	0,22438	14	(1).55554	69	9,73235	30
23	0,22452	15	(1).55623	68	9,73265	30
24	0,22467	14	(1).55691	68	9,73295	31
25	0,22481	14	(1).55759	69	9,73326	30
26	0,22495	15	(1).55828	68	9,73356	30
27	0,22510	14	(1).55896	68	9,73386	30
28	0,22524	14	(1).55964	69	9,73416	30
29	0,22538	15	(1).56033	68	9,73446	30
30	0,22553	14	(1).56101	69	9,73476	31
31	0,22567	15	(1).56170	69	9,73507	30
32	0,22582	14	(1).56239	68	9,73537	30
33	0,22596	14	(1).56307	69	9,73567	30
34	0,22610	15	(1).56376	69	9,73597	30
35	0,22625	14	(1).56445	69	9,73627	30
36	0,22639	15	(1).56514	69	9,73657	30
37	0,22654	14	(1).56583	69	9,73687	30
38	0,22668	14	(1).56652	69	9,73717	30
39	0,22682	15	(1).56721	69	9,73747	30
40	0,22697	14	(1).56790	69	9,73777	30
41	0,22711	15	(1).56859	69	9,73807	30
42	0,22726	14	(1).56928	69	9,73837	30
43	0,22740	14	(1).56997	69	9,73867	30
44	0,22754	15	(1).57066	70	9,73897	30
45	0,22769	14	(1).57136	69	9,73927	30
46	0,22783	15	(1).57205	69	9,73957	30
47	0,22798	14	(1).57274	70	9,73987	30
48	0,22812	14	(1).57344	69	9,74017	30
49	0,22826	15	(1).57413	70	9,74047	30
50	0,22841	14	(1).57483	69	9,74077	30
51	0,22855	15	(1).57552	70	9,74107	30
52	0,22870	14	(1).57622	70	9,74137	29
53	0,22884	15	(1).57692	69	9,74166	30
54	0,22899	14	(1).57761	70	9,74196	30
55	0,22913	14	(1).57831	70	9,73226	30
56	0,22927	15	(1).57901	70	9,74256	30
57	0,22942	14	(1).57971	70	9,74286	30
58	0,22956	15	(1).58041	70	9,74316	29
59	0,22971	14	(1).58111	70	9,74345	30
60	0,22985		(1).58181		9,74375	

$\omega = 29$ Grad.

ω ′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0,22985	15	(1).58181	70	9,74375	30
1	0,23000	14	(1).58251	70	9,74405	30
2	0,23014	14	(1).58321	70	9,74435	30
3	0,23028	15	(1).58391	70	9,74465	29
4	0,23043	14	(1).58461	70	9,74494	30
5	0,23057	15	(1).58531	71	9,74524	30
6	0,23072	14	(1).58602	70	9,74554	29
7	0,23086	15	(1).58672	70	9,74583	30
8	0,23101	14	(1).58742	71	9,74613	30
9	0,23115	15	(1).58813	70	9,74643	30
10	0,23130	14	(1).58883	71	9,74673	29
11	0,23144	15	(1).58954	71	9,74702	30
12	0,23159	14	(1).59025	70	9,74732	30
13	0,23173	15	(1).59095	71	9,74762	29
14	0,23188	14	(1).59166	71	9,74791	30
15	0,23202	15	(1).59237	70	9,74821	30
16	0,23217	14	(1).59307	71	9,74851	29
17	0,23231	15	(1).59378	71	9,74880	30
18	0,23246	14	(1).59449	71	9,74910	29
19	0,23260	15	(1).59520	71	9,74939	30
20	0,23275	14	(1).59591	71	9,74969	29
21	0,23289	14	(1).59662	71	9,74998	30
22	0,23303	15	(1).59733	71	9,75028	30
23	0,23318	14	(1).59804	71	9,75058	29
24	0,23332	15	(1).59875	71	9,75087	30
25	0,23347	14	(1).59946	72	9,75117	29
26	0,23361	15	(1).60018	71	9,75146	30
27	0,23376	15	(1).60089	71	9,75176	29
28	0,23391	14	(1).60160	72	9,75205	30
29	0,23405	15	(1).60232	71	9,75235	29
30	0,23420	14	(1).60303	72	9,75264	30
31	0,23434	15	(1).60375	71	9,75294	29
32	0,23449	14	(1).60446	72	9,75323	30
33	0,23463	15	(1).60518	72	9,75353	29
34	0,23478	14	(1).60590	71	9,75382	29
35	0,23492	15	(1).60661	72	9,75411	30
36	0,23507	14	(1).60733	72	9,75441	29
37	0,23521	15	(1).60805	72	9,75470	30
38	0,23536	14	(1).60877	71	9,75500	29
39	0,23550	15	(1).60948	72	9,75529	29
40	0,23565	14	(1).61020	72	9,75558	30
41	0,23579	15	(1).61092	72	9,75588	29
42	0,23594	14	(1).61164	73	9,75617	30
43	0,23608	15	(1).61237	72	9,75647	29
44	0,23623	15	(1).61309	72	9,75676	29
45	0,23638	14	(1).61381	72	9,75705	30
46	0,23652	15	(1).61453	72	9,75735	29
47	0,23667	14	(1).61525	73	9,75764	29
48	0,23681	15	(1).61598	72	9,75793	29
49	0,23696	14	(1).61670	72	9,75822	30
50	0,23710	15	(1).61742	73	9,75852	29
51	0,23725	14	(1).61815	72	9,75881	29
52	0,23739	15	(1).61887	73	9,75910	29
53	0,23754	15	(1).61960	73	9,75939	30
54	0,23769	14	(1).62033	72	9,75969	29
55	0,23783	15	(1).62105	73	9,75998	29
56	0,23798	14	(1).62178	73	9,76027	29
57	0,23812	15	(1).62251	73	9,76056	30
58	0,23827	14	(1).62324	72	9,76086	29
59	0,23841	15	(1).62396	73	9,76115	29
60	0,23856		(1).62469		9,76144	

ω = 30 Grad.

ω ′	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0,23856	15	(1),62469	73	9,76144	29
1	0,23871	14	(1),62542	73	9,76173	29
2	0,23885	15	(1),62615	73	9,76202	29
3	0,23900	14	(1),62688	74	9,76231	30
4	0,23914	15	(1),62762	73	9,76261	29
5	0,23929	15	(1),62835	73	9,76290	29
6	0,23944	14	(1),62908	73	9,76319	29
7	0,23958	15	(1),62981	73	9,76348	29
8	0,23973	14	(1),63054	74	9,76377	29
9	0,23987	15	(1),63128	73	9,76406	29
10	0,24002	15	(1),63201	74	9,76435	29
11	0,24017	14	(1),63275	73	9,76464	29
12	0,24031	15	(1),63348	74	9,76493	29
13	0,24046	15	(1),63422	73	9,76522	29
14	0,24061	14	(1),63495	74	9,76551	29
15	0,24075	15	(1),63569	74	9,76580	29
16	0,24090	14	(1),63643	73	9,76609	30
17	0,24104	15	(1),63716	74	9,76639	29
18	0,24119	15	(1),63790	74	9,76668	29
19	0,24134	14	(1),63864	74	9,76697	28
20	0,24148	15	(1),63938	74	9,76725	29
21	0,24163	15	(1),64012	74	9,76754	29
22	0,24178	14	(1),64086	74	9,76783	29
23	0,24192	15	(1),64160	74	9,76812	29
24	0,24207	15	(1),64234	74	9,76841	29
25	0,24222	14	(1),64308	74	9,76870	29
26	0,24236	15	(1),64382	75	9,76899	29
27	0,24251	14	(1),64457	74	9,76928	29
28	0,24265	15	(1),64531	74	9,76957	29
29	0,24280	15	(1),64605	75	9,76986	29
30	0,24295	14	(1),64680	74	9,77015	29
31	0,24309	15	(1),64754	75	9,77044	29
32	0,24324	15	(1),64829	74	9,77073	28
33	0,24339	14	(1),64903	75	9,77101	29
34	0,24353	15	(1),64978	74	9,77130	29
35	0,24368	15	(1),65052	75	9,77159	29
36	0,24383	14	(1),65127	75	9,77188	29
37	0,24397	15	(1),65202	75	9,77217	29
38	0,24412	15	(1),65277	74	9,77246	28
39	0,24427	15	(1),65351	75	9,77274	29
40	0,24442	14	(1),65426	75	9,77303	29
41	0,24456	15	(1),65501	75	9,77332	29
42	0,24471	15	(1),65576	75	9,77361	29
43	0,24486	14	(1),65651	75	9,77390	28
44	0,24500	15	(1),65726	75	9,77418	29
45	0,24515	15	(1),65801	76	9,77447	29
46	0,24530	14	(1),65877	75	9,77476	29
47	0,24544	15	(1),65952	75	9,77505	28
48	0,24559	15	(1),66027	75	9,77533	29
49	0,24574	15	(1),66102	76	9,77562	29
50	0,24589	14	(1),66178	75	9,77591	28
51	0,24603	15	(1),66253	76	9,77619	29
52	0,24618	15	(1),66329	75	9,77648	29
53	0,24633	14	(1),66404	76	9,77677	29
54	0,24647	15	(1),66480	75	9,77706	28
55	0,24662	15	(1),66555	76	9,77734	29
56	0,24677	15	(1),66631	76	9,77763	28
57	0,24692	14	(1),66707	76	9,77791	29
58	0,24706	15	(1),66783	76	9,77820	29
59	0,24721	15	(1),66859	75	9,77849	28
60	0,24736		(1),66934		9,77877	

ω = 31 Grad.

ω ′	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0,24736	15	(1),66934	76	9,77877	29
1	0,24751	14	(1),67010	76	9,77906	29
2	0,24765	15	(1),67086	76	9,77935	28
3	0,24780	15	(1),67162	76	9,77963	29
4	0,24795	15	(1),67238	77	9,77992	28
5	0,24810	14	(1),67315	76	9,78020	29
6	0,24824	15	(1),67391	76	9,78049	28
7	0,24839	15	(1),67467	76	9,78077	29
8	0,24854	15	(1),67543	77	9,78106	29
9	0,24869	14	(1),67620	76	9,78135	28
10	0,24883	15	(1),67696	76	9,78163	29
11	0,24898	15	(1),67772	77	9,78192	28
12	0,24913	15	(1),67849	76	9,78220	29
13	0,24928	14	(1),67925	77	9,78249	28
14	0,24942	15	(1),68002	77	9,78277	29
15	0,24957	15	(1),68079	76	9,78306	28
16	0,24972	15	(1),68155	77	9,78334	29
17	0,24987	15	(1),68232	77	9,78363	28
18	0,25002	14	(1),68309	77	9,78391	28
19	0,25016	15	(1),68386	77	9,78419	29
20	0,25031	15	(1),68463	77	9,78448	28
21	0,25046	15	(1),68540	77	9,78476	29
22	0,25061	14	(1),68617	77	9,78505	28
23	0,25075	15	(1),68694	77	9,78533	29
24	0,25090	15	(1),68771	77	9,78562	28
25	0,25105	15	(1),68848	77	9,78590	28
26	0,25120	15	(1),68925	77	9,78618	29
27	0,25135	14	(1),69002	77	9,78647	28
28	0,25149	15	(1),69079	78	9,78675	29
29	0,25164	15	(1),69157	77	9,78704	28
30	0,25179	15	(1),69234	78	9,78732	28
31	0,25194	15	(1),69312	77	9,78760	29
32	0,25209	15	(1),69389	78	9,78789	28
33	0,25224	14	(1),69467	77	9,78817	28
34	0,25238	15	(1),69544	78	9,78845	29
35	0,25253	15	(1),69622	78	9,78874	28
36	0,25268	15	(1),69700	77	9,78902	28
37	0,25283	15	(1),69777	78	9,78930	29
38	0,25298	15	(1),69855	78	9,78959	28
39	0,25313	14	(1),69933	78	9,78987	28
40	0,25327	15	(1),70011	78	9,79015	28
41	0,25342	15	(1),70089	78	9,79043	29
42	0,25357	15	(1),70167	78	9,79072	28
43	0,25372	15	(1),70245	78	9,79100	28
44	0,25387	15	(1),70323	78	9,79128	28
45	0,25402	15	(1),70401	78	9,79156	29
46	0,25417	14	(1),70479	79	9,79185	28
47	0,25431	15	(1),70558	78	9,79213	28
48	0,25446	15	(1),70636	78	9,79241	28
49	0,25461	15	(1),70714	79	9,79269	28
50	0,25476	15	(1),70793	78	9,79297	29
51	0,25491	15	(1),70871	79	9,79326	28
52	0,25506	15	(1),70950	78	9,79354	28
53	0,25521	14	(1),71028	79	9,79382	28
54	0,25535	15	(1),71107	78	9,79410	28
55	0,25550	15	(1),71185	79	9,79438	28
56	0,25565	15	(1),71264	79	9,79466	29
57	0,25580	15	(1),71343	79	9,79495	28
58	0,25595	15	(1),71422	79	9,79523	28
59	0,25610	15	(1),71501	79	9,79551	28
60	0,25625		(1),71580		9,79579	

$\omega = 32$ Grad.

ω ′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0,25625	15	(1),71580	78	9,79579	28
1	0,25640	15	(1),71658	79	9,79607	28
2	0,25655	15	(1),71737	80	9,79635	28
3	0,25670	14	(1),71817	79	9,79663	28
4	0,25684	15	(1),71896	79	9,79691	28
5	0,25699	15	(1),71975	79	9,79719	28
6	0,25714	15	(1),72054	79	9,79747	29
7	0,25729	15	(1),72133	80	9,79776	28
8	0,25744	15	(1),72213	79	9,79804	28
9	0,25759	15	(1),72292	79	9,79832	28
10	0,25774	15	(1),72371	80	9,79860	28
11	0,25789	15	(1),72451	79	9,79888	28
12	0,25804	15	(1),72530	80	9,79916	28
13	0,25819	15	(1),72610	80	9,79944	28
14	0,25834	15	(1),72690	79	9,79972	28
15	0,25819	14	(1),72769	80	9,80000	28
16	0,25863	15	(1),72849	80	9,80028	28
17	0,25878	15	(1),72929	80	9,80056	28
18	0,25893	15	(1),73009	80	9,80084	28
19	0,25908	15	(1),73089	80	9,80112	28
20	0,25923	15	(1),73169	80	9,80140	28
21	0,25938	15	(1),73249	80	9,80168	27
22	0,25953	15	(1),73329	80	9,80195	28
23	0,25968	15	(1),73409	80	9,80223	28
24	0,25983	15	(1),73489	80	9,80251	28
25	0,25998	15	(1),73569	80	9,80279	28
26	0,26013	15	(1),73649	81	9,80307	28
27	0,26028	15	(1),73730	80	9,80335	28
28	0,26043	15	(1),73810	80	9,80363	28
29	0,26058	15	(1),73890	81	9,80391	28
30	0,26073	15	(1),73971	80	9,80419	28
31	0,26088	15	(1),74051	81	9,80447	27
32	0,26103	15	(1),74132	80	9,80474	28
33	0,26118	15	(1),74212	81	9,80502	28
34	0,26133	15	(1),74293	81	9,80530	28
35	0,26148	15	(1),74374	81	9,80558	28
36	0,26163	15	(1),74455	80	9,80586	28
37	0,26178	15	(1),74535	81	9,80614	28
38	0,26193	15	(1),74616	81	9,80642	27
39	0,26208	15	(1),74697	81	9,80669	28
40	0,26223	15	(1),74778	81	9,80697	28
41	0,26238	15	(1),74859	81	9,80725	28
42	0,26253	15	(1),74940	81	9,80753	28
43	0,26268	15	(1),75021	82	9,80781	27
44	0,26283	15	(1),75103	81	9,80808	28
45	0,26298	15	(1),75184	81	9,80836	28
46	0,26313	15	(1),75265	81	9,80864	28
47	0,26328	15	(1),75346	82	9,80892	27
48	0,26343	15	(1),75428	81	9,80919	28
49	0,26358	15	(1),75509	82	9,80947	28
50	0,26373	15	(1),75591	81	9,80975	28
51	0,26388	15	(1),75672	82	9,81003	27
52	0,26403	15	(1),75754	82	9,81030	28
53	0,26418	15	(1),75836	81	9,81058	28
54	0,26433	15	(1),75917	82	9,81086	27
55	0,26448	15	(1),75999	82	9,81113	28
56	0,26463	15	(1),76081	82	9,81141	28
57	0,26478	15	(1),76163	82	9,81169	27
58	0,26493	15	(1),76245	82	9,81196	28
59	0,26508	16	(1),76327	82	9,81224	28
60	0,26524		(1),76409		9,81252	

$\omega = 33$ Grad.

ω ′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0,26524	15	(1),76409	82	9,81252	27
1	0,26539	15	(1),76491	82	9,81279	28
2	0,26554	15	(1),76573	82	9,81307	28
3	0,26569	15	(1),76655	82	9,81335	27
4	0,26584	15	(1),76737	82	9,81362	28
5	0,26599	15	(1),76819	83	9,81390	28
6	0,26614	15	(1),76902	82	9,81418	27
7	0,26629	15	(1),76984	83	9,81445	28
8	0,26644	15	(1),77067	82	9,81473	27
9	0,26659	15	(1),77149	83	9,81500	28
10	0,26674	15	(1),77232	82	9,81528	28
11	0,26689	16	(1),77314	83	9,81556	27
12	0,26705	15	(1),77397	83	9,81583	28
13	0,26720	15	(1),77480	82	9,81611	27
14	0,26735	15	(1),77562	83	9,81638	28
15	0,26750	15	(1),77645	83	9,81666	27
16	0,26765	15	(1),77728	83	9,81693	28
17	0,26780	15	(1),77811	83	9,81721	27
18	0,26795	15	(1),77894	83	9,81748	28
19	0,26810	15	(1),77977	83	9,81776	27
20	0,26825	16	(1),78060	83	9,81803	28
21	0,26811	15	(1),78143	83	9,81831	27
22	0,26856	15	(1),78226	83	9,81858	28
23	0,26871	15	(1),78309	84	9,81886	27
24	0,26886	15	(1),78393	83	9,81913	28
25	0,26901	15	(1),78476	83	9,81941	27
26	0,26916	15	(1),78559	84	9,81968	28
27	0,26931	15	(1),78643	83	9,81996	27
28	0,26946	16	(1),78726	84	9,82023	28
29	0,26962	15	(1),78810	83	9,82051	27
30	0,26977	15	(1),78893	84	9,82078	28
31	0,26992	15	(1),78977	84	9,82106	27
32	0,27007	15	(1),79061	83	9,82133	28
33	0,27022	15	(1),79144	84	9,82161	27
34	0,27037	16	(1),79228	84	9,82188	27
35	0,27053	15	(1),79312	84	9,82215	28
36	0,27068	15	(1),79396	84	9,82243	27
37	0,27083	15	(1),79480	84	9,82270	28
38	0,27098	15	(1),79564	84	9,82298	27
39	0,27113	15	(1),79648	84	9,82325	27
40	0,27128	16	(1),79732	84	9,82352	28
41	0,27144	15	(1),79816	85	9,82380	27
42	0,27159	15	(1),79901	84	9,82407	28
43	0,27174	15	(1),79985	84	9,82435	27
44	0,27189	15	(1),80069	85	9,82462	27
45	0,27204	16	(1),80154	84	9,82189	28
46	0,27220	15	(1),80238	85	9,82517	27
47	0,27235	25	(1),80323	84	9,82544	27
48	0,27250	15	(1),80407	85	9,82571	28
49	0,27265	15	(1),80492	84	9,82599	27
50	0,27280	16	(1),80576	85	9,82626	27
51	0,27296	15	(1),80661	85	9,82653	28
52	0,27311	15	(1),80746	85	9,82681	27
53	0,27326	15	(1),80831	84	9,82708	27
54	0,27341	15	(1),80915	85	9,82735	27
55	0,27356	16	(1),81000	85	9,82762	28
56	0,27372	15	(1),81085	85	9,82790	27
57	0,27387	15	(1),81170	85	9,82817	27
58	0,27402	15	(1),81255	86	9,82844	27
59	0,27417	16	(1),81311	85	9,82871	28
60	0,27433		(1),81426		9,82899	

ω = 34 Grad.						
ω ′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	logSin z	Diff.
0	0,27433	15	(1),81426	85	9,82899	27
1	0,27448	15	(1),81511	85	9,82926	27
2	0,27463	15	(1),81596	86	9,82953	27
3	0,27478	16	(1),81682	85	9,82980	28
4	0,27494	15	(1),81767	86	9,83008	27
5	0,27509	15	(1),81853	85	9,83035	27
6	0,27524	15	(1),81938	86	9,83062	27
7	0,27539	16	(1),82024	85	9,83089	28
8	0,27555	15	(1),82109	86	9,83117	27
9	0,27570	15	(1),82195	86	9,83144	27
10	0,27585	15	(1),82281	85	9,83171	27
11	0,27600	16	(1),82366	86	9,83198	27
12	0,27616	15	(1),82452	86	9,83225	27
13	0,27631	15	(1),82538	86	9,83252	28
14	0,27646	15	(1),82624	86	9,83280	27
15	0,27661	16	(1),82710	86	9,83307	27
16	0,27677	15	(1),82796	86	9,83334	27
17	0,27692	15	(1),82882	86	9,83361	27
18	0,27707	16	(1),82968	86	9,83388	27
19	0,27723	15	(1),83054	87	9,83415	27
20	0,27738	15	(1),83141	86	9,83442	28
21	0,27753	16	(1),83227	86	9,83470	27
22	0,27769	15	(1),83313	87	9,83497	27
23	0,27784	15	(1),83400	86	9,83524	27
24	0,27799	15	(1),83486	87	9,83551	27
25	0,27814	16	(1),83573	86	9,83578	27
26	0,27830	15	(1),83659	87	9,83605	27
27	0,27845	15	(1),83746	87	9,83632	27
28	0,27860	16	(1),83833	86	9,83659	27
29	0,27876	15	(1),83919	87	9,83686	27
30	0,27891	15	(1),84006	87	9,83713	27
31	0,27906	16	(1),84093	87	9,83740	28
32	0,27922	15	(1),84180	87	9,83768	27
33	0,27937	15	(1),84267	87	9,82795	27
34	0,27952	16	(1),84354	87	9,83822	27
35	0,27968	15	(1),84441	87	9,83849	27
36	0,27983	15	(1),84528	87	9,83876	27
37	0,27998	16	(1),84615	87	9,83903	27
38	0,28014	15	(1),84703	87	9,83930	27
39	0,28029	16	(1),84790	87	9,83957	27
40	0,28045	15	(1),84877	88	9,83984	27
41	0,28060	15	(1),84965	87	9,84011	27
42	0,28075	16	(1),85052	88	9,84038	27
43	0,28091	15	(1),85140	87	9,84065	27
44	0,28106	15	(1),85227	88	9,84092	27
45	0,28121	16	(1),85315	87	9,84119	27
46	0,28137	15	(1),85402	88	9,84146	27
47	0,28152	15	(1),85490	88	9,84173	27
48	0,28167	16	(1),85578	88	9,84200	27
49	0,28183	15	(1),85666	88	9,81227	27
50	0,28198	16	(1),85754	88	9,84254	26
51	0,28214	15	(1),85842	88	9,84280	27
52	0,28229	15	(1),85930	88	9,84307	27
53	0,28244	16	(1),86018	88	9,84334	27
54	0,28260	15	(1),86106	88	9,84361	27
55	0,28275	16	(1),86194	88	9,84388	27
56	0,28291	15	(1),86282	88	9,84115	27
57	0,28306	15	(1),86370	89	9,84442	27
58	0,28321	16	(1),86459	88	9,84469	27
59	0,28337	15	(1),86547	88	9,84496	27
60	0,28352		(1),86635		9,84523	

ω = 35 Grad.						
ω ′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	logSin z	Diff.
0	0,28352	16	(1),86635	89	9,84523	27
1	0,28368	15	(1),86724	89	9,84550	26
2	0,28383	16	(1),86813	88	9,84576	27
3	0,28399	15	(1),86901	89	9,84603	27
4	0,28414	15	(1),86990	88	9,84630	27
5	0,28429	16	(1),87078	89	9,84657	27
6	0,28145	15	(1),87167	89	9,84684	27
7	0,28460	16	(1),87256	89	9 84711	27
8	0,28476	15	(1),87345	89	9,84738	26
9	0,28491	16	(1),87434	89	9,84764	27
10	0,28507	15	(1),87523	89	9,84791	27
11	0,28522	16	(1),87612	89	9,84818	27
12	0,28538	15	(1),87701	89	9,84845	27
13	0,28553	16	(1),87790	89	9,84872	27
14	0,28569	15	(1),87879	90	9,84899	26
15	0,28584	15	(1),87969	89	9,84925	27
16	0,28599	16	(1),88058	89	9,84952	27
17	0,28615	15	(1),88147	90	9,84979	27
18	0,28630	16	(1),88237	89	9,85006	27
19	0,28646	15	(1),88326	90	9,85033	26
20	0,28661	16	(1),88416	89	9,85059	27
21	0,28677	15	(1),88505	90	9,85086	27
22	0,28692	16	(1),88595	90	9,85113	27
23	0,28708	15	(1),88685	89	9,85140	26
24	0,28723	16	(1),88774	90	9,45166	27
25	0,28739	15	(1),88864	90	9,85193	27
26	0,28754	16	(1),88954	90	9,85220	27
27	0,28770	15	(1),89044	90	9,85247	26
28	0,28785	16	(1),89134	90	9,85273	27
29	0,28801	15	(1),89224	90	9,85300	27
30	0,28816	16	(1),89314	90	9,85327	27
31	0,28832	15	(1),89404	90	9,85354	26
32	0,28847	16	(1),89491	91	9 85380	27
33	0,28863	16	(1),89585	90	9,85407	27
34	0,28879	15	(1),89675	90	9,85434	26
35	0,28894	16	(1),89765	91	9,85460	27
36	0,28910	15	(1),89856	90	9,85487	27
37	0,28925	16	(1),89946	91	9,85514	26
38	0,28911	15	(1),90037	90	9,85510	27
39	0,28956	16	(1),90127	91	9,85567	27
40	0,28972	15	(1),90218	91	9,85594	26
41	0,28987	16	(1),90309	90	9,85620	27
42	0,29003	15	(1),90399	91	9,85647	27
43	0,29018	16	(1),90490	91	9,85674	26
44	0,29034	16	(1),90581	91	9,85700	27
45	0,29050	15	(1),90672	91	9,85727	27
46	0,29065	16	(1),90763	91	9,85754	26
47	0,29081	15	(1),90854	91	9,85780	27
48	0,29096	16	(1),90945	91	9,85807	27
49	0,29112	15	(1),91036	91	9,85834	26
50	0,29127	16	(1),91127	92	9,85860	27
51	0,29143	16	(1),91219	91	9,85887	26
52	0,29159	15	(1),91310	91	9,85913	27
53	0,29174	16	(1),91401	92	9,85940	27
54	0,29190	15	(1),91493	91	9,85967	26
55	0,29205	16	(1),91584	92	9,85993	27
56	0,26221	16	(1),91676	91	9,86020	26
57	0,29237	15	(1),91767	92	9,86046	27
58	0,29252	16	(1),91859	92	9,86073	27
59	0'29268	15	(1),91951	91	9,86100	26
60	0,29283		(1),92042		9,86126	

$\omega = 36$ Grad.

ω'	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	logSin z	Diff.
0	0.29283	16	(1).92042	92	9.86126	27
1	0.29299	16	(1).92134	92	9.86153	26
2	0.29315	15	(1).92226	92	9.86179	27
3	0.29330	16	(1).92318	92	9.86206	36
4	0.29346	16	(1).92410	92	9.86232	27
5	0.29362	15	(1).92502	92	9.86259	26
6	0.29377	16	(1).92594	92	9.86285	27
7	0.29393	15	(1).92686	92	9.86312	26
8	0.29408	16	(1).92778	93	9.86338	27
9	0.29424	16	(1).92871	92	9.86365	27
10	0.29440	15	(1).92963	92	9.86392	26
11	0.29455	16	(1).93055	93	9.86418	27
12	0.29471	16	(1).93148	92	9.86445	26
13	0.29487	15	(1).93240	93	9.86471	27
14	0.29502	16	(1).93333	92	9.86498	26
15	0.29518	16	(1).93425	93	9.86524	27
16	0.29534	15	(1).93518	93	9.86551	36
17	0.29549	16	(1).93611	93	9.86577	27
18	0.29565	16	(1).93704	92	9.86603	27
19	0.29581	15	(1).93796	93	9.86630	26
20	0.29596	16	(1).93889	93	9.86656	27
21	0.29612	16	(1).93982	93	9.86683	26
22	0.29628	15	(1).94075	93	9.86709	27
23	0.29643	16	(1).94168	93	9.86736	26
24	0.29659	16	(1).94261	94	9.86762	27
25	0.29675	16	(1).94355	93	9.86789	26
26	0.29691	15	(1).94448	93	9.86815	27
27	0.29706	16	(1).94541	93	9.86842	26
28	0.29722	16	(1).94634	94	9.86868	26
29	0.29738	15	(1).94728	93	9.86894	27
30	0.29753	16	(1).94821	94	9.86921	26
31	0.29769	16	(1).94915	93	9.86947	27
32	0.29785	16	(1).95008	94	9.86974	26
33	0.29801	15	(1).95102	94	9.87000	27
34	0.29816	16	(1).95196	93	9.87027	26
35	0.29832	16	(1).95289	94	9.87053	26
36	0.29848	15	(1).95383	94	9.87079	27
37	0.29863	16	(1).95477	94	9.87106	26
38	0.29879	16	(1).95571	94	9.87132	26
39	0.29895	16	(1).95665	94	9.87158	27
40	0.29911	15	(1).95759	94	9.87185	26
41	0.29926	16	(1).95853	94	9.87211	27
42	0.29942	16	(1).95947	94	9.87238	26
43	0.29958	16	(1).96041	95	9.87264	26
44	0.29974	15	(1).96136	94	9.87290	27
45	0.29989	16	(1).96230	94	9.87317	26
46	0.30005	16	(1).96324	95	9.87343	26
47	0.30021	16	(1).96419	94	9.87369	27
48	0.30037	16	(1).96513	95	9.87396	26
49	0.30053	15	(1).96608	94	9.87422	26
50	0.30068	16	(1).96702	95	9.87448	27
51	0.30084	16	(1).96797	95	9.87475	26
52	0.30100	16	(1).96892	94	9.87501	26
53	0.30116	16	(1).96986	95	9.87527	27
54	0.30132	15	(1).97081	95	9.87554	26
55	0.30147	16	(1).97176	95	9.87580	26
56	0.30163	16	(1).97271	95	9.87606	27
57	0.30179	16	(1).97366	95	9.87633	26
58	0.30195	16	(1).97461	95	9.87659	26
59	0.30211	15	(1).97556	95	9.87685	26
60	0.30226		(1).97651		9.87711	

$\omega = 37$ Grad.

ω'	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	logSin z	Diff.
0	0.30226	16	(1).97651	96	9.87711	27
1	0.30242	16	(1).97747	95	9.87738	26
2	0.30258	16	(1).97842	95	9.87764	26
3	0.30274	16	(1).97937	96	9.87790	27
4	0.30290	16	(1).98033	95	9.87817	26
5	0.30306	15	(1).98128	96	9.87843	26
6	0.30321	16	(1).98224	95	9.87869	26
7	0.30337	16	(1).98319	96	9.87895	27
8	0.30353	16	(1).98415	95	9.87922	26
9	0.30369	16	(1).98510	96	9.87948	26
10	0.30385	16	(1).98606	96	9.87974	26
11	0.30401	15	(1).98702	96	9.88000	27
12	0.30416	16	(1).98798	96	9.88027	26
13	0.30432	16	(1).98894	96	9.88053	26
14	0.30448	16	(1).98990	96	9.88079	26
15	0.30464	16	(1).99086	96	9.88105	26
16	0.30480	16	(1).99182	96	9.88131	27
17	0.30496	16	(1).99278	96	9.88158	26
18	0.30512	16	(1).99374	97	9.88184	26
19	0.30528	15	(1).99471	96	9.88210	26
20	0.30543	16	(1).99567	96	9.88236	26
21	0.30559	16	(1).99663	97	9.88262	27
22	0.30575	16	(1).99760	96	9.88289	26
23	0.30591	16	(1).99856	97	9.88315	26
24	0.30607	16	(1).99953	10	9.88341	26
25	0.30623	16	0.10005	10	9.88367	26
26	0.30639	16	0.10015	9	9.88393	27
27	0.30655	16	0.10024	10	9.80420	26
28	0.30671	16	0.10034	10	9.88446	26
29	0.30687	15	0.10044	9	9.88472	26
30	0.30702	16	0.10053	10	9.88498	26
31	0.30718	16	0.10063	10	9.88524	26
32	0.30734	16	0.10073	9	9.88550	27
33	0.30750	16	0 10082	10	9.88577	26
34	0.30766	16	0.10092	10	9.88603	26
35	0.30782	16	0.10102	10	9.88629	26
36	0.30798	16	0.10112	9	9.88655	26
37	0.30814	16	0.10121	10	9.88681	26
38	0.30830	16	0.10131	10	9.88707	26
39	0.30846	16	0.10141	10	9.88733	26
40	0.30862	16	0.10151	9	9.88759	27
41	0.30878	16	0.10160	10	9.88786	26
42	0.30894	16	0.10170	10	9.88812	26
43	0.30910	16	0.10180	10	9.88838	26
44	0.30926	16	0.10190	9	9.88864	26
45	0.30942	16	0.10199	10	9.88890	26
46	0.30958	16	0.10209	10	9.88916	26
47	0.30974	16	0.10219	10	9.88942	26
48	0.30990	16	0.10229	10	9.88968	26
49	0.31006	16	0.10239	9	9.88994	26
50	0.31022	16	0.10248	10	9.89020	26
51	0.31038	16	0.10258	10	9.89046	27
52	0.31054	16	0.10268	10	9.89073	26
53	0.31070	16	0.10278	10	9.89099	26
54	0.31086	16	0.10288	10	9.89125	26
55	0.31102	16	0.10298	9	9.89151	26
56	0.31118	16	0.10307	10	9.89177	26
57	0.31134	16	0.10317	10	9.89203	26
58	0.31150	16	0.10327	10	9.89229	26
59	0.31166	16	0.10337	10	9.89255	26
60	0.31182		0.10347		9.89281	

$\omega = 38$ Grad. | $\omega = 39$ Grad.

ω ′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.	ω ′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0,31182	16	0,10347	10	9,89281	26	0	0,32150	17	0,10950	10	9,90837	26
1	0,31198	16	0,10357	10	9,89307	26	1	0,32167	16	0,10960	10	9,90863	26
2	0,31214	16	0,10367	9	9,89333	26	2	0,32183	16	0,10970	10	9,90889	25
3	0,31230	16	0,10376	10	9,89359	26	3	0,32199	16	0,10980	11	9,90914	26
4	0,31246	16	0,10386	10	9,89385	26	4	0,32215	17	0,10991	10	9,90940	26
5	0,31262	16	0,10396	10	9,89411	26	5	0,32232	16	0,11001	10	9,90966	26
6	0,31278	16	0,10406	10	9,89437	26	6	0,32248	16	0,11011	11	9,90992	26
7	0,31294	16	0,10416	10	9,89463	26	7	0,32264	17	0,11022	10	9,91018	25
8	0,31310	16	0,10426	10	9,89489	26	8	0,32281	16	0,11032	10	9,91043	26
9	0,31326	16	0,10436	10	9,89515	26	9	0,32297	16	0,11042	10	9,91069	26
10	0,31342	16	0,10446	10	9,89541	26	10	0,32313	16	0,11052	11	9,91095	26
11	0,31358	16	0,10456	10	9,89567	26	11	0,32329	17	0,11063	10	9,91121	26
12	0,31374	17	0,10466	10	9,89593	26	12	0,32346	16	0,11073	10	9,91147	25
13	0,31391	16	0,10476	10	9,89619	26	13	0,32362	16	0,11083	11	9,91172	26
14	0,31407	16	0,10486	10	9,89645	26	14	0,32378	17	0,11094	10	9,91198	26
15	0,31423	16	0,10496	9	9,89671	26	15	0,32395	16	0,11104	10	9,91224	26
16	0,31439	16	0,10505	10	9,89697	26	16	0,32411	16	0,11114	11	9,91250	26
17	0,31455	16	0,10515	10	9,89723	26	17	0,32427	17	0,11125	10	9,91276	25
18	0,31471	16	0,10525	10	9,89749	26	18	0,32444	16	0,11135	10	9,91301	26
19	0,31487	16	0,10535	10	9,89775	26	19	0,32460	16	0,11145	11	9,91327	26
20	0,31503	16	0,10545	10	9,89801	26	20	0,32476	17	0,11156	10	9,91353	26
21	0,31519	16	0,10555	10	9,89827	26	21	0,32493	16	0,11166	10	9,91379	25
22	0,31535	17	0,10565	10	9,89853	26	22	0,32509	16	0,11176	11	9,91404	26
23	0,31552	16	0,10575	10	9,89879	26	23	0,32525	17	0,11187	10	9,91430	26
24	0,31568	16	0,10585	10	9,89905	26	24	0,32542	16	0,11197	10	9,91450	26
25	0,31584	16	0,10595	10	9,89931	26	25	0,32558	16	0,11207	11	9,91482	25
26	0,31600	16	0,10605	10	9,89957	26	26	0,32574	17	0,11218	10	9,91507	26
27	0,31616	16	0,10615	10	9,89983	26	27	0,32591	16	0,11228	11	9,91533	26
28	0,31632	16	0,10625	11	9,90009	26	28	0,32607	16	0,11239	10	9,91559	26
29	0,31648	16	0,10636	10	9,90035	26	29	0,32623	17	0,11249	10	9,91585	25
30	0,31664	17	0,10646	10	9,90061	25	30	0,32640	16	0,11259	11	9,91610	26
31	0,31681	16	0,10656	10	9,90086	26	31	0,32656	17	0,11270	10	9,91636	26
32	0,31697	16	0,10666	10	9,90112	26	32	0,32673	16	0,11280	11	9,91662	26
33	0,31713	16	0,10676	10	9,90138	26	33	0,32689	16	0,11291	10	9,91688	25
34	0,31729	16	0,10686	10	9,90164	26	34	0,32705	17	0,11301	11	9,91713	26
35	0,31745	16	0,10696	10	9,90190	26	35	0,32722	16	0,11312	10	9,91739	26
36	0,31761	17	0,10706	10	9,90216	26	36	0,32738	17	0,11322	10	9,91765	26
37	0,31778	16	0,10716	10	9,90242	26	37	0,32755	16	0,11332	11	9,91791	25
38	0,31794	16	0,10726	10	9,90268	26	38	0,32771	16	0,11343	10	9,91816	26
39	0,31810	16	0,10736	10	9,90294	26	39	0,32787	17	0,11353	11	9,91842	26
40	0,31826	16	0,10746	10	9,90320	26	40	0,32804	16	0,11364	10	9,91868	25
41	0,31842	16	0,10756	11	9,90346	25	41	0,32820	17	0,11374	11	9,91893	26
42	0,31858	17	0,10767	10	9,90371	26	42	0,32837	16	0,11385	10	9,91919	26
43	0,31875	16	0,10777	10	9,90397	26	43	0,32853	16	0,11395	11	9,91945	26
44	0,31891	16	0,10787	10	9,90423	26	44	0,32869	17	0,11406	10	9,91971	25
45	0,31907	16	0,10797	10	9,90449	26	45	0,32886	16	0,11416	11	9,91996	26
46	0,31923	16	0,10807	10	9,90475	26	46	0,32902	17	0,11427	10	9,92022	26
47	0,31939	17	0,10817	10	9,90501	26	47	0,32919	16	0,11437	11	9,92048	25
48	0,31956	16	0,10827	11	9,90527	26	48	0,32935	17	0,11448	10	9,92073	26
49	0,31972	16	0,10838	10	9,90553	25	49	0,32952	16	0,11458	11	9,92099	26
50	0,31988	16	0,10848	10	9,90578	26	50	0,32968	16	0,11469	10	9,92125	25
51	0,32004	16	0,10858	10	9,90604	26	51	0,32984	17	0,11479	11	9,92150	26
52	0,32020	17	0,10868	10	9,90630	26	52	0,33001	16	0,11490	11	9,92176	26
53	0,32037	16	0,10878	10	9,90656	26	53	0,33017	17	0,11501	10	9,92202	25
54	0,32053	16	0,10888	11	9,90682	26	54	0,33034	16	0,11511	11	9,92227	26
55	0,32069	16	0,10899	10	9,90708	26	55	0,33050	17	0,11522	10	9,92253	26
56	0,32085	17	0,10909	10	9,90734	25	56	0,33067	16	0,11532	11	9,92279	25
57	0,32102	16	0,10919	10	9,90759	26	57	0,33083	17	0,11543	10	9,92304	26
58	0,32118	16	0,10929	11	9,90785	26	58	0,33100	16	0,11553	11	9,92330	26
59	0,32134	16	0,10940	10	9,90811	26	59	0,33116	17	0,11564	11	9,92356	25
60	0,32150		0,10950		9,90837		60	0,33133		0,11575		9,92381	

$\omega = 40$ Grad.

ω ′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0.33133	16	0.11575	10	9.92381	26
1	0.33149	17	0.11585	11	9.92407	26
2	0.33166	16	0.11596	10	9.92433	25
3	0.33182	17	0.11606	11	9.92458	26
4	0.33199	16	0.11617	11	9.92484	26
5	0.33215	17	0.11628	10	9.92510	25
6	0.33232	16	0.11638	11	9.92535	26
7	0.33248	17	0.11649	11	9.92561	26
8	0.33265	16	0.11660	10	9.92587	25
9	0.33281	17	0.11670	11	9.92612	26
10	0.33298	16	0.11681	11	9.92638	25
11	0.33314	17	0.11692	10	9.92663	26
12	0.33331	16	0.11702	11	9.92689	26
13	0.33347	17	0.11713	11	9.92715	25
14	2.33364	17	0.11724	10	9.92740	26
15	0.33381	16	0.11731	11	9.92766	26
16	0.33397	17	0.11745	11	9.92792	25
17	0.33414	16	0.11756	10	9.92817	26
18	0.33430	17	0.11766	11	9.92843	25
19	0.33447	16	0.11777	11	9.92868	26
20	0.33463	17	0.11788	11	9.92894	26
21	0.33480	17	0.11799	10	9.92920	25
22	0.33497	16	0.11809	11	9.92945	26
23	0.33513	17	0.11820	11	9.92971	25
24	0.33530	16	0.11831	11	9.92996	26
25	0.33546	17	0.11842	10	9.93022	26
26	0.33563	16	0.11852	11	9.93048	25
27	0.33579	17	0.11863	11	9.93073	26
28	0.33596	17	0.11874	11	9.93099	25
29	0.33613	16	0.11885	10	9.93124	26
30	0.33629	17	0.11895	11	9.93150	25
31	0.33646	17	0.11906	11	9.93175	26
32	0.33663	16	0.11917	11	9.93201	26
33	0.33679	17	0.11928	11	9.93227	25
34	0.33696	16	0.11939	10	9.93252	26
35	0.33712	17	0.11949	11	9.93278	25
36	0.33729	17	0.11960	11	9.93303	26
37	0.33746	16	0.11971	11	9.93329	25
38	0.33762	17	0.11982	11	9.93354	26
39	0.33779	17	0.11993	11	9.93380	26
40	0.33796	16	0.12004	11	9.93406	25
41	0.33812	17	0.12015	10	9.93431	26
42	0.33829	17	0.12025	11	9.93457	25
43	0.33846	16	0.12036	11	9.93482	26
44	0.33862	17	0.12047	11	9.93508	25
45	0.33879	17	0.12058	11	9.93533	26
46	0.33896	16	0.12069	11	9.93559	25
47	0.33912	17	0.12080	11	9.93584	26
48	0.33929	17	0.12091	11	9.93610	26
49	0.33946	16	0.12102	11	9.93636	25
50	0.33962	17	0.12113	10	9.93661	26
51	0.33979	17	0.12123	11	9.93687	25
52	0.33996	17	0.12134	11	9.93712	26
53	0.34013	16	0.12145	11	9.93738	25
54	0.34029	17	0.12156	11	9.93763	26
55	0.34046	17	0.12167	11	9.93789	25
56	0.34063	16	0.12178	11	9.93814	26
57	0.34079	17	0.12189	11	9.93840	25
58	0.34096	17	0.12200	11	9.93865	26
59	0.34113	17	0.12211	11	9.93891	25
60	0.34130		0.12222		9.93916	

$\omega = 41$ Grad.

ω ′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0.34130	16	0.12222	11	9.93916	26
1	0.34146	17	0.12233	11	9.93942	25
2	0.34163	17	0.12244	11	9.93967	26
3	0.34180	17	0.12255	11	9.93993	25
4	0.34197	16	0.12266	11	9.94018	26
5	0.34213	17	0.12277	11	9.94044	25
6	0.34230	17	0.12288	11	9.94069	26
7	0.34247	17	0.12299	11	9.94095	25
8	0.34264	16	0.12310	11	9.94120	26
9	0.34280	17	0.12321	11	9.94146	25
10	0.34297	17	0.12332	11	9.94171	26
11	0.34314	17	0.12343	11	9.94197	25
12	0.34331	17	0.12354	11	9.94222	26
13	0.34348	16	0.12365	11	9.94248	25
14	0.34364	17	0.12376	11	9.94273	26
15	0.34381	17	0.12387	12	9.94299	25
16	0.34398	17	0.12399	11	9.94324	26
17	0.34415	17	0.12410	11	9.94350	25
18	0.34432	16	0.12421	11	9.94375	26
19	0.34448	17	0.12432	11	9.94401	25
20	0.34465	17	0.12443	11	9.94426	26
21	0.34482	17	0.12454	11	9.94452	25
22	0.34499	17	0.12465	11	9.94477	26
23	0.34516	17	0.12476	11	9.94503	25
24	0.34533	16	0.12487	12	9.94528	26
25	0.34549	17	0.12499	11	9.94551	25
26	0.34566	17	0.12510	11	9.94579	25
27	0.34583	17	0.12521	11	9.94604	26
28	0.34600	17	0.12532	11	9.94630	25
29	0.34617	17	0.12543	11	9.94655	26
30	0.34634	17	0.12554	12	9.94681	25
31	0.34651	16	0.13566	11	9.94706	26
32	0.34667	17	0.12577	11	9.94732	25
33	0.34681	17	0.12588	11	9.94757	26
31	0.34701	17	0.12599	11	9.94783	25
35	0.34718	17	0.15610	12	9.94808	26
36	0.34735	17	0.12622	11	9.94834	25
37	0.31752	17	0.12633	11	9.94859	25
38	0.34769	17	0.12614	11	9.94884	26
39	0.34786	17	0.11655	11	9.94910	25
40	0.34803	16	0.12666	12	9.94935	26
41	0.34819	17	0.12678	11	9.94961	25
42	0.34836	17	0.12689	11	9.94986	26
43	0.34853	17	0.12700	12	9.95012	25
41	0.34870	17	0.12712	11	9.95037	25
45	0.34887	17	0.12723	11	9.95062	26
46	0.34904	17	0.12734	11	9.95088	25
47	0.34921	17	0.12745	12	9.95113	26
48	0.34938	17	0.12757	11	9.95139	25
49	0.34955	17	0.12768	11	9.95164	26
50	0.34972	17	0.12779	12	9.95190	25
51	0.34989	17	0.12791	11	9.95215	25
52	0.35006	17	0.12802	11	9.95240	26
53	0.35023	17	0.12813	12	9.95266	25
54	0.35040	17	0.12825	11	9.95291	26
55	0.35057	17	0.12836	11	9.95317	25
56	0.35074	17	0.12847	12	9.95342	26
57	0.35091	17	0.12859	11	9.95368	25
58	0.35108	17	0.12870	11	9.95393	25
59	0.35125	17	0.12881	12	9.95418	26
60	0.35142		0.12893		9.95444	

$\omega = 42$ Grad.

ω ′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0,35142	17	0,12893	11	9,95444	25
1	0,35159	17	0,12904	11	9,95469	26
2	0,35176	17	0,12915	12	9,95495	25
3	0,35193	17	0,12927	11	9,95520	25
4	0,35210	17	0,12938	12	9,95545	26
5	0,35227	17	0,12950	11	9,95571	25
6	0,35244	17	0,12961	11	9,95596	26
7	0,35261	17	0,12972	12	9,95622	25
8	0,35278	17	0,12984	11	9,95647	25
9	0,35295	17	0,12995	12	9,95672	26
10	0,35312	17	0,13007	11	9,95698	25
11	0,35329	17	0,13018	12	9,95723	25
12	0,35346	17	0,13030	11	9,95748	26
13	0,35363	17	0,13041	12	9,95774	25
14	0,35380	17	0,13053	11	9,95799	26
15	0,35397	17	0,13064	12	9,95825	25
16	0,35414	17	0,13076	11	9,95850	25
17	0,35431	17	0,13087	11	9,95875	26
18	0,35448	17	0,13098	12	9,95901	25
19	0,35465	18	0,13110	11	9,95926	26
20	0,35483	17	0,13121	12	9,95952	25
21	0,35500	17	0,13133	12	9,95977	25
22	0,35517	17	0,13145	11	9,96002	26
23	0,35534	17	0,13156	12	9,96028	25
24	0,35551	17	0,13168	11	9,96053	25
25	0,35568	17	0,13179	12	9,96078	26
26	0,35585	17	0,13191	11	9,96104	25
27	0,35602	17	0,13202	12	9,96129	26
28	0,35619	18	0,13214	11	9,96155	25
29	0,35637	17	0,13225	12	9,96180	25
30	0,35654	17	0,13237	11	9,96205	26
31	0,35671	17	0,13248	12	9,96231	25
32	0,35688	17	0,13260	12	9,96256	25
33	0,35705	17	0,13272	11	9,96281	26
34	0,35722	17	0,13283	12	9,96307	25
35	0,35739	18	0,13295	11	9,96332	25
36	0,35757	17	0,13306	12	9,96357	26
37	0,35774	17	0,13318	12	9,96383	25
38	0,35791	17	0,13330	11	9,96408	25
39	0,35808	17	0,13341	12	9,96433	26
40	0,35825	17	0,13353	12	9,96459	25
41	0,35842	18	0,13365	11	9,96484	26
42	0,35860	17	0,13376	12	9,96510	25
43	0,35877	17	0,13388	12	9,96535	25
44	0,35894	17	0,13400	11	9,96560	26
55	0,35911	17	0,13411	12	9,96586	25
46	0,35928	18	0,13423	12	9,96611	25
47	0,35946	17	0,13435	11	9,96636	26
48	0,35963	17	0,13446	12	9,96662	25
49	0,35980	17	0,13458	12	9,96687	25
50	0,35997	18	0,13470	12	9,96712	26
51	0,36015	17	0,13482	11	9,96738	25
52	0,36032	17	0,13493	12	9,96763	25
53	0,36049	17	0,13505	12	9,96788	26
54	0,36066	18	0,13517	11	9,96814	25
55	0,36084	17	0,13528	12	9,96839	25
56	0,36101	17	0,13540	12	9,96864	26
57	0,36118	17	0,13552	12	9,96890	25
58	0,36135	18	0,13564	11	9,96915	25
59	0,36153	17	0,13575	12	9,96940	26
60	0,36170		0,13587		9,96966	

$\omega = 43$ Grad.

ω ′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0,36170	17	0,13587	12	9,96966	25
1	0,36187	17	0,13599	12	9,96991	25
2	0,36204	18	0,13611	12	9,97016	26
3	0,36222	17	0,13623	11	9,97042	25
4	0,36239	17	0,13634	12	9,97067	25
5	0,36256	18	0,13646	12	9,97092	26
6	0,36274	17	0,13658	12	9,97118	25
7	0,36291	17	0,13670	12	9,97143	25
8	0,36308	17	0,13682	12	9,97168	25
9	0,36325	18	0,13694	11	9,97193	26
10	0,36343	17	0,13705	12	9,97219	25
11	0,36360	17	0,13717	12	9,97244	25
12	0,36377	18	0,13729	12	9,97269	26
13	0,36395	17	0,13741	12	9,97295	25
14	0,36412	17	0,13753	12	9,97320	25
15	0,36429	18	0,13765	12	9,97345	26
16	0,36447	17	0,13777	12	9,97371	25
17	0,36464	17	0,13789	11	9,97396	25
18	0,36481	18	0,13800	12	9,97421	26
19	0,36499	17	0,13812	12	9,97447	25
20	0,36516	18	0,13824	12	9,97472	25
21	0,36534	17	0,13836	12	9,97497	26
22	0,36551	17	0,13848	12	9,97523	25
23	0,36568	18	0,13860	12	9,97548	25
24	0,36586	17	0,13872	12	9,97573	25
25	0,36603	18	0,13884	12	9,97598	26
26	0,36621	17	0,13896	12	9,97624	25
27	0,36638	17	0,13908	12	9,97649	25
28	0,36655	18	0,13920	12	9,97674	26
29	0,36673	17	0,13932	12	9,97700	25
30	0,36690	18	0,13944	12	9,97725	25
31	0,36708	17	0,13956	12	9,97750	26
32	0,36725	17	0,13968	12	9,97776	25
33	0,36742	18	0,13980	12	9,97801	25
34	0,36760	17	0,13992	12	9,97826	25
35	0,36777	18	0,14004	12	9,97851	26
36	0,36795	17	0,14016	12	9,97877	25
37	0,36812	18	0,14028	12	9,97902	25
38	0,36830	17	0,14040	12	9,97927	26
39	0,36847	18	0,14052	12	9,97953	25
40	0,36865	17	0,14064	12	9,97978	25
41	0,36882	17	0,14076	12	9,98003	26
42	0,36899	18	0,14088	12	9,98029	25
43	0,36917	17	0,14100	12	9,98054	25
44	0,36934	18	0,14112	12	9,98079	25
45	0,36952	17	0,14124	12	9,98104	26
46	0,36969	18	0,14136	13	9,98130	25
47	0,36987	17	0,14149	12	9,98155	25
48	0,37004	18	0,14161	12	9,98180	26
49	0,37022	17	0,14173	12	9,98206	25
50	0,37039	18	0,14185	12	9,98231	25
51	0,37057	17	0,14197	12	9,98256	25
52	0,37074	18	0,14209	12	9,98281	26
53	0,37092	18	0,14221	13	9,98307	25
54	0,37110	17	0,14234	12	9,98332	25
55	0,37127	18	0,14246	12	9,98357	26
56	0,37145	17	0,14258	12	9,98383	25
57	0,37162	18	0,14270	12	9,98408	25
58	0,37180	17	0,14282	12	9,98433	25
59	0,37197	18	0,14294	13	9,98458	26
60	0,37215		0,14307		9,98484	

$\omega = 44$ Grad.

ω′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0,37215	17	0,14307	12	9,98484	25
1	0,37232	18	0,14319	12	9,98509	25
2	0,37250	18	0,14331	12	9,98534	25
3	0,37268	17	0,14343	12	9,98560	25
4	0,37285	18	0,14355	13	9,98585	25
5	0,37303	17	0,14368	12	9,98610	25
6	0,37320	18	0,14380	12	9 98635	26
7	0,37338	17	0,14392	12	9,98661	25
8	0,37355	18	0,14404	13	9,98686	25
9	0,37373	18	0,14417	12	9,98711	26
10	0,37391	17	0,14429	12	9,98737	25
11	0,37408	18	0,14441	12	9,98762	25
12	0,37426	18	0,14453	13	9,98787	25
13	0,37444	17	0,14466	12	9,98812	26
14	0,37461	18	0,14478	12	9,98838	25
15	0,37479	17	0,14490	13	9,98863	25
16	0,37496	18	0,14503	12	9,98888	25
17	0,37514	18	0,14515	12	9,98913	26
18	0,37532	17	0,14527	13	9,98939	25
19	0,37549	18	0,14540	12	9,98964	25
20	0,37567	18	0,14552	12	9,98989	26
21	0,37585	17	0,14564	13	9,99015	25
22	0,37602	18	0,14577	12	9,99040	25
23	0,37620	18	0,14589	12	9,99065	25
24	0,37638	17	0,14601	13	9,99090	26
25	0,37655	18	0,14614	12	9,99116	25
26	0,37673	18	0,14626	13	9,99141	25
27	0,37691	17	0,14639	12	9,99166	25
28	0,37708	18	0,14651	12	9,99191	26
29	0,37726	18	0,14663	13	9,99217	25
30	0,37744	18	0,14676	12	9,99212	25
31	0,37762	17	0,14688	13	9,99267	26
32	0,37779	18	0,14701	12	9,99293	25
33	0,37797	18	0,14713	13	9,99318	25
34	0,37815	18	0,14726	12	9,99343	25
35	0,37833	17	0,14738	12	9,99368	26
36	0,37850	18	0,14750	13	9,99394	25
37	0,37868	18	0,14763	12	9,99419	25
38	0,37886	18	0,14775	13	9,99441	25
39	0,37904	17	0,14788	12	9,99469	26
40	0,37921	18	0,14800	13	9,99495	25
41	0,37939	18	0,14813	12	9,99520	25
42	0,37957	18	0,14825	13	9,99545	25
43	0,37975	17	0,14838	12	9,99570	26
44	0,37992	18	0,14850	13	9,99596	25
45	0,38010	18	0,14863	12	9,99621	25
46	0,38028	18	0,14875	13	9,99646	26
47	0,38046	18	0,14888	12	9,99672	25
48	0,38064	17	0,14900	13	9,99697	25
49	0,38081	18	0,14913	13	9,99722	25
50	0,38099	18	0,14926	12	9,99747	26
51	0,38117	18	0,14938	13	9,99773	25
52	0,38135	18	0,14951	12	9,99798	25
53	0,38153	17	0,14963	13	9,99823	25
54	0,38170	18	0,14976	12	9,99848	26
55	0,38188	18	0,14988	13	9,99874	25
56	0,38206	18	0,15001	13	9,99899	25
57	0,38224	18	0,15014	12	9,99924	25
58	0,38242	18	0,15026	13	9,99949	26
59	0,38260	18	0,15039	12	9,99975	25
60	0,38278		0,15051		0,00000	

$\omega = 45$ Grad.

ω′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0,38278	17	0,15051	13	(∞)	25,266
1	0,38295	18	0,15064	13	(3)25,266	25,266
2	0,38313	18	0,15077	12	(3)50,532	25,267
3	0,38331	18	0,15089	13	(3)75,799	25,27
4	0,38349	18	0,15102	13	(2)101,07	25,26
5	0,38367	18	0,15115	12	(2)126,33	25,27
6	0,38385	18	0,15127	13	(2)151,60	25,26
7	0,38403	18	0,15140	13	(2)176,86	25,27
8	0,38421	18	0,15153	12	(2)202,13	25,27
9	0,38439	17	0,15165	13	(2)227,40	25,26
10	0,38456	18	0,15178	13	(2)252,66	25,27
11	0,38474	18	0,15191	13	(2)277,93	25,27
12	0,38492	18	0,15204	12	(2)303,20	25,26
13	0,38510	18	0,15216	13	(2)328,46	25,27
44	0,38528	18	0,15229	13	(2)353,73	25,27
15	0,38546	18	0,15242	13	(2)379,00	25,27
16	0,38564	18	0,15255	12	(2)404,27	25,26
17	0,38582	18	0,15267	13	(2)429,53	25,27
18	0,38600	18	0,15280	13	(2)454,80	25,27
19	0,38618	18	0,15293	13	(2)480,07	25,27
20	0,38636	18	0,15306	12	(2)505,34	25,26
21	0,38654	18	0,15318	13	(2)530,60	25,27
22	0,38672	18	0,15331	13	(2)555,87	25,27
23	0,38690	18	0,15344	13	(2)581,14	25,27
24	0,38708	18	0,15357	13	(2)606,41	25,27
25	0,31726	18	0,15370	12	(2)631,68	25,27
26	0,38744	18	0,15382	13	(2)656,95	25,27
27	0,38762	18	0,15395	13	(2)682,22	25,27
28	0,38780	18	0,15408	13	(2)707,49	25,27
29	0,38798	18	0,15421	13	(2)732,76	25,27
30	0,38816	18	0,15434	13	(2)758,03	25,27
31	0,38834	18	0,15447	13	(2)783,30	25,27
32	0,38852	18	0,15460	12	(2)808,57	25,27
33	0,38870	18	0,15472	13	(2)833,84	25,27
31	0,38888	18	0,15485	13	(2)859,11	25,27
35	0,38906	18	0,15498	13	(2)884,38	25,27
36	0,38924	18	0,15511	13	(2)909,65	25,27
37	0,38942	18	0,15524	13	(2)934,92	25,27
38	0,38960	18	0,15537	13	(2)960,19	25,28
39	0,38978	18	0,15550	13	(2)985,17	25,27
40	0,38996	18	0,15563	13	(1)1010,7	25,2
41	0,39014	19	0,15576	13	(1)1036,0	25,3
42	0,39033	18	0,15589	13	(1)1061,3	25,3
43	0,39051	18	0,15602	13	(1)1086,6	25,2
44	0,39069	18	0,15615	12	(1)1111,8	25,3
45	0,39087	18	0,15627	13	(1)1137,1	25,3
46	0,39105	18	0,15640	13	(1)1162,4	25,3
47	0,39123	18	0,15653	13	(1)1187,7	25,2
48	0,39141	18	0,15666	43	(1)1212,9	25,3
49	0,39159	18	0,15679	13	(1)1238,2	25,3
50	0,39177	19	0,15692	13	(1)1263,5	25,3
51	0(39196	18	0,15705	13	(1)1288,8	25,2
52	0,39214	18	0,15718	13	(1)1314,0	25,3
53	0,39232	18	0,15731	14	(1)1339,3	25,3
54	0,39250	18	0,15745	13	(1)1364,6	25,3
55	0,39268	18	0,15758	13	(1)1389,9	25,3
56	0,39286	19	0,15771	13	(1)1415,2	25,2
57	0,39305	18	0,15784	13	(1)1440,4	25,3
58	0,39323	18	0,15797	13	(1)1465,7	25,3
59	0,39341	18	0,15810	13	(1)1491,0	25,3
60	0,39359		0,15823		(1)1516,3	

$\omega = 46$ Grad.

ω′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0.39359	18	0.15823	13	(1)1516.3	25.3
1	0.39377	18	0.15836	13	(1)1541.6	25.2
2	0.39395	19	0.15849	13	(1)1566.8	25.3
3	0.39414	18	0.15862	13	(1)1592.1	25.3
4	0.39432	18	0.15875	13	(1)1617.4	25.3
5	0.39450	18	0.15888	14	(1)1642.7	25.3
6	0.39468	18	0.15902	13	(1)1668.0	25.3
7	0.39486	19	0.15915	13	(1)1693.3	25.3
8	0.39505	18	0.15928	13	(1)1718.6	25.2
9	0.39523	18	0.15941	13	(1)1743.8	25.3
10	0.39541	18	0.15954	13	(1)1769.1	25.3
11	0.39559	19	0.15967	13	(1)1794.4	25.3
12	0.39578	18	0.15980	14	(1)1819.7	25.3
13	0.39596	18	0.15994	13	(1)1845.0	25.3
14	0.39614	18	0.16007	13	(1)1870.3	25.3
15	0.39632	19	0.16020	13	(1)1895.6	25.3
16	0.39651	18	0.16033	13	(1)1920.9	25.3
17	0.39669	18	0.16046	14	(1)1946.2	25.2
18	0.39687	19	0.16060	13	(1)1971.4	25.3
19	0.39706	18	0.16073	13	(1)1996.7	25.3
20	0.39724	18	0.16086	13	(1)2022.0	25.3
21	0.39742	18	0.16099	14	(1)2047.3	25.3
22	0.39760	19	0.16113	13	(1)2072.6	25.3
23	0.39779	18	0.16126	13	(1)2097.9	25.3
24	0.39797	18	0.16139	13	(1)2123.2	25.3
25	0.39815	19	0.16152	14	(1)2148.5	25.3
26	0.39834	18	0.16166	13	(1)2173.8	25.3
27	0.39852	18	0.16179	13	(1)2199.1	25.3
28	0.39870	19	0.16192	13	(1)2224.4	25.3
29	0.39889	18	0.16205	14	(1)2249.7	25.3
30	0.39907	18	0.16219	13	(1)2275.0	25.3
31	0.39925	19	0.16232	13	(1)2300.3	25.3
32	0.39944	18	0.16245	14	(1)2325.6	25.3
33	0.39962	19	0.16259	13	(1)2350.9	25.3
34	0.39981	18	0.16272	13	(1)2376.2	25.3
35	0.39999	18	0.16285	14	(1)2401.5	25.3
36	0.40017	19	0.16299	13	(1)2426.8	25.3
37	0.40036	18	0.16312	14	(1)2452.1	25.3
38	0.40054	19	0.16326	13	(1)2477.4	25.3
39	0.40073	18	0.16339	13	(1)2502.7	25.3
40	0.40091	18	0.16352	14	(1)2528.0	25.4
41	0.40109	19	0.16366	13	(1)2553.4	25.3
42	0.40128	18	0.16379	13	(1)2578.7	25.3
43	0.40146	19	0.16392	14	(1)2604.0	25.3
44	0.40165	18	0.16406	13	(1)2629.3	25.3
45	0.40183	18	0.16419	14	(1)2654.6	25.3
46	0.40201	19	0.16433	13	(1)2679.9	25.3
47	0.40220	18	0.16446	14	(1)2705.2	25.3
48	0.40238	19	0.16460	13	(1)2730.5	25.4
49	0.40257	18	0.16473	14	(1)2755.9	25.3
50	0.40275	19	0.16487	13	(1)2781.2	25.3
51	0.40294	18	0.16500	14	(1)2806.5	25.3
52	0.40312	19	0.16514	13	(1)2831.8	25.3
53	0.40331	18	0.16527	14	(1)2857.1	25.4
54	0.40349	19	0.16541	13	(1)2882.5	25.3
55	0.40368	18	0.16554	14	(1)2907.8	25.3
56	0.40386	19	0.16568	13	(1)2933.1	25.3
57	0.40405	18	0.16581	14	(1)2958.4	25.4
58	0.40423	19	0.16595	13	(1)2983.8	25.3
59	0.40442	18	0.16608	14	(1)3009.1	25.3
60	0.40460		0.16622		(1)3034.4	

$\omega = 47$ Grad.

ω′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0.40460	19	0.16622	13	(1)3034.4	25.3
1	0.40479	18	0.16635	14	(1)3059.7	25.4
2	0.40497	19	0.16649	13	(1)3085.1	25.3
3	0.40516	18	0.16662	14	(1)3110.4	25.3
4	0.40534	19	0.16676	14	(1)3135.7	25.4
5	0.40553	18	0.16690	13	(1)3161.1	25.3
6	0.40571	19	0.16703	14	(1)3186.4	25.3
7	0.40590	19	0.16717	13	(1)3211.7	25.4
8	0.40609	18	0.16730	14	(1)3237.1	25.3
9	0.40627	19	0.16744	14	(1)3262.4	25.3
10	0.40646	18	0.16758	13	(1)3287.7	25.4
11	0.40664	19	0.16771	14	(1)3313.1	25.3
12	0.40683	19	0.16785	13	(1)3338.4	25.4
13	0.40702	18	0.16798	14	(1)3363.8	25.3
14	0.40720	19	0.16812	14	(1)3389.1	25.4
15	0.40739	18	0.16826	13	(1)3414.5	25.3
16	0.40757	19	0.16839	14	(1)3439.8	25.3
17	0.40776	19	0.16853	14	(1)3465.1	25.4
18	0.40795	18	0.16867	13	(1)3490.5	25.3
19	0.40813	19	0.16880	14	(1)3515.8	25.4
20	0.40832	19	0.16894	14	(1)3541.2	25.3
21	0.40851	18	0.16908	14	(1)3566.5	25.4
22	0.40869	19	0.16922	13	(1)3591.9	25.3
23	0.40888	18	0.16935	14	(1)3617.2	25.4
24	0.40906	19	0.16949	14	(1)3642.6	25.4
25	0.40925	19	0.16963	14	(1)3668.0	25.3
26	0.40944	19	0.16977	13	(1)3693.3	25.4
27	0.40963	18	0.16990	14	(1)3718.7	25.3
28	0.40981	19	0.17004	14	(1)3744.0	25.4
29	0.41000	19	0.17018	14	(1)3769.4	25.4
30	0.41019	18	0.17032	13	(1)3794.8	25.3
31	0.41037	19	0.17045	14	(1)3820.1	25.4
32	0.41056	19	0.17059	14	(1)3845.5	25.3
33	0.41075	18	0.17073	14	(1)3870.8	25.4
34	0.41093	19	0.17087	14	(1)3896.2	25.4
35	0.41112	19	0.17101	14	(1)3921.6	25.4
36	0.41131	19	0.17115	13	(1)3947.0	25.3
37	0.41150	18	0.17128	14	(1)3972.3	25.4
38	0.41168	19	0.17142	14	(1)3997.7	25.4
39	0.41187	19	0.17156	14	(1)4023.1	25.3
40	0.41206	19	0.17170	14	(1)4048.4	25.4
41	0.41225	18	0.17184	14	(1)4073.8	25.4
42	0.41243	19	0.17198	14	(1)4099.2	25.4
43	0.41262	19	0.17212	13	(1)4124.6	25.4
44	0.41281	19	0.17225	14	(1)4150.0	25.3
45	0.41300	19	0.17239	14	(1)4175.3	25.4
46	0.41319	18	0.17253	14	(1)4200.7	25.4
47	0.41337	19	0.17267	14	(1)4226.1	25.4
48	0.41356	19	0.17281	14	(1)4251.5	25.4
49	0.41375	19	0.17295	14	(1)4276.9	25.4
50	0.41394	19	0.17309	14	(1)4302.3	25.4
51	0.41413	18	0.17323	14	(1)4327.7	25.4
52	0.41431	19	0.17337	14	(1)4353.1	25.4
53	0.41450	19	0.17351	14	(1)4378.5	25.4
54	0.41469	19	0.17365	14	(1)4403.9	25.3
55	0.41488	19	0.17379	14	(1)4429.2	25.4
56	0.41507	19	0.17393	14	(1)4454.6	25.4
57	0.41526	19	0.17407	14	(1)5480.0	25.4
58	0.41545	18	0.17421	14	(1)4505.4	25.5
59	0.41563	19	0.17435	14	(1)4530.9	25.4
60	0.41582		0.17449		(1)4556.3	

$\omega = 48$ Grad.

ω ′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0,41582	19	0,17449	14	(1)4556,3	25,4
1	0,41601	19	0,17463	14	(1)4581,7	25,4
2	0,41620	19	0,17477	14	(1)4607,1	25,4
3	0,41639	19	0,17491	14	(1)4632,5	25,4
4	0,41658	19	0,17505	14	(1)4657,9	25,4
5	0,41677	19	0,17519	14	(1)4683,3	25,4
6	0,41696	19	0,17533	14	(1)4708,7	25,4
7	0,41715	18	0,17547	14	(1)4734,1	25,4
8	0,41733	19	0,17561	15	(1)4759,5	25,5
9	0,41752	19	0,17576	14	(1)4785,0	25,4
10	0,41771	19	0,17590	14	(1)4810,4	25,4
11	0,41790	19	0,17604	14	(1)4835,8	25,4
12	0,41809	19	0,17618	14	(1)4861,2	25,5
13	0,41828	19	0,17632	14	(1)4886,7	25,4
14	0,41847	19	0,17646	14	(1)4912,1	25,4
15	0,41866	19	0,17660	14	(1)4937,5	25,4
16	0,41885	19	0,17674	15	(1)4962,9	25,5
17	0,41904	19	0,17689	14	(1)4988,4	25,4
18	0,41923	19	0,17703	14	(1)5013,8	25,4
19	0,41942	19	0,17717	14	(1)5039,2	25,5
20	0,41961	19	0,17731	14	(1)5064,7	25,4
21	0,41980	19	0,17745	15	(1)5090,1	25,5
22	0,41999	19	0,17760	14	(1)5115,6	25,4
23	0,42018	19	0,17774	14	(1)5141,0	25,5
24	0,42037	19	0,17788	14	(1)5166,5	25,4
25	0,42056	19	0,17802	14	(1)5191,9	25,4
26	0,42075	19	0,17816	15	(1)5217,3	25,5
27	0,42094	19	0,17831	14	(1)5242,8	25,4
28	0,42113	19	0,17845	14	(1)5268,2	25,5
29	0,42132	19	0,17859	15	(1)5293,7	25,5
30	0,42151	19	0,17874	14	(1)5319,2	25,4
31	0,42170	20	0,17888	14	(1)5344,6	25,5
32	0,42190	19	0,17902	14	(1)5370,1	25,4
33	0,42209	19	0,17916	15	(1)5395,5	25,5
34	0,42228	19	0,17931	14	(1)5421,0	25,5
35	0,42247	19	0,17945	14	(1)5446,5	25,4
36	0,42266	19	0,17959	15	(1)5471,9	25,5
37	0,42285	19	0,17974	14	(1)5497,4	25,5
38	0,42304	19	0,17988	14	(1)5522,9	25,4
39	0,42323	19	0,18002	15	(1)5548,3	25,5
40	0,42342	20	0,18017	14	(1)5573,8	25,5
41	0,42362	19	0,18031	14	(1)5599,3	25,5
42	0,42381	19	0,18045	15	(1)5624,8	25,4
43	0,42400	19	0,18060	14	(1)5650,2	25,5
44	0,42419	19	0,18074	15	(1)5675,7	25,5
45	0,42438	19	0,18089	14	(1)5701,2	25,5
46	0,42457	19	0,18103	15	(1)5726,7	25,5
47	0,42476	20	0,18118	14	(1)5752,2	25,5
48	0,42496	19	0,18132	14	(1)5777,7	25,5
49	0,42515	19	0,18146	15	(1)5803,2	25,5
50	0,42534	19	0,18161	14	(1)5828,7	25,4
51	0,42553	19	0,18175	15	(1)5854,1	25,5
52	0,42572	20	0,18190	14	(1)5879,6	25,5
53	0,42592	19	0,18204	15	(1)5905,1	25,5
54	0,42611	19	0,18219	14	(1)5930,6	25,5
55	0,42630	19	0,18233	15	(1)5956,1	25,6
56	0,42649	19	0,18248	14	(1)5981,7	25,5
57	0,42668	20	0,18262	15	(1)6007,2	25,5
58	0,42688	19	0,18277	14	(1)6032,7	25,5
59	0,42707	19	0,18291	15	(1)6058,2	25,5
60	0,42726		0,18306		(1)6083,7	

$\omega = 49$ Grad.

ω ′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0,42726	19	0,18306	14	(1)6083,7	25,5
1	0,42745	20	0,18320	15	(1)6109,2	25,5
2	0,42765	19	0,18335	14	(1)6134,7	25,5
3	0,42784	19	0,18349	15	(1)6160,2	25,6
4	0,42803	20	0,18364	14	(1)6185,8	25,5
5	0,42823	19	0,18378	15	(1)6211,3	25,5
6	0,42842	19	0,18393	15	(1)6236,8	25,5
7	0,42861	19	0,18408	14	(1)6262,3	25,6
8	0,42880	20	0,18422	15	(1)6287,9	25,5
9	0,42900	19	0,18437	14	(1)6313,4	25,5
10	0,42919	19	0,18451	15	(1)6338,9	25,6
11	0,42938	20	0,18466	15	(1)6364,5	25,5
12	0,42958	19	0,18481	14	(1)6390,0	25,6
13	0,42977	19	0,18495	15	(1)6415,6	25,5
14	0,42996	20	0,18510	15	(1)6441,1	25,6
15	0,43016	19	0,18525	14	(1)6466,7	25,5
16	0,43035	20	0,18539	15	(1)6492,2	25,6
17	0,43055	19	0,18554	15	(1)6517,8	25,5
18	0,43074	19	0,18569	14	(1)6543,3	25,6
19	0,43093	20	0,18583	15	(1)6568,9	25,5
20	0,43113	19	0,18598	15	(1)6594,4	25,6
21	0,43132	19	0,18613	15	(1)6620,0	25,5
22	0,43151	20	0,18628	14	(1)6645,5	25,6
23	0,43171	19	0,18642	15	(1)6671,1	25,6
24	0,43190	20	0,18657	15	(1)6696,7	25,5
25	0,43210	19	0,18672	14	(1)6722,2	25,6
26	0,43229	20	0,18686	15	(1)6747,8	25,6
27	0,43249	19	0,18701	15	(1)6773,4	25,6
28	0,43268	19	0,18716	15	(1)6799,0	25,5
29	0,43287	20	0,18731	15	(1)6824,5	25,6
30	0,43307	19	0,18746	14	(1)6850,1	25,6
31	0,43326	20	0,18760	15	(1)6875,7	25,6
32	0,43346	19	0,18775	15	(1)6901,3	25,6
33	0,43365	20	0,18790	15	(1)6926,9	25,6
34	0,43385	19	0,18805	15	(1)6952,5	25,5
35	0,43404	20	0,18820	14	(1)6978,0	25,6
36	0,43424	19	0,18834	15	(1)7003,6	25,6
37	0,43443	20	0,18849	15	(1)7029,2	25,6
38	0,43463	19	0,18864	15	(1)7054,8	25,6
39	0,43482	20	0,18879	15	(1)7080,4	25,6
40	0,43502	19	0,18894	15	(1)7106,0	25,6
41	0,43521	20	0,18909	15	(1)7131,6	25,7
42	0,43541	19	0,18924	15	(1)7157,3	25,6
43	0,43560	20	0,18939	14	(1)7182,9	25,6
44	0,43580	19	0,18953	15	(1)7208,5	25,6
45	0,43599	20	0,18968	15	(1)7234,1	25,6
46	0,43619	19	0,18983	15	(1)7259,7	25,6
47	0,43638	20	0,18998	15	(1)7285,3	25,7
48	0,43658	20	0,19013	15	(1)7311,0	25,6
49	0,43678	19	0,19028	15	(1)7336,6	25,6
50	0,43697	20	0,19043	15	(1)7362,2	25,6
51	0,43717	19	0,19058	15	(1)7387,8	25,7
52	0,43736	20	0,19073	15	(1)7413,5	25,6
53	0,43756	20	0,19088	15	(1)7439,1	25,7
54	0,43776	19	0,19103	15	(1)7464,8	25,6
55	0,43795	20	0,19118	15	(1)7490,4	25,6
56	0,43815	19	0,19133	15	(1)7516,0	25,7
57	0,43834	20	0,19148	15	(1)7541,7	25,6
58	0,43854	20	0,19163	15	(1)7567,3	25,7
59	0,43874	19	0,19178	15	(1)7593,0	25,6
60	0,43893		0,19193		(1)7618,6	

$\omega = 50$ Grad.

ω ′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0.43893		0.19193		(1)7618.6	
1	0.43913	20	0.19208	15	(1)7644.3	25.7
2	0.43933	20	0.19223	15	(1)7670.0	25.7
3	0.43952	19	0.19238	15	(1)7695.6	25.6
4	0.43972	20	0.19254	16	(1)7721.3	25.7
5	0.43992	20	0.19269	15	(1)7747.0	25.7
6	0.44011	19	0.19284	15	(1)7772.6	25.6
7	0.44031	20	0.19299	15	(1)7798.3	25.7
8	0.44051	20	0.19314	15	(1)7824.0	25.7
9	0.44071	20	0.19329	15	(1)7849.7	25.7
10	0.44090	19	0.19344	15	(1)7875.3	25.6
11	0.44110	20	0.19359	15	(1)7901.0	25.7
12	0.44130	20	0.19375	16	(1)7926.7	25.7
13	0.44149	19	0.19390	15	(1)7952.4	25.7
14	0.44169	20	0.19405	15	(1)7978.1	25.7
15	0.44189	20	0.19420	15	(1)8003.8	25.7
16	0.44209	20	0.19435	15	(1)8029.5	25.7
17	0.44229	20	0.19450	15	(1)8055.2	25.7
18	0.44248	19	0.19466	16	(1)8080.9	25.7
19	0.44268	20	0.19481	15	(1)8106.6	25.7
20	0.44288	20	0.19496	15	(1)8132.3	25.7
21	0.44308	20	0.19511	15	(1)8158.0	25.7
22	0.44327	19	0.19527	16	(1)8183.7	25.7
23	0.44347	20	0.19542	15	(1)8209.4	25.7
24	0.44367	20	0.19557	15	(1)8235.2	25.8
25	0.44387	20	0.19572	15	(1)8260.9	25.7
26	0.44407	20	0.19588	16	(1)8286.6	25.7
27	0.44427	20	0.19603	15	(1)8312.3	25.7
28	0.44446	19	0.19618	15	(1)8338.1	25.8
29	0.44466	20	0.19634	16	(1)8363.8	25.7
30	0.44486	20	0.19649	15	(1)8389.6	25.8
31	0.44506	20	0.19664	15	(1)8415.3	25.7
32	0.44526	20	0.19680	16	(1)8441.0	25.7
33	0.44546	20	0.19695	15	(1)8466.8	25.8
34	0.44566	20	0.19710	15	(1)8492.5	25.7
35	0.44586	20	0.19726	16	(1)8518.3	25.8
36	0.44605	19	0.19741	15	(1)8544.0	25.7
37	0.44625	20	0.19756	15	(1)8569.8	25.8
38	0.44645	20	0.19772	16	(1)8595.6	25.8
39	0.44665	20	0.19787	15	(1)8621.3	25.7
40	0.44685	20	0.19803	16	(1)8647.1	25.8
41	0.44705	20	0.19818	15	(1)8672.9	25.8
42	0.44725	20	0.19834	16	(1)8698.6	25.7
43	0.44745	20	0.19849	15	(1)8724.4	25.8
44	0.44765	20	0.19864	15	(1)8750.2	25.8
45	0.44785	20	0.19880	16	(1)8776.0	25.8
46	0.44805	20	0.19895	15	(1)8801.8	25.8
47	0.44825	20	0.19911	16	(1)8827.5	25.7
48	0.44845	20	0.19926	15	(1)8853.3	25.8
49	0.44865	20	0.19942	16	(1)8879.1	25.8
50	0.44885	20	0.19957	15	(1)8904.9	25.8
51	0.44905	20	0.19973	16	(1)8930.7	25.8
52	0.44925	20	0.19988	15	(1)8956.5	25.8
53	0.41945	20	0.20004	16	(1)8582.3	25.8
54	0.44965	20	0.20019	15	(1)9008.2	25.9
55	0.44985	20	0.20035	16	(1)9034.0	25.8
56	0.45005	20	0.20050	15	(1)9059.8	25.8
57	0.45025	20	0.20066	16	(1)9085.6	25.8
58	0.45045	20	0.20082	16	(1)9111.4	25.8
59	0.45065	20	0.20097	15	(1)9137.2	25.8
60	0.45085	20	0.20113	16	(1)9163.1	25.9

$\omega = 51$ Grad.

ω ′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0.45085		0.20113		(1)9163.1	
1	0.45105	20	0.20128	15	(1)9188.9	25.8
2	0.45125	20	0.20144	16	(1)9214.7	25.8
3	0.45145	20	0.20160	16	(1)9240.6	25.9
4	0.45165	20	0.20175	15	(1)9266.4	25.8
5	0.45186	21	0.20191	16	(1)9292.3	25.9
6	0.45206	20	0.20207	16	(1)9318.1	25.8
7	0.45226	20	0.20222	15	(1)9344.0	25.9
8	0.45246	20	0.20238	16	(1)9369.8	25.8
9	0.45266	20	0.20254	16	(1)9395.7	25.9
10	0.45286	20	0.20269	15	(1)9421.5	25.8
11	0.45306	20	0.20285	16	(1)9447.4	25.9
12	0.45327	21	0.20301	16	(1)9473.3	25.9
13	0.45347	20	0.20316	15	(1)9499.2	25.9
14	0.45367	20	0.20332	16	(1)9525.0	25.8
15	0.45387	20	0.20348	16	(1)9550.9	25.9
16	0.45407	20	0.20364	16	(1)9576.8	25.9
17	0.45427	20	0.20379	15	(1)9602.7	25.9
18	0.45448	21	0.20395	16	(1)9628.6	25.9
19	0.45468	20	0.20411	16	(1)9654.4	25.8
20	0.45488	20	0.20427	16	(1)9680.3	25.9
21	0.45508	20	0.20442	15	(1)9706.2	25 9
22	0.45529	21	0.20458	16	(1)9732.1	25.9
23	0.45549	20	0.20174	16	(1)9758.0	25.9
24	0.45569	20	0.20490	16	(1)9784.0	26.0
25	0.45589	20	0.20506	16	(1)9809.9	25.9
26	0.45610	21	0.20522	16	(1)9835.8	25.9
27	0.45630	20	0.20537	15	(1)9861.7	25.9
28	0.45650	20	0.20553	16	(1)9887.6	25.9
29	0.45670	20	0.20569	16	(1)9913.6	26.0
30	0.45691	21	0.20585	16	(1)9939.5	25.9
31	0.45711	20	0.20601	16	(1)9965.4	25.9
32	0.45731	20	0.20617	16	(1)9991.3	25.9
33	0.45752	21	0.20633	16	0.10017	26
34	0.45772	20	0.20649	16	0.10043	26
35	0.45792	20	0.20665	16	0.10069	26
36	0.45813	21	0.20681	16	0.10095	26
37	0.45833	20	0.20696	15	0.10121	26
38	0.45853	20	0.20712	16	0.10147	26
39	0.45874	21	0.20728	16	0.10173	26
40	0.45894	20	0.20744	16	0.10199	26
41	0.45914	20	0.20760	16	0.10225	26
42	0.45935	21	0.20776	16	0.10251	26
43	0.45955	20	0.20792	16	0.10277	26
44	0.45975	20	0.20808	16	0.10303	26
45	0.45996	21	0.20824	16	0.10329	26
46	0.46016	20	0.20840	16	0.10355	26
47	0.46037	21	0.20856	16	0.10381	26
48	0.46057	20	0.20872	16	0.10407	26
49	0.46078	21	0.20889	17	0.10433	26
50	0.46098	20	0.20905	16	0.10459	26
51	0.46118	20	0.20921	16	0.10485	26
52	0.46139	21	0.20937	16	0.10511	26
53	0.46159	20	0.20953	16	0.10537	26
54	0.46180	21	0.20969	16	0.10563	26
55	0.43200	20	0.20985	16	0.10589	26
56	0.46221	21	0.21001	16	0.10615	26
57	0.46241	20	0.21017	16	0.10641	26
58	0.46262	21	0.21033	16	0.10667	26
59	0.46282	20	0.21050	17	0.10693	26
60	0.46303	21	0.21066	16	0.10719	26

$\omega = 52$ Grad.

ω ′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0.46303	20	0.21066	16	0.10719	26
1	0.46323	21	0.21082	16	0.10745	26
2	0.46344	20	0.21098	16	0.10771	26
3	0.46364	21	0.21114	17	0.10797	26
4	0.46385	21	0.21131	16	0.10823	26
5	0.46406	20	0.21147	16	0.10849	26
6	0.46426	21	0.21163	16	0.10875	26
7	0.46447	20	0.21179	16	0.10901	26
8	0.46467	21	0.21195	17	0.10927	27
9	0.46488	20	0.21212	16	0.10954	26
10	0.46508	21	0.21228	16	0.10980	26
11	0.46529	21	0.21244	17	0.11006	26
12	0.46550	20	0.21261	16	0.11032	26
13	0.46570	21	0.21277	16	0.11058	26
14	0.46591	20	0.21293	16	0.11084	26
15	0.46611	21	0.21309	17	0.11110	26
16	0.46632	21	0.21326	16	0.11136	26
17	0.46653	20	0.21342	16	0.11162	26
18	0.46673	21	0.21358	17	0.11188	26
19	0.46694	21	0.21375	16	0.11214	27
20	0.46715	20	0.21391	17	0.11241	26
21	0.46735	21	0.21408	16	0.11267	26
22	0.46756	21	0.21424	16	0.11293	26
23	0.46777	21	0.21440	17	0.11319	26
24	0.46798	20	0.21457	16	0.11345	26
25	0.46818	21	0.21473	17	0.11371	26
26	0.46839	21	0.21490	16	0.11397	26
27	0.46860	20	0.21506	16	0.11423	27
28	0.46880	21	0.21522	17	0.11450	26
29	0.46901	21	0.21539	16	0.11476	26
30	0.46922	21	0.21555	17	0.11502	26
31	0.46943	20	0.21572	16	0.11528	26
32	0.46963	21	0.21588	17	0.11554	26
33	0.46984	21	0.21605	16	0.11580	27
34	0.47005	21	0.21621	17	0.11607	26
35	0.47026	21	0.21638	16	0.11633	26
36	0.47047	20	0.21654	17	0.11659	26
37	0.47067	21	0.21671	16	0.11685	26
38	0.47088	21	0.21687	17	0.11711	27
39	0.47109	21	0.21704	16	0.11738	26
40	0.47130	21	0.21720	17	0.11764	26
41	0.47151	20	0.21737	17	0.11790	26
42	0.47171	21	0.21754	16	0.11816	26
43	0.47192	21	0.21770	17	0.11842	27
44	0.47213	21	0.21787	16	0.11869	26
45	0.47234	21	0.21803	17	0.11895	26
46	0.47255	21	0.21820	17	0.11921	26
47	0.47276	21	0.21837	16	0.11947	26
48	0.47297	21	0.21853	17	0.11973	27
49	0.47318	21	0.21870	17	0.12000	26
50	0.47339	20	0.21887	16	0.12026	26
51	0.47359	21	0.21903	17	0.12052	26
52	0.47380	21	0.21920	17	0.12078	27
53	0.47401	21	0.21937	16	0.12105	26
54	0.47422	21	0.21953	17	0.12131	26
55	0.47443	21	0.21970	17	0.12157	26
56	0.47464	21	0.21987	16	0.12183	27
57	0.47485	21	0.22003	17	0.12210	26
58	0.47506	21	0.22020	17	0.12236	26
59	0.47527	21	0.22037	17	0.12262	27
60	0.47548		0.22054		0.12289	

$\omega = 53$ Grad.

ω ′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0.47548	21	0.22054	16	0.12289	26
1	0.47569	21	0.22070	17	0.12315	26
2	0.47590	21	0.22087	17	0.12341	26
3	0.47611	21	0.22104	17	0.12367	27
4	0.47632	21	0.22121	17	0.12394	26
5	0.47653	21	0.22138	16	0.12420	26
6	0.47674	21	0.22154	17	0.12446	27
7	0.47695	21	0.22171	17	0.12473	26
8	0.47716	21	0.22188	17	0.12499	26
9	0.47737	21	0.22205	17	0.12525	27
10	0.47758	21	0.22222	17	0.12552	26
11	0.47769	21	0.22239	17	0.12578	26
12	0.47800	22	0.22256	16	0.12604	27
13	0.47822	21	0.22272	17	0.12631	26
14	0.47843	21	0.22289	17	0.12657	26
15	0.47864	21	0.22306	17	0.12683	27
16	0.47885	21	0.22323	17	0.12710	26
17	0.47906	21	0.22340	17	0.12736	26
18	0.47927	21	0.22357	17	0.12762	27
19	0.47948	21	0.22374	17	0.12789	26
20	0.47969	22	0.22391	17	0.12815	27
21	0.47991	21	0.22408	17	0.12842	26
22	0.48012	21	0.22425	17	0.12868	26
23	0.48033	21	0.22442	17	0.12894	27
24	0.48054	22	0.22459	17	0.12921	26
25	0.48076	21	0.22476	17	0.12947	26
26	0.48097	21	0.22493	17	0.12973	27
27	0.48118	21	0.22510	17	0.13000	26
28	0.48139	21	0.22527	17	0.13026	27
29	0.48160	21	0.22544	17	0.13053	26
30	0.48181	22	0.22561	17	0.13079	27
31	0.48203	21	0.22578	17	0.13106	26
32	0.48224	21	0.22595	18	0.13132	26
33	0.48245	21	0.22613	17	0.13158	27
34	0.48266	22	0.22630	17	0.13185	26
35	0.48288	21	0.22647	17	0.13211	27
36	0.48309	21	0.22664	17	0.13238	26
37	0.48330	22	0.22681	17	0.13264	27
38	0.48352	21	0.22698	17	0.13291	26
39	0.48373	21	0.22715	17	0.13317	27
40	0.48394	22	0.22732	18	0.13344	26
41	0.48416	21	0.22750	17	0.13370	27
42	0.48437	21	0.22767	17	0.13397	26
43	0.48458	22	0.22784	17	0.13423	26
44	0.48480	21	0.22801	18	0.13449	27
45	0.48501	21	0.22819	17	0.13476	26
46	0.48522	22	0.22836	17	0.13502	27
47	0.48544	21	0.22853	17	0.13529	26
48	0.48565	22	0.22870	18	0.13555	27
49	0.48587	21	0.22888	17	0.13582	26
50	0.48608	21	0.22905	17	0.13608	27
51	0.48629	22	0.22922	17	0.13635	27
52	0.48651	21	0.22939	18	0.13662	26
53	0.48672	22	0.22957	17	0.13688	27
54	0.48694	21	0.22974	17	0.13715	26
55	0.48715	21	0.22991	18	0.13741	27
56	0.48736	22	0.23009	17	0.13768	26
57	0.48758	21	0.23026	17	0.13794	27
58	0.48779	22	0.23043	18	0.13821	26
59	0.48801	21	0.23061	17	0.13847	27
60	0.48822		0.23078		0.13874	

ω = 54 Grad.

$\omega_{,}$	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0.48822		0.23078		0.13874	
1	0.48844	22	0.23096	18	0.13900	26
2	0.48865	21	0.23113	17	0.13927	27
3	0.48887	22	0.23130	17	0.13954	27
4	0.48908	21	0.23148	18	0.13980	26
5	0.48930	22	0.23165	17	0.14007	27
6	0.48952	22	0.23183	18	0.14033	26
7	0.48973	21	0.23200	17	0.14060	27
8	0.48995	22	0.23218	18	0.14087	27
9	0.49016	21	0.23235	17	0.14113	26
10	0.49038	22	0.23253	18	0.14140	27
11	0.49059	21	0.23270	17	0.14166	26
12	0.49081	22	0.23288	18	0.14193	27
13	0.49103	22	0.23305	17	0.14220	27
14	0.49124	21	0.23323	18	0.14246	26
15	0.49146	22	0.23340	17	0.14273	27
16	0.49167	21	0.23358	18	0.14300	27
17	0.49189	22	0.23375	17	0.14326	26
18	0.49211	22	0.23593	18	0.14353	27
19	0.49232	21	0.23410	17	0.14380	27
20	0.49254	22	0.23428	18	0.14406	26
21	0.49276	22	0.23446	18	0.14433	27
22	0.49297	21	0.23463	17	0.14460	27
23	0.49319	22	0.23481	18	0.14486	26
24	0.49341	22	0.23499	18	0.14513	27
25	0.49362	21	0.23516	17	0.14540	27
26	0.49384	22	0.23534	18	0.14566	26
27	0.49406	22	0.23552	18	0.14593	27
28	0.49428	22	0.23569	17	0.14620	27
29	0.49449	21	0.23587	18	0.14646	26
30	0.49471	22	0.23605	18	0.14673	27
31	0.49493	22	0.23622	17	0.14700	27
32	0.49515	22	0.23640	18	0.14727	27
33	0.49536	21	0.23658	18	0.14753	26
34	0.49558	22	0.23676	18	0.14780	27
35	0.49580	22	0.23693	17	0.14807	27
36	0.49602	22	0.23711	18	0.14834	27
37	0.49624	22	0.23729	18	0.14860	26
38	0.49645	21	0.23747	18	0.14887	27
39	0.49667	22	0.23764	17	0.14914	27
40	0.49689	22	0.23782	18	0.14941	27
41	0.49711	22	0.23800	18	0.14967	26
42	0.49733	22	0.23818	18	0.14994	27
43	0.49755	22	0.23836	18	0.15021	27
44	0.49777	22	0.23854	18	0.15048	27
45	0.49798	21	0.23871	17	0.15075	27
46	0.49820	22	0.23889	18	0.15101	26
47	0.49842	22	0.23907	18	0.15128	27
48	0.47864	22	0.23926	18	0.15155	27
49	0.49886	22	0.23943	18	0.15182	27
50	0.49908	22	0.23961	18	0.15209	27
51	0.49930	22	0.23979	18	0.15236	27
52	0.49952	22	0.23997	18	0.15262	26
53	0.49974	22	0.24015	18	0.15289	27
54	0.49996	22	0.24033	18	0.15316	27
55	0.50018	22	0.24051	18	0.15343	27
56	0.50040	22	0.24069	18	0.15370	27
57	0.50062	22	0.24087	18	0.15397	27
58	0.50084	22	0.24105	18	0.15424	27
59	0.50106	22	0.24123	18	0.15450	26
60	0.50128	22	0.24141	18	0.15477	27

ω = 55 Grad.

$\omega_{,}$	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0.50128		0.24141		0.15477	
1	0.50150	22	0.24159	18	0.15504	27
2	0.50172	22	0.24177	18	0.15531	27
3	0.50194	22	0.24195	18	0.15558	27
4	0.50216	22	0.24213	18	0.15585	27
5	0.50238	22	0.24231	18	0.15612	27
6	0.50260	22	0.24249	18	0.15639	27
7	0.50282	22	0.24267	18	0.15666	27
8	0.50304	22	0.24286	19	0.15693	27
9	0.50326	22	0.24304	18	0.15720	27
10	0.50348	22	0.24322	18	0.15746	26
11	0.50371	23	0.24340	18	0.15773	27
12	0.50393	22	0.24358	18	0.15800	27
13	0.50415	22	0.24376	18	0.15827	27
14	0.50437	22	0.24395	19	0.15854	27
15	0.50459	22	0.24413	18	0.15881	27
16	0.50481	22	0.24431	18	0.15908	27
17	0.50504	23	0.24449	18	0.15935	27
18	0.50526	22	0.24467	18	0.15962	27
19	0.50548	22	0.24486	19	0.15989	27
20	0.50570	22	0.24504	18	0.16016	27
21	0.50592	22	0.24522	18	0.16043	27
22	0.50615	23	0.24541	19	0.16070	27
23	0.50637	22	0.24559	18	0.16097	27
24	0.50659	22	0.24577	18	0.16124	27
25	0.50681	22	0.24595	18	0.16151	27
26	0.50704	23	0.24614	19	0.16178	27
27	0.50726	22	0.24632	18	0.16205	27
28	0.50748	22	0.24650	18	0.16232	27
29	0.50770	22	0.24669	19	0.16260	28
30	0.50793	23	0.24687	18	0.16287	27
31	0.50815	22	0.24706	19	0.16314	27
32	0.50837	22	0.24724	18	0.16341	27
33	0.50860	23	0.24742	18	0.16368	27
34	0.50882	22	0.24761	19	0.16395	27
35	0.50904	22	0.24779	18	0.16422	27
36	0.50927	23	0.24798	19	0.16449	27
37	0.50949	22	0.24816	18	0.16476	27
38	0.50971	22	0.24835	19	0.16503	27
39	0.50994	23	0.24853	18	0.16530	27
40	0.51016	22	0.24872	19	0.16558	28
41	0.51039	23	0.24890	18	0.16585	27
42	0.51061	22	0.24909	19	0.16612	27
43	0.51083	22	0.24927	18	0.16639	27
44	0.51106	23	0.24946	19	0.16666	27
45	0.51128	22	0.24964	18	0.16693	27
46	0.51151	23	0.24983	19	0.16720	27
47	0.51173	22	0.25001	18	0.16748	28
48	0.51196	23	0.25020	19	0.16775	27
49	0.51218	22	0.25039	19	0.16802	27
50	0.51241	23	0.25057	18	0.16829	27
51	0.51263	22	0.25076	19	0.16856	27
52	0.51286	23	0.25094	18	0.16883	27
53	0.51308	22	0.25113	19	0.16911	28
54	0.51331	23	0.25132	19	0.16938	27
55	0.51353	22	0.25150	18	0.16965	27
56	0.51376	23	0.25169	19	0.16992	27
57	0.51398	22	0.25188	19	0.17020	28
58	0.51421	23	0.25206	18	0.17047	27
59	0.51444	23	0.25225	19	0.17074	27
60	0.51466	22	0.25244	19	0.17101	27

ω = 56 Grad.

ω ′	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0,51466	23	0,25244	19	0,17101	28
1	0,51489	22	0,25263	18	0,17129	27
2	0,51511	23	0,25281	19	0,17156	27
3	0,51534	23	0,25300	19	0,17183	27
4	0,51557	22	0,25319	19	0,17210	28
5	0,51579	23	0,25338	18	0,17238	27
6	0,51602	22	0,25356	19	0,17265	27
7	0,51624	23	0,25375	19	0,17292	27
8	0,51647	23	0,25394	19	0,17319	28
9	0,51670	23	0,25413	19	0,17347	27
10	0,51693	22	0,25432	19	0,17374	27
11	0,51715	23	0,25451	18	0,17401	28
12	0,51738	23	0,25469	19	0,17429	27
13	0,51761	22	0,25488	19	0,17456	27
14	0,51783	23	0,25507	19	0,17483	28
15	0,51806	23	0,25526	19	0,17511	27
16	0,51829	23	0,25545	19	0,17538	27
17	0,51852	22	0,25564	19	0,17565	28
18	0,51874	23	0,25583	19	0,17593	27
19	0,51897	23	0,25602	19	0,17620	28
20	0,51920	23	0,25621	19	0,17648	27
21	0,51943	22	0,25640	19	0,17675	27
22	0,51965	23	0,25659	19	0,17702	28
23	0,51988	23	0,25678	19	0,17730	27
24	0,52011	23	0,25697	19	0,17757	28
25	0,52034	23	0,25716	19	0,17785	27
26	0,52057	23	0,25735	19	0,17812	27
27	0,52080	23	0,25754	19	0,17839	28
28	0,52103	22	0,25773	19	0,17867	27
29	0,52125	23	0,25792	19	0,17894	28
30	0,52148	23	0,25811	19	0,17922	27
31	0,52171	23	0,25830	19	0,17949	28
32	0,52194	23	0,25849	19	0,17977	27
33	0,52217	23	0,25868	19	0,18004	28
34	0,52240	23	0,25887	20	0,18032	27
35	0,52263	23	0,25907	19	0,18059	28
36	0,52286	23	0,25926	19	0,18087	27
37	0,52309	23	0,25945	19	0,18114	28
38	0,52332	23	0,25964	19	0,18142	27
39	0,52355	23	0,25983	20	0,18169	28
40	0,52378	23	0,26003	19	0,18197	27
41	0,52401	23	0,26022	19	0,18224	28
42	0,52424	23	0,26041	19	0,18252	27
43	0,52447	23	0,26060	19	0,18279	28
44	0,52470	23	0,23079	20	0,18307	27
45	0,52493	23	0,26099	19	0,18334	28
46	0,52516	23	0,26118	19	0,18362	27
47	0,52539	23	0,26137	20	0,18389	28
48	0,52562	23	0,26157	19	0,18417	27
49	0,52585	23	0,26176	19	0,18444	28
50	0,52608	23	0,26195	20	0,18472	28
51	0,52631	23	0,26215	19	0,18500	27
52	0,52654	23	0,26234	19	0,18527	28
53	0,52677	24	0,26253	20	0,18555	27
54	0,52701	23	0,26273	19	0,18582	28
55	0,52724	23	0,26292	19	0,18610	28
56	0,52747	23	0,26311	10	0,18638	27
57	0,52770	23	0,26331	19	0,18665	28
58	0,52793	23	0,26350	10	0,18693	28
59	0,52816	24	0,26370	19	0,18721	27
60	0,52840		0,26389		0,18748	

ω = 57 Grad.

ω ′	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0,52840	23	0,26389	20	0,18748	28
1	0,52863	23	0,26409	19	0,18776	28
2	0,52886	23	0,26428	20	0,18804	27
3	0,52909	23	0,26448	19	0,18831	28
4	0,52932	24	0,26467	20	0,18859	28
5	0,52956	23	0,26487	19	0,18887	27
6	0,52979	23	0,26506	20	0,18914	28
7	0,53002	23	0,26526	19	0,18942	28
8	0,53025	24	0,26545	20	0,18970	27
9	0,53049	23	0,26565	19	0,18997	28
10	0,53072	23	0,26584	20	0,19025	28
11	0,53095	24	0,26604	19	0,19053	28
12	0,53119	23	0,26623	20	0,19081	27
13	0,53142	23	0,26643	20	0,19108	28
14	0,53165	24	0,26663	19	0,19136	28
15	0,53189	23	0,26682	20	0,19164	28
16	0,53212	23	0,26702	20	0,19192	27
17	0,53235	24	0,26722	19	0,19219	28
18	0,53259	23	0,26741	20	0,19247	28
19	0,53282	24	0,26761	20	0,19275	28
20	0,53306	23	0,26781	19	0,19303	28
21	0,53329	23	0,26800	20	0,19331	27
22	0,53352	24	0,26820	20	0,19358	28
23	0,53376	23	0,26840	20	0,19386	28
24	0,53399	24	0,26860	19	0,19414	28
25	0,53423	23	0,26879	20	0,19442	28
26	0,53446	24	0,26899	20	0,19470	28
27	0,53470	23	0,26919	20	0,19498	28
28	0,53493	24	0,26939	20	0,19526	27
29	0,53517	23	0,26959	19	0,19553	28
30	0,53540	24	0,26978	20	0,19581	28
31	0,53564	23	0,26998	20	0,19609	28
32	0,53587	24	0,27018	20	0,19637	28
33	0,53611	23	0,27038	20	0,19665	28
34	0,53634	24	0,27058	20	0,19693	28
35	0,53658	23	0,27078	20	0,19721	28
36	0,53681	24	0,27098	19	0,19749	28
37	0,53705	24	0,27117	20	0,19777	28
38	0,53729	23	0,27137	20	0,19805	27
39	0,53752	24	0,27157	20	0,19832	28
40	0,53776	24	0,27177	20	0,19860	28
41	0,53800	23	0,27197	20	0,19888	28
42	0,53823	24	0,27217	20	0,19916	28
43	0,53847	23	0,27237	20	0,19944	28
44	0,53870	24	0,27257	20	0,19972	28
45	0,53894	24	0,27277	20	0,20000	28
46	0,53918	23	0,27297	20	0,20028	28
47	0,53941	24	0,27317	20	0,20056	28
48	0,53965	24	0,27337	20	0,20084	28
49	0,53989	24	0,27357	21	0,20112	28
50	0,54013	23	0,27378	20	0,20140	28
51	0,54036	24	0,27398	20	0,20168	28
52	0,54060	24	0,27418	20	0,20196	28
53	0,54084	24	0,27438	20	0,20224	29
54	0,54108	23	0,27458	20	0,20253	28
55	0,54131	24	0,27478	20	0,20281	28
56	0,54155	24	0,27498	20	0,20309	28
57	0,54179	24	0,27518	21	0,20337	28
58	0,54203	24	0,27539	20	0,20365	28
59	0,54227	23	0,27559	20	0,20393	28
60	0,54220		0,27579		0,20421	

$\omega = 58$ Grad.

ω ′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0,54250	24	0,27579	20	0,20421	28
1	0,54274	24	0,27599	20	0,20449	28
2	0,54298	24	0,27619	21	0,20477	28
3	0,54322	24	0,27640	20	0,20505	29
4	0,54346	24	0,27660	20	0,20534	28
5	0,54370	24	0,27680	21	0,20562	28
6	0,54394	24	0,27701	20	0,20590	28
7	0,54418	23	0,27721	20	0,20618	28
8	0,54441	24	0,27741	21	0,20646	28
9	0,54465	24	0,27762	20	0,20674	29
10	0,54489	24	0,27782	20	0,20703	28
11	0,54513	24	0,27802	21	0,20731	28
12	0,54537	24	0,27823	20	0,20759	28
13	0,54561	24	0,27843	20	0,20787	28
14	0,54585	24	0,27863	21	0,20815	29
15	0,54609	24	0,27884	20	0,20844	28
16	0,54633	24	0,27904	21	0,20872	28
17	0,54657	24	0,27925	20	0,20900	28
18	0,54681	24	0,27945	21	0,20928	29
19	0,54705	24	0,27966	20	0,20957	28
20	0,54729	24	0,27986	20	0,20985	28
21	0,54753	25	0,28006	21	0,24013	28
22	0,54778	24	0,28027	21	0,21041	29
23	0,54802	24	0,28048	20	0,21070	28
24	0,54826	24	0,28068	21	0,21098	28
25	0,54850	24	0,28089	20	0,21126	29
26	0,54874	24	0,28109	21	0,21155	28
27	0,54898	24	0,28130	20	0,21183	28
28	0,54922	24	0,28150	21	0,21211	29
29	0,54946	25	0,28171	20	0,21240	28
30	0,54971	24	0,28191	21	0,21268	28
31	0,54995	24	0,28212	21	0,21296	29
32	0,55019	24	0,28233	20	0,21325	28
33	0,55043	24	0,28253	21	0,21353	29
34	0,55067	25	0,28274	21	0,21382	28
35	0,55092	24	0,28295	20	0,21410	28
36	0,55116	24	0,28315	21	0,21438	29
37	0,55140	24	0,28336	21	0,21467	28
38	0,55164	25	0,28357	21	0,21495	29
39	0,55189	24	0,28378	20	0,21524	28
40	0,55213	24	0,28398	21	0,21552	29
41	0,55237	25	0,28419	21	0,21581	28
42	0,55262	24	0,28440	21	0,21609	28
43	0,55286	24	0,28461	20	0,21637	29
44	0,55310	25	0,28481	21	0,21666	28
45	0,55335	24	0,28502	21	0,21694	29
46	0,55359	24	0,28523	21	0,21723	28
47	0,55383	25	0,28544	21	0,21751	29
48	0,55408	24	0,28565	21	0,21780	28
49	0,55432	24	0,28586	21	0,21808	29
50	0,55456	25	0,28607	20	0,21837	28
51	0,55481	24	0,28627	21	0,21865	29
52	0,55505	25	0,28648	21	0,21894	29
53	0,55530	24	0,28669	21	0,21923	28
54	0,55554	25	0,28690	21	0,21951	29
55	0,55579	24	0,28711	21	0,21980	28
56	0,55603	25	0,28732	21	0,22008	29
57	0,55628	24	0,28753	21	0,22037	28
58	0,55652	25	0,28774	21	0,22065	29
59	0,55677	24	0,28795	21	0,22094	29
60	0,55701		0,28816		0,22123	

$\omega = 59$ Grad.

ω ′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0,55701	25	0,28816	21	0,22123	28
1	0,55726	24	0,28837	21	0,22151	29
2	0,55750	25	0,28858	21	0,22180	29
3	0,55775	24	0,28879	21	0,22209	28
4	0,55799	25	0,28900	21	0,22237	29
5	0,55824	25	0,28921	21	0,22266	28
6	0,55849	24	0,28942	22	0,22294	29
7	0,55873	25	0,28964	21	0,22323	29
8	0,55898	24	0,28985	21	0,22352	29
9	0,55922	25	0,29006	21	0,22381	28
10	0,55947	25	0,29027	21	0,22409	29
11	0,55972	24	0,29048	21	0,22438	29
12	0,55996	25	0,29069	22	0,22467	28
13	0,56021	25	0,29091	21	0,22495	29
14	0,56046	24	0,29112	21	0,22524	29
15	0,56070	25	0,29133	21	0,22553	29
16	0,56095	25	0,29154	22	0,22582	28
17	0,56120	25	0,29176	21	0,22610	29
18	0,56145	24	0,29197	21	0,22639	29
19	0,56169	25	0,29218	21	0,22668	29
20	0,56194	25	0,29239	22	0,22697	29
21	0,56219	25	0,29261	21	0,22726	28
22	0,56244	24	0,29282	21	0,22754	29
23	0,56268	25	0,29303	22	0,22783	29
24	0,56293	25	0,29325	21	0,22812	29
25	0,56318	25	0,29346	21	0,22841	29
26	0,56343	25	0,29367	22	0,22870	29
27	0,56368	25	0,29389	21	0,22899	28
28	0,56393	25	0,29410	22	0,22927	29
29	0,56418	24	0,29432	21	0,22956	29
30	0,56442	25	0,29453	22	0,22985	29
31	0,56467	25	0,29475	21	0,23014	29
32	0,56492	25	0,29496	22	0,23043	29
33	0,56517	25	0,29518	21	0,23072	29
34	0,56542	25	0,29539	22	0,23101	29
35	0,56567	25	0,29561	21	0,23130	29
36	0,56592	25	0,29582	22	0,23159	29
37	0,56617	25	0,29604	21	0,23188	29
38	0,56642	25	0,29625	22	0,23217	29
39	0,56667	25	0,29647	21	0,23246	29
40	0,56692	25	0,29668	22	0,23275	28
41	0,56717	25	0,29690	22	0,23303	29
42	0,56742	25	0,29712	21	0,23332	29
43	0,56767	25	0,29733	22	0,23361	30
44	0,56792	25	0,29755	21	0,23391	29
45	0,56817	25	0,29776	22	0,23420	29
46	0,56842	25	0,29798	22	0,23449	29
47	0,56867	25	0,29820	21	0,23478	29
48	0,56892	26	0,29841	22	9,23507	29
49	0,56918	25	0,29863	22	0,23536	29
50	0,56943	25	0,29885	22	0,23565	29
51	0,56968	25	0,29907	21	0,23594	29
52	0,56993	25	0,29928	22	0,23623	29
53	0,57018	25	0,29950	22	0,23652	29
54	0,57043	26	0,29972	22	0,23681	29
55	0,57069	25	0,29994	22	0,23710	29
56	0,57094	25	0,30016	21	0,23739	30
57	0,57119	25	0,30037	22	0,23769	29
58	0,57144	25	0,30059	22	0,23798	29
59	0,57169	26	0,30081	22	0,23827	29
60	0,57195		0,30103		0,23856	

$\omega = 60$ Grad.

ω ′	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0.57195	25	0.30103	22	0.23856	29
1	0.57220	25	0.30125	22	0.23885	29
2	0.57245	26	0.30147	22	0.23911	30
3	0.57271	25	0.30169	22	0.23944	29
4	0.57296	25	0.30191	22	0.23973	29
5	0.57321	26	0.30213	22	0.24002	29
6	0.57347	25	0.30235	22	0.24031	30
7	0.57372	25	0.30257	22	0.24061	29
8	0.57397	26	0.30279	22	0.24090	29
9	0.57423	25	0.30301	22	0.24119	29
10	0.57448	25	0.30323	22	0.24148	30
11	0.57473	26	0.30345	22	0.24178	29
12	0.57499	25	0.30367	22	0.24207	29
13	0.57524	26	0.30389	22	0.24236	29
14	0.57550	25	0.30411	22	0.24265	30
15	0.57575	26	0.30433	22	0.24295	29
16	0.57601	25	0.30455	22	0.25324	29
17	0.57626	26	0.30477	22	0.24353	30
18	0.57652	25	0.30499	22	0.24383	29
19	0.57677	26	0.30521	23	0.24412	30
20	0.57703	25	0.30544	22	0.24442	29
21	0.57728	26	0.30566	22	0.24471	29
22	0.57754	25	0.30588	22	0.24500	30
23	0.57779	26	0.30610	22	0.24530	29
24	0.57805	25	0.30632	23	0.24559	30
25	0.57830	26	0.30655	22	0.24589	29
26	0.57856	26	0.30677	22	0.24618	29
27	0.57882	25	0.30699	22	0.24647	30
28	0.57907	26	0.30721	23	0.24677	29
29	0.57933	26	0.30744	22	0.24706	30
30	0.57959	25	0.30766	22	0.24736	29
31	0.27984	26	0.30788	23	0.24765	30
32	0.58010	26	0.30811	22	0.24795	29
33	0.58036	25	0.30833	23	0.24824	30
34	0.58061	26	0.30856	22	0.24854	29
35	0.58087	26	0.30878	22	0.24883	30
36	0.58113	25	0.30900	23	0.24913	29
37	0.58138	26	0.30923	22	0.24942	30
38	0.58164	26	0.30945	23	0.24972	30
39	0.58190	26	0.30968	22	0.25002	29
40	0.58216	26	0.30990	23	0.25031	30
41	0.58242	25	0.31013	22	0.25061	29
42	0.58267	26	0.31035	23	0.25090	30
43	0.58293	26	0.31058	22	0.25120	29
44	0.58319	26	0.31080	23	0.25149	30
45	0.58345	26	0.31103	22	0.25179	30
46	0.58371	26	0.31125	23	0.25209	29
47	0.58397	25	0.31148	23	0.25238	30
48	0.58422	26	0.31171	22	0.25268	30
49	0.58448	26	0.31193	23	0.25298	29
50	0.58474	26	0.31216	22	0.25327	30
51	0.58500	26	0.31238	23	0.25357	30
52	0.58526	26	0.31261	23	0.25387	30
53	0.58552	26	0.31284	22	0.25417	29
54	0.58578	26	0.31306	23	0.25446	30
55	0.58604	26	0.31329	23	0.25476	30
56	0.58630	26	0.31352	23	0.25506	29
57	0.58656	26	0.31375	22	0.25535	30
58	0.58682	26	0.31397	23	0.25565	30
59	0.58708	26	0.31420	22	0.25595	30
60	0.58734		0.31443		0.25625	

$\omega = 61$ Grad.

ω ′	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0.58734	26	0.31443	23	0.25625	30
1	0.58760	26	0.31466	22	0.25655	29
2	0.58786	26	0.31488	23	0.25684	20
3	0.58812	27	0.31511	23	0.25714	30
4	0.58839	26	0.31534	23	0.25744	30
5	0.58865	26	0.31557	23	0.25774	30
6	0.58891	26	0.31580	23	0.25804	30
7	0.58917	26	0.31603	23	0.25834	29
8	0.58943	26	0.31626	23	0.25863	30
9	0.58969	26	0.31649	23	0.25893	30
10	0.58995	27	0.31672	23	0.25923	30
11	0.59022	26	0.31695	22	0.25953	30
12	0.59048	26	0.31717	23	0.25983	30
13	0.59074	26	0.31740	23	0.26013	30
14	0.59100	27	0.31763	24	0.26043	30
15	0.59127	26	0.31787	23	0.26073	30
16	0.59153	26	0.31810	23	0.26103	30
17	0.59179	26	0.31833	23	0.26133	30
18	0.59205	27	0.31856	23	0.26163	30
19	0.59232	26	0.31879	23	0.26193	30
20	0.59258	26	0.31902	23	0.26223	30
21	0.59284	27	0.31925	23	0.26253	30
22	0.59311	26	0.31948	23	0.26283	30
23	0.59337	27	0.31971	23	0.26313	30
24	0.59364	26	0.31994	24	0.26343	30
25	0.59390	26	0.32018	23	0.26373	30
26	0.59416	27	0.32041	23	0.26403	30
27	0.59443	26	0.32064	23	0.26433	30
28	0.59469	27	0.32087	23	0.26463	30
29	0.59496	26	0.32110	24	0.26493	31
30	0.59522	27	0.32134	23	0.26524	30
31	0.59549	26	0.32157	23	0.26554	30
32	0.59575	37	0.32180	24	0.26584	30
33	0.59602	26	0.32204	23	0.26614	30
34	0.59628	27	0.32227	23	0.26644	30
35	0.59655	26	0.32250	24	0.26674	31
36	0.59681	27	0.32274	23	0.26705	30
37	0.59708	26	0.32297	23	0.26735	30
38	0.59734	27	0.32320	24	0.26765	30
39	0.59761	27	0.32344	23	0.26795	30
40	0.59788	26	0.32367	24	0.26825	31
41	0.59814	27	0.32391	23	0.26856	30
42	0.59841	27	0.32414	24	0.26886	30
43	0.59868	26	0.32438	23	0.26916	30
44	0.59894	27	0.32461	24	0.26946	31
45	0.59921	27	0.32485	23	0.26977	30
46	0.59948	27	0.32508	24	0.27007	30
47	0.59975	26	0.32532	23	0.27037	31
48	0.60001	27	0.32555	24	0.27068	30
49	0.60028	27	0.32579	23	0.27098	30
50	0.60055	27	0.32602	24	0.27128	31
51	0.60082	26	0.32626	24	0.27159	30
52	0.60108	27	0.32650	23	0.27189	31
53	0.60135	27	0.32673	24	0.27220	30
54	0.60162	27	0.32697	23	0.27250	30
55	0.60189	26	0.32720	24	0.27280	31
56	0.60215	27	0.32744	24	0.27311	30
57	0.60242	27	0.32768	24	0.27341	31
58	0.60269	27	0.32792	23	0.27372	30
59	0.60296	27	0.32815	24	0.27402	31
60	0.60323		0.32839		0.27433	

$\omega = 62$ Grad.

ω'	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0,60323	27	0,32839	24	0,27443	30
1	0,60350	27	0,32863	24	0,27463	31
2	0,60377	27	0,32887	23	0,27494	30
3	0,60404	27	0,32910	24	0,27524	31
4	0,60431	27	0,32934	24	0,27555	30
5	0,60458	27	0,32958	24	0,27585	31
6	0,60485	27	0,32982	24	0,27616	30
7	0,60512	27	0,33006	24	0,27646	31
8	0,60539	27	0,33030	24	0,27677	30
9	0,60566	27	0,33054	24	0,27707	31
10	0,60593	27	0,33078	23	0,27738	31
11	0,60620	27	0,33101	24	0,27769	30
12	0,60647	27	0,33125	24	0,27799	31
13	0,60674	27	0,33149	24	0,27830	30
14	0,60701	27	0,33173	24	0,27860	31
15	0,60728	27	0,33197	24	0,27891	31
16	0,60755	27	0,33221	24	0,27922	30
17	0,60782	28	0,33245	24	0,27952	31
18	0,60810	27	0,33269	25	0,27983	31
19	0,60837	27	0,33294	24	0,28014	31
20	0,60864	27	0,33318	24	0,28045	30
21	0,60891	27	0,33342	24	0,28075	31
22	0,60918	28	0,33366	24	0,28106	31
23	0,60946	27	0,33390	24	0,28137	30
24	0,60973	27	0,33414	24	0,28167	31
25	0,61000	28	0,33438	25	0,28198	31
26	0,61028	27	0,33463	24	0,28229	31
27	0,61055	27	0,33487	24	0,28260	31
28	0,61082	28	0,33511	24	0,28291	30
29	0,61110	27	0,33535	24	0,28321	31
30	0,61137	27	0,33559	25	0,28352	31
31	0,61164	28	0,33584	24	0,28383	31
32	0,61192	27	0,33608	24	0,28414	31
33	0,61219	27	0,33632	25	0,28445	31
34	0,61246	28	0,33657	24	0,28476	31
35	0,61274	27	0,33681	24	0,28507	31
36	0,61301	28	0,33705	25	0,28538	31
37	0,61329	27	0,33730	24	0,28569	30
38	0,61356	28	0,33754	25	0,28599	31
39	0,61384	27	0,33779	24	0,28630	31
40	0,61411	28	0,33803	24	0,28661	31
41	0,61439	27	0,33827	25	0,28692	31
42	0,61466	28	0,33852	24	0,28723	31
43	0,61494	27	0,33876	25	0,28754	31
44	0,61521	28	0,33901	24	0,28785	31
45	0,61549	28	0,33925	25	0,28816	31
46	0,61577	27	0,33950	25	0,28847	32
47	0,61604	28	0,33975	24	0,28879	31
48	0,61632	27	0,33999	25	0,28910	31
49	0,61659	28	0,34024	24	0,28941	31
50	0,61687	28	0,34048	25	0,28972	31
51	0,61715	28	0,34073	25	0,29003	31
52	0,61743	27	0,34098	24	0,29034	31
53	0,61770	28	0,34122	25	0,29065	31
54	0,61798	28	0,34147	25	0,29096	31
55	0,61826	27	0,34172	24	0,29127	32
56	0,61853	28	0,34196	25	0,29159	31
57	0,61881	28	0,34221	25	0,29190	31
58	0,61909	28	0,34246	25	0,29221	31
59	0,61937	28	0,34271	24	0,29252	31
60	0,61965		0,34295		0,29283	

$\omega = 63$ Grad.

ω'	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0,61965	27	0,34295	25	0,29283	32
1	0,61992	28	0,34320	25	0,29315	31
2	0,62020	28	0,34345	25	0,29346	31
3	0,62048	28	0,34370	25	0,29377	31
4	0,62076	28	0,34395	25	0,29408	32
5	0,62104	28	0,34420	24	0,29440	31
6	0,62132	28	0,34444	25	0,29471	31
7	0,62160	28	0,34469	25	0,29502	32
8	0,62188	28	0,34494	25	0,29534	31
9	0,62216	28	0,34519	25	0,29565	31
10	0,62244	28	0,34544	25	0,29596	32
11	0,62272	28	0,34569	25	0,29628	31
12	0,62300	28	0,34594	25	0,29659	32
13	0,62328	28	0,34619	25	0,29691	31
14	0,62356	28	0,34644	25	0,29722	31
15	0,62384	28	0,34669	25	0,29753	31
16	0,62412	28	0,34694	25	0,29785	31
17	0,62440	28	0,34719	26	0,29816	32
18	0,62468	28	0,34745	25	0,29848	31
19	0,62496	28	0,34770	25	0,29879	32
20	0,62524	29	0,34795	25	0,29911	31
21	0,62553	28	0,34820	25	0,29942	32
22	0,62581	28	0,34845	25	0,29974	31
23	0,62609	28	0,34870	26	0,30005	32
24	0,62637	28	0,34896	25	0,30037	31
25	0,62665	29	0,34921	25	0,30068	32
26	0,62694	28	0,34946	25	0,30100	32
27	0,62722	28	0,34971	26	0,30132	31
28	0,62750	28	0,34997	25	0,30163	32
29	0,62778	29	0,35022	25	0,30195	31
30	0,62807	28	0,35047	26	0,30226	32
31	0,62835	28	0,35073	25	0,30258	32
32	0,62863	29	0,35098	25	0,30290	31
33	0,62892	28	0,35123	26	0,30321	31
34	0,62920	28	0,35149	25	0,30353	32
35	0,62948	29	0,35174	26	0,30385	31
36	0,62977	28	0,35200	25	0,30416	32
37	0,63005	29	0,35225	26	0,30448	32
38	0,63034	28	0,35251	25	0,30480	32
39	0,63062	29	0,35276	26	0,30512	31
40	0,63091	28	0,35302	25	0,30543	32
41	0,63119	29	0,35327	26	0,30575	32
42	0,63148	28	0,35353	25	0,30607	32
43	0,63176	29	0,35378	26	0,30639	32
44	0,63205	28	0,35404	25	0,30671	31
45	0,63233	29	0,35429	26	0,30702	32
46	0,63262	28	0,35455	26	0,30734	32
47	0,63290	29	0,35481	25	0,30766	32
48	0,63319	29	0,35506	26	0,30798	32
49	0,63348	28	0,35532	26	0,30830	32
50	0,63376	29	0,35558	25	0,30862	32
51	0,63405	29	0,35583	26	0,30894	32
52	0,63434	28	0,35609	26	0,30926	32
53	0,63462	29	0,35635	26	0,30958	32
54	0,63491	29	0,35661	26	0,30990	32
55	0,63520	28	0,35687	25	0,31022	32
56	0,63548	29	0,35712	26	0,31054	32
57	0,63577	29	0,35738	26	0,31086	32
58	0,63606	29	0,35764	26	0,31118	32
59	0,63635	29	0,35790	26	0,31150	32
60	0,63664		0,35816		0,31182	

$\omega = 64$ Grad.

ω'	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0,63661	28	0,35816	26	0,31182	32
1	0,63692	29	0,35842	26	0,31214	32
2	0,63721	29	0,35868	26	0,31246	32
3	0,63750	29	0,35894	26	0,31278	32
4	0,63779	29	0,35920	26	0,31310	32
5	0,63808	29	0,35946	26	0,31342	32
6	0,63837	29	0,35972	26	0,31374	33
7	0,63866	29	0,35998	26	0,31407	32
8	0,63895	29	0,36024	26	0,31439	32
9	0,63924	29	0,36050	26	0,31471	32
10	0,63953	29	0,36076	26	0,31503	32
11	0,63982	29	0,36102	26	0,31535	33
12	0,64011	29	0,36128	26	0,31568	32
13	0,64040	29	0,36154	26	0,31600	32
14	0,64069	29	0,36180	26	0,31632	32
15	0,64098	29	0,36206	27	0,31664	33
16	0,64127	29	0,36233	26	0,31697	32
17	0,64156	29	0,36259	26	0,31729	32
18	0,64185	29	0,36285	26	0,31761	33
19	0,64214	29	0,36311	27	0,31794	32
20	0,64243	30	0,36338	26	0,31826	32
21	0,64273	29	0,36364	26	0,31858	33
22	0,64302	29	0,36390	27	0,31891	32
23	0,64331	29	0,36417	26	0,31923	33
24	0,64360	29	0,36443	26	0,31956	32
25	0,64389	30	0,36469	27	0,31988	32
26	0,64119	29	0,36495	27	0,32020	33
27	0,64448	29	0,36522	27	0,32053	32
28	0,64477	30	0,36549	26	0,32085	32
29	0,64507	29	0,36575	27	0,32118	32
30	0,64536	29	0,36602	26	0,32150	33
31	0,64565	30	0,36628	27	0,32183	32
32	0,64595	29	0,36655	26	0,32215	33
33	0,64624	29	0,36681	27	0,32248	33
34	0,64653	30	0,36708	26	0,32281	32
35	0,64683	29	0,36734	27	0,32313	33
36	0,64712	30	0,36761	26	0,32346	32
37	0,64742	29	0,36787	27	0,32378	33
38	0,64771	30	0,36814	27	0,32411	33
39	0,64801	29	0,36841	26	0,32444	32
40	0,64830	30	0,36867	27	0,32476	33
41	0,64860	29	0,36894	27	0,32509	33
42	0,64889	30	0,36921	27	0,32542	32
43	0,64919	30	0,36948	26	0,32574	33
44	0,64949	29	0,36974	27	0,32607	33
45	0,64978	30	0,37001	27	0,32640	33
46	0,65008	29	0,37028	27	0,32673	32
47	0,65037	30	0,37055	27	0,32705	33
48	0,65067	30	0,37082	26	0,32738	33
49	0,65097	29	0,37108	27	0,32771	33
50	0,65126	30	0,37135	27	0,32804	33
51	0,65156	30	0,37162	27	0,32837	32
52	0,65186	30	0,37189	27	0,32869	33
53	0,65216	29	0,37216	27	0,32902	33
54	0,65245	30	0,37243	27	0,32935	33
55	0,65275	30	0,37270	27	0,32968	33
56	0,65305	30	0,37297	27	0,33001	33
57	0,65335	30	0,37324	27	0,33034	33
58	0,65365	30	0,37351	27	0,33067	33
59	0,65395	29	0,37378	27	0,33100	33
60	0,65424		0,37405		0,33133	

$\omega = 65$ Grad.

ω'	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0,65424	30	0,37405	27	0,33133	33
1	0,65454	30	0,37432	27	0,33166	33
2	0,65484	30	0,37459	28	0,33199	33
3	0,65514	30	0,37487	27	0,33232	33
4	0,65544	30	0,37514	27	0,33265	33
5	0,65574	30	0,37541	27	0,33298	33
6	0,65604	30	0,37568	27	0,33331	33
7	0,65634	30	0,37595	28	0,33364	33
8	0,65664	30	0,37623	27	0,33397	33
9	0,65694	30	0,37650	27	0,33430	33
10	0,65724	30	0,37677	27	0,33463	34
11	0,65754	31	0,37704	28	0,33497	33
12	0,65785	30	0,37732	27	0,33530	33
13	0,65815	30	0,37759	27	0,33563	33
44	0,65845	30	0,37786	28	0,33596	33
15	0,65875	30	0,37814	27	0,33629	34
16	0,65905	30	0,37841	28	0,33663	33
17	0,65935	31	0,37869	27	0,33696	33
18	0,65966	30	0,37896	28	0,33729	33
19	0,65996	30	0,37924	27	0,33762	34
20	0,66026	30	0,37951	28	0,33796	33
21	0,66056	30	0,37979	27	0,33829	33
22	0,66087	30	0,38006	28	0,33862	34
23	0,66117	30	0,38034	27	0,33896	33
24	0,66147	31	0,38061	28	0,33929	33
25	0,66178	30	0,38089	28	0,33962	34
26	0,66208	30	0,38117	27	0,33996	33
27	0,66238	31	0,38144	28	0,34029	34
28	0,66269	30	0,38172	28	0,34063	33
29	0,66299	31	0,38200	27	0,34096	34
30	0,66330	30	0,38227	28	0,34130	33
31	0,66360	31	0,38255	28	0,34163	34
32	0,66391	30	0,38283	28	0,34197	33
33	0,66421	31	0,38311	27	0,34230	34
34	0,66452	30	0,38338	28	0,34264	33
35	0,66482	31	0,38366	28	0,34297	34
36	0,66513	20	0,38394	28	0,34331	33
37	0,66543	31	0,38422	28	0,34364	34
38	0,66574	31	0,38450	28	0,34398	34
39	0,66605	30	0,38478	28	0,34432	33
40	0,66635	31	0,38506	28	0,34465	34
41	0,66666	31	0,38534	28	0,34499	34
42	0,66697	30	0,38562	27	0,34533	33
43	0,66727	31	0,38589	29	0,34566	34
44	0,66758	31	0,38618	28	0,34600	34
45	0,66789	31	0,38646	28	0,34634	33
46	0,66820	30	0,38674	28	0,34667	34
47	0,66850	31	0,38702	28	0,34701	34
48	0,66881	31	0,38730	28	0,34735	34
49	0,66912	31	0,38758	28	0,34769	34
50	0,66943	31	0,38786	28	0,34803	33
51	0,66974	31	0,38814	28	0,34836	34
52	0,67005	31	0,38842	29	0,34870	34
53	0,67036	31	0,38871	28	0,34904	34
54	0,67067	31	0,38899	28	0,34938	34
55	0,67098	30	0,38927	28	0,34972	34
56	0,67128	31	0,38955	29	0,35006	34
57	0,67159	31	0,38984	28	0,35040	34
58	0,67190	31	0,39012	28	0,35074	34
59	0,67221	32	0,39040	29	0,35108	34
60	0,67253		0,39069		0,35142	

ω = 66 Grad.

ω ′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0,67253	31	0,39069	28	0,35142	34
1	0,67284	31	0,39097	28	0,35176	34
2	0,67315	31	0,39125	29	0,35210	34
3	0,67346	31	0,39154	28	0,35244	34
4	0,67377	31	0,39182	29	0,35278	34
5	0,67408	31	0,39211	28	0,35312	34
6	0,67439	31	0,39239	29	0,35346	34
7	0,67470	32	0,39268	28	0,35380	34
8	0,67502	31	0,39296	29	0,35414	34
9	0,67533	31	0,39325	29	0,35448	35
10	0,67564	31	0,39354	28	0,35483	34
11	0,67595	32	0,39382	29	0,35517	34
12	0,67627	31	0,39411	28	0,35551	34
13	0,67658	31	0,39439	29	0,35585	34
14	0,67689	32	0,39468	29	0,35619	35
15	0,67721	31	0,39497	29	0,35654	34
16	0,67752	32	0,39526	28	0,35688	34
17	0,67784	31	0,39554	29	0,35722	35
18	0,67815	31	0,39583	29	0,35757	34
19	0,67846	32	0,39612	29	0,35791	34
20	0,67878	31	0,39641	28	0,35825	35
21	0,67909	32	0,39669	29	0,35860	34
22	0,67941	31	0,39698	29	0,35894	34
23	0,67972	32	0,39727	29	0,35928	35
24	0,68004	31	0,39756	29	0,35963	34
25	0,68035	32	0,39785	29	0,35997	35
26	0,68067	32	0,39814	29	0,36032	34
27	0,68099	31	0,39843	29	0,36066	35
28	0,68130	32	0,39872	29	0,36101	34
29	0,68162	32	0,39901	29	0,36135	35
30	0,68194	31	0,39930	29	0,36170	34
31	0,68225	32	0,39959	29	0,36204	35
32	0,68257	32	0,39988	29	0,36239	35
33	0,68289	32	0,40017	29	0,36274	34
34	0,68321	31	0,40046	30	0,36308	35
35	0,68352	32	0,40076	29	0,36343	34
36	0,68384	32	0,40105	29	0,36377	35
37	0,68416	32	0,40134	29	0,36412	35
38	0,6-448	32	0,40163	29	0,36447	34
39	0,68480	31	0,40192	30	0,36481	35
40	0,68511	32	0,40222	29	0,36516	35
41	0,6-543	32	0,40251	29	0,36551	35
42	0,68575	32	0,40280	30	0,36586	35
43	0,68607	32	0,40310	29	0,36621	34
44	0,68639	32	0,49339	29	0,36655	35
45	0,68671	32	0,49368	30	0,36690	35
46	0,68703	32	0,40398	29	0,36725	35
47	0,68735	32	0,40427	30	0,36760	35
48	0,68767	32	0,40457	29	0,36795	35
49	0,68799	33	0,40486	30	0,36830	35
50	0,68832	32	0,40516	29	0,36865	34
51	0,68864	32	0,40545	30	0,36899	35
52	0,68896	32	0,40575	29	0,36934	35
53	0,68928	32	0,40604	30	0,36969	35
54	0,68960	32	0,40634	30	0,37004	35
55	0,68992	33	0,40664	29	0,37039	35
56	0,69025	32	0,40693	30	0,37074	36
57	0,69057	32	0,40723	30	0,37110	35
58	0,69089	32	0,40753	29	0,37145	35
59	0,69121	33	0,40782	30	0,37180	35
60	0,69154		0,40812		0,37215	

ω = 67 Grad.

ω ′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0,69154	32	0,40812	30	0,37215	35
1	0,69186	32	0,40842	30	0,37250	35
2	0,69218	33	0,40872	30	0,37285	35
3	0,69251	32	0,40902	29	0,37320	35
4	0,69283	33	0,40931	30	0,37355	36
5	0,69316	32	0,40961	30	0,37391	35
6	0,69348	33	0,40991	30	0,37426	35
7	0,69381	32	0,41021	30	0,37461	35
8	0,69413	33	0,41051	30	0,37496	36
9	0,69446	32	0,41081	30	0 37532	35
10	0,69478	33	0,41111	30	0,37567	35
11	0,69511	32	0,41141	30	0,37602	36
12	0,69543	33	0,41171	30	0,37638	35
13	0,69576	33	0,41201	30	0,37673	35
14	0,69609	32	0,41231	30	0,37708	36
15	0,69641	33	0,41261	30	0,37744	35
16	0,69674	33	0,41291	31	0,37779	36
17	0,69707	32	0,41322	30	0,37815	35
18	0,69739	33	0,41352	30	0,37850	36
19	0,69772	33	0,41382	30	0,37886	35
20	0,69805	33	0,41412	31	0,37921	36
21	0,69838	32	0,41443	30	0,37957	35
22	0,69870	33	0,41473	30	0,37992	36
23	0,69903	33	0,41503	30	0,38028	36
24	0,69936	33	0,41533	31	0,38064	35
25	0,69969	33	0,41564	30	0,38099	36
26	0,70002	33	0,41594	31	0,38135	35
27	0,70035	33	0,41625	30	0,38170	36
28	0,70068	33	0,41655	31	0,38206	36
29	0,70101	33	0,41686	30	0,38242	36
30	0,70134	33	0,41716	31	0,38278	35
31	0,70167	33	0,41747	30	0,38313	36
32	0,70200	33	0,41777	31	0,38349	36
33	0,70233	33	0,41808	30	0,38385	36
34	0,70266	33	0,41838	31	0,38421	35
35	0,70299	33	0,41869	30	0,38456	36
36	0,70332	33	0,41899	31	0,38492	36
37	0,70365	34	0,41930	31	0,38528	36
38	0,70399	33	0,41961	31	0,38564	36
39	0,70432	33	0,41992	30	0,38600	36
40	0,70465	33	0,42022	31	0,38636	36
41	0,70498	34	0,42053	31	0,38672	36
42	0,70532	33	0,42084	31	0,38708	36
43	0,70565	33	0,42115	30	0,38744	36
44	0,70598	34	0,42145	31	0,38780	36
45	0,70632	33	0,42176	31	0,38816	36
46	0,70665	33	0,42207	31	0,38852	36
47	0,70698	34	0,42238	31	0,38888	36
48	0,70732	33	0,42269	31	0,38924	36
49	0,70765	34	0,42300	31	0,38960	36
50	0,70799	33	0,42331	31	0,38996	37
51	0,70832	34	0,42362	31	0,39033	36
52	0,70866	33	0,42393	31	0,39069	36
53	0,70899	34	0,42424	31	0 39105	36
54	0,70933	33	0,42455	31	0,39141	36
55	0,70966	34	0,42486	32	0,39177	37
56	0,71000	34	0,42518	31	0,39214	36
57	0,71034	33	0,42549	31	0,39250	36
58	0,71067	34	0,42580	31	0,39286	37
59	0,71101	34	0,42611	31	0,39323	36
60	0,71135		0,42642		0,39359	

$\omega = 68$ Grad.

ω'	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0,71135	34	0,42642	32	0,39359	36
1	0,71169	33	0,42674	31	0,39395	27
2	0,71202	34	0,42705	31	0,39432	36
3	0,71236	34	0,42736	32	0,39468	37
4	0,71270	34	0,42768	31	0,39505	36
5	0,71304	34	0,42799	32	0,39541	37
6	0,71338	33	0,42831	31	0,39578	36
7	0,71371	33	0,42862	31	0,39614	37
8	0,71405	34	0,42893	32	0,39651	36
9	0,71439	34	0,42925	31	0,39687	37
10	0,71473	34	0,42956	32	0,39724	36
11	0,71507	34	0,42988	32	0,39760	37
12	0,71541	34	0,43020	31	0,39797	37
13	0,71575	34	0,43051	32	0,39834	36
14	0,71609	34	0,43083	31	0,39870	37
15	0,71643	34	0,43114	32	0,39907	37
16	0,71677	35	0,43146	32	0,39944	37
17	0,71712	34	0,43178	32	0,39981	36
18	0,71746	34	0,43210	31	0,40017	37
19	0,71780	34	0,43241	32	0,40054	37
20	0,71814	34	0,43273	32	0,40091	37
21	0,71848	35	0,43305	32	0,40128	37
22	0,71883	34	0,43337	32	0,40165	36
23	0,71917	34	0,43369	32	0,40201	37
24	0,71951	35	0,43401	31	0,40238	37
25	0,71986	34	0,43432	32	0,40275	37
26	0,72020	34	0,43464	32	0,40312	37
27	0,72054	35	0,43496	32	0,40349	37
28	0,72089	34	0,43528	32	0,40386	37
29	0,72123	35	0,43560	32	0,40423	37
30	0,72158	34	0,43592	33	0,40460	37
31	0,72192	35	0,43625	32	0,40497	37
32	0,72227	34	0,43657	32	0,40534	37
33	0,72261	35	0,43689	32	0,40571	38
34	0,72296	34	0,43721	32	0,40609	37
35	0,72330	35	0,43753	32	0,40646	37
36	0,72365	34	0,43785	33	0,40683	37
37	0,72399	35	0,43818	32	0,40720	37
38	0,72434	35	0,43850	32	0,40757	38
39	0,72469	35	0,43882	33	0,40795	37
40	0,72504	34	0,43915	32	0,40832	37
41	0,72538	35	0,43947	32	0,40869	37
42	0,72573	35	0,43979	33	0,40906	38
43	0,72608	35	0,44012	32	0,40944	37
44	0,72643	35	0,44044	33	0,40981	38
45	0,72678	34	0,44077	32	0,41019	37
46	0,72712	35	0,44109	33	0,41056	37
47	0,72747	35	0,44142	32	0,41093	38
48	0,72782	35	0,44174	33	0,41131	37
49	0,72817	35	0,44207	32	0,41168	38
50	0,72852	35	0,44239	33	0,41206	37
51	0,72887	35	0,44272	33	0,41243	38
52	0,72922	35	0,44305	32	0,41281	38
53	0,72957	35	0,44337	33	0,41319	37
54	0,72992	35	0,44370	33	0,41356	38
55	0,73027	36	0,44403	33	0,41394	37
56	0,73063	35	0,44436	32	0,41431	38
57	0,73098	35	0,44468	33	0,41469	38
58	0,73133	35	0,44501	33	0,41507	38
59	0,73168	35	0,44534	33	0,41545	37
60	0,73203		0,44567		0,41582	

$\omega = 69$ Grad.

ω'	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0,73203	36	0,44567	33	0,41582	38
1	0,73239	35	0,44600	33	0,41620	38
2	0,73274	35	0,44633	33	0,41658	38
3	0,73309	36	0,44666	33	0,41696	37
4	0,73345	35	0,44699	33	0,41733	38
5	0,73380	35	0,44732	33	0,41771	38
6	0,73415	36	0,44765	33	0,41809	38
7	0,73451	35	0,44798	33	0,41847	38
8	0,73486	36	0,44831	33	0,41885	38
9	0,73522	35	0,44864	34	0,41923	38
10	0,73557	36	0,44898	33	0,41961	38
11	0,73593	35	0,44931	33	0,41999	38
12	0,73628	36	0,44964	33	0,42037	38
13	0,73664	35	0,44997	34	0,42075	38
14	0,73699	36	0,45031	33	0,42113	38
15	0,73735	36	0,45064	33	0,42151	39
16	0,73771	35	0,45097	34	0,42190	38
17	0,73806	36	0,45131	33	0,42228	38
18	0,73842	36	0,45164	34	0,42266	38
19	0,73878	36	0,45198	33	0,42304	38
20	0,73914	36	0,45231	34	0,42342	39
21	0,73950	35	0,45265	33	0,42381	38
22	0,73985	36	0,45298	34	0,42419	38
23	0,74021	36	0,45332	33	0,42457	39
24	0,74057	36	0,45365	34	0,42496	38
25	0,74093	36	0,45399	34	0,42534	38
26	0,74129	36	0,45433	33	0,42572	39
27	0,74165	36	0,45466	34	0,42611	38
28	0,74201	36	0,45500	34	0,42649	39
29	0,74237	36	0,45534	33	0,42688	38
30	0,74273	36	0,45567	34	0,42726	39
31	0,74309	36	0,45601	34	0,42765	38
32	0,74345	36	0,45635	34	0,42803	39
33	0,74381	37	0,45669	34	0,42842	38
34	0,74418	36	0,45703	34	0,42880	39
35	0,74454	36	0,45737	34	0,42919	39
36	0,74490	36	0,45771	34	0,42958	38
37	0,74526	37	0,45805	34	0,42996	39
38	0,74563	36	0,45839	34	0,43035	39
39	0,74599	36	0,45873	34	0,43074	39
40	0,74635	37	0,45907	34	0,43113	38
41	0,74672	36	0,45941	34	0,43151	39
42	0,74708	36	0,45975	34	0,43190	39
43	0,74744	37	0,46009	34	0,43229	39
44	0,74781	36	0,46043	35	0,43268	39
45	0,74817	37	0,46078	34	0,43307	39
46	0,74854	36	0,46112	34	0,43346	39
47	0,74890	37	0,46146	35	0,43385	39
48	0,74927	37	0,46181	34	0,43424	39
49	0,74964	36	0,46215	34	0,42463	39
50	0,75000	37	0,46249	35	0,43502	39
51	0,75037	37	0,46284	34	0,43541	39
52	0,75074	36	0,46318	35	0,43580	39
53	0,75110	37	0,46353	34	0,43619	39
54	0,75147	37	0,46387	35	0,43658	39
55	0,75184	37	0,46422	34	0,43697	39
56	0,75221	36	0,46456	35	0,43736	40
57	0,75257	37	0,46491	34	0,43776	39
58	0,75294	37	0,46525	35	0,43815	39
59	0,75331	37	0,46560	35	0,43854	39
60	0,75368		0,46595		0,43893	

ω = 70 Grad.

ω'	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0,75368	37	0,46595	35	0,43893	40
1	0,75405	37	0,46630	34	0,43933	39
2	0,75442	37	0,46664	35	0,43972	39
3	0,75479	37	0,46699	35	0,44011	40
4	0,75516	37	0,46734	35	0,44051	39
5	0,75553	37	0,46769	35	0,44090	40
6	0,75590	37	0,46804	35	0,44130	39
7	0,75627	38	0,46839	35	0,44169	40
8	0,75665	37	0,46874	34	0,44209	39
9	0,75702	37	0,46908	36	0,44248	40
10	0,75739	37	0,46944	35	0,44288	39
11	0,75776	38	0,46979	35	0,44327	40
12	0,75814	37	0,47014	35	0,44367	40
13	0,75851	37	0,47049	35	0,44407	39
14	0,75888	38	0,47084	35	0,44446	40
15	0,75926	37	0,47119	35	0,44486	40
16	0,75963	37	0,47154	35	0,44526	40
17	0,76000	38	0,47189	36	0,44566	39
18	0,76038	37	0,47225	35	0,44605	40
19	0,76075	38	0,47260	35	0,44645	40
20	0,76113	37	0,47295	36	0,44685	40
21	0,76150	38	0,47331	35	0,44725	40
22	0,76188	38	0,47366	36	0,44765	40
23	0,76225	37	0,47402	35	0,44805	40
24	0,76263	38	0,47437	36	0,44845	40
25	0,76301	38	0,47473	35	0,44885	40
26	0,76339	37	0,47508	36	0,44925	40
27	0,76376	38	0,47544	35	0,44965	40
28	0,76414	38	0,47579	36	0,45005	40
29	0,76452	38	0,47615	35	0,45045	40
30	0,76490	38	0,47650	36	0,45085	40
31	0,76528	37	0,47686	36	0,45125	40
32	0,76565	38	0,47722	36	0,45165	41
33	0,76603	38	0,47758	35	0,45206	40
34	0,76641	38	0,47793	36	0,45246	40
35	0,76679	38	0,47829	36	0,45286	41
36	0,76717	38	0,47865	36	0,45327	40
37	0,76755	39	0,47901	36	0,45367	40
38	0,76794	38	0,47937	36	0,45407	41
39	0,76832	38	0,47973	36	0,45448	40
40	0,76870	38	0,48009	36	0,45488	41
41	0,76908	38	0,48045	36	0,45529	40
42	0,76946	38	0,48081	36	0,45569	41
43	0,76984	39	0,48117	36	0,45610	40
44	0,77023	38	0,48153	36	0,45650	41
45	0,77061	38	0,48189	37	0,45691	40
46	0,77099	39	0,48226	36	0,45731	41
47	0,77138	38	0,48262	36	0,45772	41
48	0,77176	38	0,48298	36	0,45813	40
49	0,77214	39	0,48334	37	0,45853	41
50	0,77253	38	0,48371	36	0,45894	41
51	0,77291	39	0,48407	36	0,45935	40
52	0,77330	39	0,48443	37	0,45975	41
53	0,77369	38	0,48480	36	0,46016	41
54	0,77407	39	0,48516	37	0,46057	41
55	0,77446	38	0,48553	36	0,46098	41
56	0,77484	39	0,48589	37	0,46139	41
57	0,77523	39	0,48626	36	0,46180	41
58	0,77562	39	0,48662	37	0,46221	41
59	0,77601	38	0,48699	37	0,46262	41
60	0,77639		0,48736		0,46303	

ω = 71 Grad.

ω'	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0,77639	39	0,48736	37	0,46303	41
1	0,77678	39	0,48773	36	0,46344	41
2	0,77717	39	0,48809	37	0,46385	41
3	0,77756	39	0,48846	37	0,46426	41
4	0,77795	39	0,48883	37	0,46467	41
5	0,77834	39	0,48920	37	0,46508	42
6	0,77873	39	0,48957	36	0,46550	41
7	0,77912	39	0,48993	37	0,46591	41
8	0,77951	39	0,49030	37	0,46632	41
9	0,77990	39	0,49067	37	0,46673	42
10	0,78029	39	0,49104	38	0,46715	41
11	0,78068	39	0,49142	37	0,46756	42
12	0,78107	40	0,49179	37	0,46798	41
13	0,78147	39	0,49216	37	0,46839	41
14	0,78186	39	0,49253	37	0,46880	42
15	0,78225	39	0,49290	37	0,46922	41
16	0,78264	40	0,49327	38	0,46963	42
17	0,78304	39	0,49365	37	0,47005	42
18	0,78343	40	0,49402	37	0,47047	41
19	0,78383	39	0,49439	38	0,47088	42
20	0,78422	40	0,49477	37	0,47130	41
21	0,78462	39	0,49514	37	0,47171	42
22	0,78501	40	0,49551	38	0,47213	42
23	0,78541	49	0,49589	37	0,47255	42
24	0,78580	40	0,49626	38	0,47297	42
25	0,78620	39	0,49664	38	0,47339	41
26	0,78659	40	0,49702	37	0,47380	42
27	0,78699	40	0,49739	38	0,47422	42
28	0,78739	40	0,49777	38	0,47464	42
29	0,78779	39	0,49815	37	0,47506	42
30	0,78818	40	0,49852	38	0,47548	42
31	0,78858	40	0,49890	38	0,47590	42
32	0,78898	40	0,49928	38	0,47632	42
33	0,78938	40	0,49966	38	0,47674	42
34	0,78978	40	0,50004	38	0,47716	42
35	0,79018	40	0,50042	38	0,47758	42
36	0,79058	40	0,50080	38	0,47800	43
37	0,79098	40	0,50118	38	0,47843	42
38	0,79138	40	0,50156	38	0,47885	42
39	0,79178	40	0,50194	38	0,47927	42
40	0,79218	41	0,50232	38	0,47969	43
41	0,79259	40	0 50270	38	0,48012	42
42	0,79299	40	0,50308	38	0,48054	43
43	0,79339	40	0,50346	39	0,48097	42
44	0,79379	41	0,50385	38	0,48139	42
45	0,79420	40	0,50423	38	0,48181	43
46	0,79460	40	0,50461	39	0,48224	42
47	0,79500	41	0,50500	38	0,48266	43
48	0,79541	40	0,50538	38	0,48309	43
49	0,79581	41	0,50576	39	0,48352	42
50	0,79622	40	0,50615	38	0,48394	43
51	0,79662	41	0,50653	39	0,48437	43
52	0,79703	40	0,50692	39	0,48480	42
53	0,79743	41	0,50731	38	0,48522	43
54	0,79784	41	0,50769	39	0,48565	43
55	0,79825	41	0,50808	39	0,48608	43
56	0,79866	40	0,50847	38	0,48651	43
57	0,79906	41	0,50885	39	0,48694	42
58	0,79947	41	0,50924	39	0,48736	43
59	0,79988	41	0'50963	39	0,48779	43
60	0,80029		0,51002		0,48822	

$\omega = 72$ Grad.

ω ′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0,80029	41	0,51002	39	0,48822	43
1	0,80070	41	0,51041	39	0,48865	43
2	0,80111	41	0,51080	39	0,48908	44
3	0,80152	41	0,51119	39	0,48952	43
4	0,80193	41	0,51158	39	0,48995	43
5	0,80234	41	0,51197	39	0,49038	43
6	0,80275	41	0,51236	39	0,49081	43
7	0,80316	41	0,51275	39	0,49124	43
8	0,80357	41	0,51314	39	0,49167	44
9	0,80398	41	0,51353	40	0,49211	43
10	0,80439	42	0,51393	39	0,49254	43
11	0,80481	41	0,51432	39	0,49297	44
12	0,80522	41	0,51471	39	0,49341	43
13	0,80563	42	0,51510	40	0,49384	44
14	0,80605	41	0,51550	39	0,49428	43
15	0,80646	42	0,51589	40	0,49471	44
16	0,80688	41	0,51629	39	0,49515	43
17	0,80729	42	0,51668	40	0,49558	44
18	0,80771	41	0,51708	40	0,49602	43
19	0,80812	42	0,51748	39	0,49645	44
20	0,80854	41	0,51787	40	0,49689	44
21	0,80895	42	0,51827	40	0,49733	44
22	0,80937	42	0,51867	39	0,49777	43
23	0,80979	42	0,51906	40	0,49820	44
24	0,81021	41	0,51946	40	0,49864	44
25	0,81062	42	0,51986	40	0,49908	44
26	0,81104	42	0,52026	40	0,49952	44
27	0,81146	42	0,52066	40	0,49996	44
28	0,81188	42	0,52106	40	0,50040	44
29	0,81230	42	0,52146	40	0,50084	44
30	0,81272	42	0,52186	40	0,50128	44
31	0,81314	42	0,52226	40	0,50172	44
32	0,81356	42	0,52266	40	0,50216	44
33	0,81398	42	0,52306	40	0,50260	44
34	0,81440	43	0,52346	41	0,50304	44
35	0,81483	42	0,52387	40	0,50348	45
36	0,81525	42	0,52427	40	0,50393	44
37	0,81567	42	0,52467	41	0,50437	44
38	0,81609	43	0,52508	40	0,50481	45
39	0,81652	42	0,52548	41	0,50526	44
40	0,81694	42	0,52589	40	0,50570	45
41	0,81736	43	0,52629	41	0,50615	44
42	0,81779	42	0,52670	40	0,50659	45
43	0,81821	43	0,52710	41	0,50704	44
44	0,81864	43	0,52751	40	0,50748	45
45	0,81907	42	0,52791	41	0,50793	44
46	0 81949	43	0,52832	41	0,50837	45
47	0,81992	43	0,52873	41	0,50882	45
48	0,82035	42	0,52914	41	0,50927	44
49	0,82077	43	0,52955	40	0,50971	45
50	0,82120	43	0,52995	41	0,51016	45
51	0,82163	43	0,53036	41	0,51061	45
52	0,82206	43	0,53077	41	0,51106	45
53	0,82249	43	0,53118	41	0,51151	45
54	0,82292	43	0,53159	41	0,51196	45
55	0,82335	43	0,53200	42	0,51241	45
56	0,82378	43	0,53242	41	0,51286	45
57	0,82421	43	0,53283	41	0,51331	45
58	0,82464	43	0,53324	41	0,51376	45
59	0,82507	43	0,53365	41	0,51421	45
60	0,82550		0,53406		0,51466	

$\omega = 73$ Grad.

ω ′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0,82550	43	0,53406	42	0,51466	45
1	0,82593	44	0,53448	41	0,51511	46
2	0,82637	43	0,53489	42	0,51557	45
3	0,82680	43	0,53531	41	0,51602	45
4	0,82723	44	0,53572	42	0,51647	46
5	0,82767	43	0,53614	41	0,51693	45
6	0,82810	44	0,53655	42	0,51738	45
7	0,82854	43	0,53697	41	0,51783	46
8	0,82897	44	0,53738	42	0,61829	45
9	0,82941	43	0,53780	42	0,51874	46
10	0,82984	44	0,53822	42	0,51920	45
11	0,83028	44	0,53864	41	0,51965	46
12	0,83072	43	0,53905	42	0,52011	46
13	0,83115	44	0,53947	42	0,52057	46
14	0,83159	44	0,53989	42	0,52103	45
15	0,83203	44	0,54031	42	0,52148	46
16	0,83247	44	0,54073	42	0,52194	46
17	0,83291	44	0,54115	42	0,52240	46
18	0,83335	44	0,54157	42	0,52286	46
19	0,83379	44	0,54199	43	0,52332	46
20	0,83423	44	0,54242	42	0,52378	46
21	0,83467	44	0,54284	42	0,52424	46
22	0,83511	44	0,54326	42	0,52470	46
23	0,83555	44	0,54368	43	0,52516	46
24	0,83599	44	0,54411	42	0,52562	46
25	0,83643	45	0,54453	43	0,52608	46
26	0,83688	44	0,54496	42	0,52654	47
27	0,83732	44	0,54538	43	0,52701	46
28	0,83776	45	0,54581	42	0,52747	46
29	0,83821	44	0,54623	43	0,52793	47
30	0,83865	45	0,54666	42	0,52840	46
31	0,83910	44	0,54708	43	0,52886	46
32	0,83954	45	0,54751	43	0,52932	47
33	0,83999	45	0,54794	43	0,52979	46
34	0,84044	44	0,54837	43	0,53025	47
35	0,84088	45	0,54880	43	0,53072	47
36	0,84133	45	0,54923	42	0,53119	46
37	0,84178	45	0,54965	43	0,53165	47
38	0,84223	44	0,55008	44	0,53212	47
39	0,84267	45	0,55052	43	0,53259	47
40	0,84312	45	0,55095	43	0,53306	46
41	0,84357	45	0,55138	43	0,53352	47
42	0,84402	45	0,55181	43	0,53399	47
43	0,84447	45	0,55224	43	0,53446	47
44	0,84492	45	0·55267	44	0,53493	47
45	0,84537	46	0,55311	43	0,53540	47
46	0,84583	45	0,55354	44	0,53587	47
47	0,84628	45	0,55398	43	0,53634	47
48	0,84673	45	0,55441	43	0,53681	48
49	0,84718	46	0,55484	44	0,53729	47
50	0,84764	45	0,55528	44	0,53776	47
51	0,84809	46	0,55572	43	0,53823	47
52	0,84855	45	0,55615	44	0 53870	48
53	0,84900	46	0,55659	44	0,53918	47
54	0,84946	45	0,55703	44	0,53965	48
55	0,84991	46	0,55747	43	0,54013	47
56	0,85037	45	0,55790	44	0,54060	48
57	0,85082	46	0,55834	44	0,54108	47
58	0,85128	46	0,55878	44	0,54155	48
59	0,85174	46	0 55922	44	0,54203	47
60	0,85220		0,55966		0,54250	

ω = 74 Grad.

ω ′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0,85220	46	0,56966	44	0,54250	48
1	0,85266	46	0,56010	44	0,54298	48
2	0,85312	45	0,56054	45	0,54346	48
3	0,85357	46	0,56099	44	0,54394	47
4	0,85403	46	0,56143	44	0,54441	48
5	0,85449	47	0,56187	44	0,54489	48
6	0,85496	46	0,56231	45	0,54537	48
7	0,85542	46	0,56276	44	0,54585	48
8	0,85588	46	0,56320	15	0,54633	48
9	0,85634	46	0,56365	44	0,54681	48
10	0,85680	47	0,56409	45	0,54729	49
11	0,85727	46	0,56454	44	0,54778	48
12	0,85773	47	0,56498	45	0,54826	48
13	0,85820	46	0,56543	45	0,54874	48
14	0,85866	47	0,56588	45	0,51922	49
15	0,85913	46	0,56633	44	0,54971	48
16	0,85959	47	0,56677	45	0,55019	48
17	0,86006	46	0,56722	45	0,55067	49
18	0,86052	47	0,56767	45	0,55116	48
19	0,86099	47	0,56812	45	0,55164	49
20	0,86146	47	0,56857	45	0,55213	49
21	0,86193	46	0,56902	45	0,55262	48
22	0,86239	47	0,56947	45	0,55310	49
23	0,86286	47	0,56992	46	0,55359	49
24	0,86333	47	0,57038	45	0,55408	48
25	0,86380	47	0,57083	45	0,55456	49
26	0,86427	47	0,57128	46	0,55505	49
27	0,86474	47	0,57174	45	0,55554	49
28	0,86522	47	0,57219	46	0,55603	49
29	0,86569	47	0,57265	45	0,55652	49
30	0,86616	47	0,57310	46	0,55701	49
31	0,86663	48	0,57356	45	0,55750	49
32	0,86711	47	0,57401	46	0,55799	50
33	0,86758	48	0,57447	46	0,55849	49
34	0,86806	47	0,57493	46	0,55898	49
35	0,86853	48	0,57539	45	0,55947	49
36	0,86901	47	0,57584	46	0,55996	50
37	0,86948	48	0,57630	46	0,56046	49
38	0,86996	48	0,57676	46	0,56095	50
39	0,87011	47	0,57722	46	0,56145	49
40	0,87091	48	0,57768	46	0,56194	50
41	0,87139	48	0,57814	46	0,56244	49
42	0,87187	48	0,57860	47	0,56293	50
43	0,87235	48	0,57907	46	0,56343	50
44	0,87283	48	0,57953	46	0,56393	49
45	0,87331	48	0,57999	47	0,56442	50
46	0,87379	48	0,58046	46	0,56492	50
47	0,87427	48	0,58092	47	0,56542	50
48	0,87475	48	0,58139	46	0,56592	50
49	0,87523	49	0,58185	47	0,56642	50
50	0,87572	48	0,58232	46	0,56692	50
51	0,87620	48	0,58278	47	0,56742	50
52	0,87668	49	0,58325	47	0,56792	50
53	0,87717	48	0,58372	46	0,56842	50
54	0,87765	49	0,58418	47	0,56892	51
55	0,87814	48	0,58465	47	0,56943	50
56	0,87862	49	0,58512	47	0,56993	50
57	0,87911	49	0,58559	47	0,57043	51
58	0,87960	48	0,58606	47	0,57094	50
59	0,88008	49	0,58653	47	0,57144	51
60	0,88057		0,58700		0,57195	

ω = 75 Grad.

ω ′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0,88057	49	0,58700	48	0,57195	50
1	0,88106	49	0,58748	47	0,57245	51
2	0,88155	49	0,58795	47	0,57296	51
3	0,88201	49	0,58842	47	0,57347	50
4	0,88253	49	0,58889	48	0,57397	51
5	0,88302	49	0,58937	47	0,57448	51
6	0,88351	49	0,58981	48	0,57449	51
7	0,88400	49	0,59032	47	0,57550	51
8	0,88449	50	0,59079	48	0,57601	51
9	0,88499	49	0,59127	48	0,57652	51
10	0,88548	49	0,59175	47	0,57703	51
11	0,88597	50	0,59222	48	0,57754	51
12	0,88647	49	0,59270	48	0,57805	51
13	0,88696	50	0,59318	48	0,57856	51
44	0,88746	49	0,59366	48	0,57907	52
15	0,88795	50	0,59414	48	0,57959	51
16	0,88845	50	0,59462	48	0,58010	51
17	0,88895	49	0,59510	48	0,58061	52
18	0,88944	50	0,59558	48	0,58113	51
19	0,88994	50	0,59606	48	0,58164	52
20	0 89044	50	0,59654	49	0,58216	51
21	0,89094	50	0,59703	48	0,58267	52
22	0,89144	50	0,59751	49	0,58319	52
23	0,89194	50	0,59800	48	0,58371	51
24	0,89244	50	0,59848	49	0,58422	52
25	0,89294	50	0,59897	48	0,58174	52
26	0,89344	51	0,59945	49	0,58526	52
27	0,89395	50	0,59994	48	0,58578	52
28	0,89445	50	0,60042	49	0,58630	52
29	0,89495	51	0,60091	49	0,58682	52
30	0,89546	50	0,60140	49	0,58734	52
31	0,89596	51	0,60189	49	0,58786	53
32	0,89647	50	0,60238	49	0,58839	52
33	0,89697	51	0,60287	49	0,58891	52
34	0,89748	51	0,60336	49	0,58943	52
35	0,89799	51	0,60385	49	0,58995	53
36	0,89850	50	0,60434	49	0,59048	52
37	0,89900	51	0,60483	50	0,59100	53
38	0,89951	51	0,60533	49	0,59153	52
39	0,90002	51	0,60582	49	0,59205	53
40	0,60053	51	0,60631	50	0,59258	53
41	0,90104	51	0,60681	49	0,59311	53
42	0,90155	52	0,60730	50	0,59364	52
43	0,90207	51	0,60780	50	0,59116	53
44	0,90258	51	0,60830	49	0,59469	53
45	0,90309	51	0,60879	50	0,59522	53
46	0,90360	52	0,60929	50	0,59575	53
47	0,90412	51	0,60979	50	0,59628	53
48	0,90463	52	0,61029	50	0,59681	53
49	0,90515	51	0,61079	50	0,59734	54
50	0,90566	52	0,61129	50	0,59788	53
51	0,90618	52	0,61179	50	0,59841	53
52	0,90670	52	0,61229	50	0,59891	54
53	0,90722	51	0,61279	51	0,59948	53
54	0,90773	52	0,61330	50	0,60001	54
55	0,90825	52	0,61380	50	0,60055	53
56	0,90877	52	0,61430	51	0,60108	54
57	0,90929	52	0,61481	50	0,60162	53
58	0,90981	52	0,61531	51	0,60215	54
59	0,91033	53	0,61582	50	0,60269	54
60	0,91086		0,61632		0,60323	

ω = 76 Grad.

ω ′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0.91086	52	0.61632	51	0.60323	54
1	0.91138	52	0.61683	51	0.60377	54
2	0.91190	53	0.61734	51	0.60431	54
3	0.91243	52	0.61785	51	0.60485	54
4	0.91295	52	0.61836	51	0.60539	54
5	0.91347	53	0.61887	51	0.60593	54
6	0.91400	53	0.61938	51	0.60647	54
7	0.91453	52	0.61989	51	0.60701	54
8	0.91505	53	0.62040	51	0.60755	55
9	0.91558	53	0.62091	51	0.60810	54
10	0.91611	53	0.62142	52	0.60864	54
11	0.91664	53	0.62194	51	0.60918	55
12	0.91717	53	0.62245	52	0.60973	55
13	0.91770	53	0.62297	51	0.61028	54
14	0.91823	53	0.62348	52	0.61082	55
15	0.91876	53	0.62400	51	0.61137	55
16	0.91929	53	0.62451	52	0.61192	54
17	0.91982	54	0.62503	52	0.61246	55
18	0.92036	53	0.62555	52	0.61301	55
19	0.92089	53	0.62607	52	0.61356	55
20	0.92142	54	0.62659	52	0.61411	55
21	0.92196	53	0.62711	52	0.61466	55
22	0.92249	54	0.62763	52	0.61521	56
23	0.92303	54	0.62815	52	0.61577	55
24	0.92357	54	0.62867	52	0.61632	55
25	0.92411	53	0.62919	53	0.61687	56
26	0.92464	54	0.62972	52	0.61743	55
27	0.92518	54	0.63024	52	0.61798	55
28	0.92572	54	0.63076	53	0.61853	56
29	0.92626	54	0.63129	52	0.61909	56
30	0.92680	54	0.63181	53	0.61965	55
31	0.92734	55	0.63234	53	0.62020	56
32	0.92789	54	0.63287	53	0.62076	56
33	0.92843	54	0.63340	52	0.62132	56
34	0.92897	55	0.63392	53	0.62188	56
35	0.92952	54	0.63445	53	0.62244	56
36	0.93006	55	0.63498	53	0.62300	56
37	0.93061	54	0.63551	54	0.62356	56
38	0.93115	55	0.63605	53	0.62412	66
39	0.93170	55	0.63658	53	0.62468	56
40	0.93225	55	0.63711	53	0.62524	57
41	0.93280	54	0.63764	54	0.62581	56
42	0.93334	55	0.63818	53	0.62637	57
43	0.93389	55	0.63871	54	0.62694	56
44	0.93444	56	0.63925	53	0.62750	57
45	0.93500	55	0.63978	54	0.62807	56
46	0.93555	55	0.64032	54	0.62863	57
47	0.93610	55	0.64086	54	0.62920	57
48	0.93665	56	0.64140	54	0.62977	57
49	0.93721	55	0.64194	54	0.63034	57
50	0.93776	55	0.64248	54	0.63091	57
51	0.93831	56	0.64302	54	0.63148	57
52	0.93887	56	0.64356	54	0.63205	57
53	0.93943	55	0.64410	54	0.63262	57
54	0.93998	56	0.64464	55	0.63319	57
55	0.94054	56	0.64519	54	0.63376	58
56	0.94110	56	0.64573	54	0.63434	57
57	0.94166	56	0.64627	55	0.63491	57
58	0.94222	56	0.64682	55	0.63548	58
59	0.94278	56	0.64737	54	0.63606	58
60	0.94334		0.64791		0.63664	

ω = 77 Grad.

ω ′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0.94334	56	0.64791	55	0.63664	57
1	0.94390	57	0.64846	55	0.63721	58
2	0.94447	56	0.64901	55	0.63779	58
3	0.94503	56	0.64956	55	0.63837	58
4	0.94559	57	0.65011	55	0.63895	58
5	0.94616	56	0.65066	55	0.63953	58
6	0.94672	57	0.65121	55	0.64011	58
7	0.94729	57	0.65176	55	0.64069	58
8	0.94786	56	0.65231	56	0.64127	58
9	0.94842	57	0.65287	55	0.64185	58
10	0.94899	57	0.65342	56	0.64243	59
11	0.94956	57	0.65398	55	0.64302	58
12	0.95013	57	0.65453	56	0.64360	59
13	0.95070	57	0.65509	55	0.64419	58
14	0.95127	58	0.65564	56	0.64477	59
15	0.95185	57	0.65620	56	0.64536	59
16	0.95242	57	0.65676	56	0.64595	58
17	0.95299	58	0.65732	56	0.64653	59
18	0.95357	57	0.65788	56	0.64712	59
19	0.95414	58	0.65844	56	0.64771	59
20	0.95472	57	0.65900	57	0.64830	59
21	0.95529	58	0.65957	56	0.64889	60
22	0.95587	58	0.66013	56	0.64949	59
23	0.95645	58	0.66069	57	0.65008	59
24	0.95703	58	0.66126	56	0.65067	59
25	0.95761	58	0.66182	57	0.65126	60
26	0.95819	58	0.66239	57	0.65186	59
27	0.95877	58	0.66296	57	0.65245	60
28	0.95935	58	0.66353	56	0.65305	60
29	0.95993	59	0.66409	57	0.65365	59
30	0.96052	58	0.66466	57	0.65424	60
31	0.96110	58	0.66523	57	0.65484	60
32	0.96168	59	0.66580	58	0.65544	60
33	0.96227	59	0.66638	57	0.65604	60
34	0.96286	58	0.66695	57	0.65664	60
35	0.96344	59	0.66752	58	0.65724	61
36	0.96403	59	0.66810	57	0.65785	60
37	0.96462	59	0.66867	58	0.65845	60
38	0.96521	59	0.66925	57	0.65905	61
39	0.96580	59	0.66982	58	0.65966	60
40	0.96639	59	0.67040	58	0.66026	61
41	0.96698	60	0.67098	58	0.66087	60
42	0.96758	59	0.67156	58	0.66147	61
43	0.96817	59	0.67214	58	0.66208	61
44	0.96876	60	0.67272	58	0.66269	61
45	0.96936	59	0.67330	58	0.66330	61
46	0.96995	60	0.67388	59	0.66391	61
47	0.97055	60	0.67447	58	0.66452	61
48	0.97115	60	0.67505	58	0.66513	61
49	0.97175	59	0.67563	59	0.66574	61
50	0.97234	60	0.67622	59	0.66635	62
51	0.37294	61	0.67681	58	0.66697	61
52	0.97355	60	0.67739	59	0.66758	62
53	0.97415	60	0.67798	59	0.66820	61
54	0.97475	60	0.67857	59	0.66881	62
55	0.97535	61	0.67916	59	0.66943	62
56	0.97596	60	0.67975	59	0.67005	62
57	0.97656	61	0.68034	59	0.67067	61
58	0.97717	60	0.68093	60	0.67128	62
59	0.97777	61	0.68153	59	0.67190	63
60	0.97838		0.68212		0.67253	

$\omega = 78$ Grad.

ω'	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	0,97838	61	0,68212	60	0,67253	62
1	0,97899	61	0,68272	59	0,67315	62
2	0,97960	61	0,68331	60	0,67377	62
3	0,98021	61	0,68391	60	0,67439	63
4	0,98082	61	0,68451	59	0,67502	62
5	0,98143	61	0,68510	60	0,67564	63
6	0,98204	61	0,68570	60	0,67627	62
7	0,98265	62	0,68630	60	0,67689	63
8	0,98327	61	0,68690	60	0,67752	63
9	0,98388	62	0,68750	61	0,67815	63
10	0,98450	61	0,68811	60	0,67878	63
11	0,98511	62	0,68871	61	0,67941	63
12	0,98573	62	0,68932	60	0,68004	63
13	0,98635	62	0,68992	61	0,68067	63
14	0,98697	62	0,69053	60	0,68130	64
15	0,98759	62	0,69113	61	0,68194	63
16	0,98821	62	0,69174	61	0,68257	64
17	0,98883	62	0,69235	61	0,68321	63
18	0,98945	63	0,69296	61	0,68384	64
19	0,99008	62	0,69357	61	0,68448	63
20	0,99070	63	0,69418	61	0,68511	64
21	0,99133	62	0,69479	62	0,68575	64
22	0,99195	63	0,69541	61	0,68639	64
23	0,99258	63	0,69602	62	0,68703	64
24	0,99321	63	0,69664	61	0,68767	65
25	0,99384	63	0,69725	62	0,68832	64
26	0,99447	63	0,69787	62	0,68896	64
27	0,99510	63	0,69849	61	0,68960	65
28	0,99573	63	0,69910	62	0,69025	64
29	0,99636	63	0,69972	62	0,69089	65
30	0,99699	64	0,70034	63	0,69154	64
31	0,99763	63	0,70097	62	0,69218	65
32	0,99826	64	0,70159	62	0,69283	65
33	0,99890	64	0,70221	63	0,69348	65
34	0,99954	63	0,70284	62	0,69413	65
35	1,00017	64	0,70346	33	0,69478	65
36	1,00081	64	0,70409	62	0,69543	66
37	1,00145	64	0,70471	63	0,69609	65
38	1,00209	64	0,70534	63	0,69674	65
39	1,00273	65	0,70597	63	0,69739	66
40	1,00338	64	0,70660	63	0,69805	65
41	1,00402	64	0,70723	63	0,69870	66
42	1,00466	65	0,70786	64	0,69936	66
43	1,00531	64	0,70850	63	0,70002	66
44	1,00595	65	0,70913	63	0,70068	66
45	1,00660	65	0,70976	64	0,70134	66
46	1,00725	65	0,71040	64	0,70200	66
47	1,00790	65	0,71104	63	0,70266	66
48	1,00855	65	0,71167	64	0,70332	67
49	1,00920	65	0,71231	64	0,70399	66
50	1,00985	65	0,71295	64	0,70465	67
51	1,01050	66	0,71359	64	0,70532	66
52	1,01116	65	0,71423	65	0,70598	67
53	1,01181	66	0,71488	64	0,70665	67
54	1,01247	66	0,71552	64	0,70732	67
55	1,01313	65	0,71616	65	0,70799	67
56	1,01378	66	0,71681	65	0,70866	67
57	1,01444	66	0,71746	64	0,70933	67
58	1,01510	66	0,71810	65	0,71000	67
59	1,01576	66	0,71875	65	0,71067	68
60	1,01642		0,71940		0,71135	

$\omega = 79$ Grad.

ω'	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	1,01642	67	0,71940	65	0,71135	67
1	1,01709	66	0,72005	65	0,71202	68
2	1,01775	66	0,72070	66	0,71270	68
3	1,01841	67	0,72136	65	0,71338	67
4	1,01908	67	0,72201	65	0,71405	68
5	1,01975	66	0,72266	66	0,71473	68
6	1,02041	67	0,72332	66	0,71541	68
7	1,02108	67	0,72398	65	0,71609	68
8	1,02175	67	0,72463	66	0,71677	69
9	1,02242	67	0,72529	66	0,71746	68
10	1,02309	68	0,72595	66	0,71814	69
11	1,02377	67	0,72661	66	0,71883	68
12	1,02444	68	0,72727	67	0,71951	69
13	1,02512	67	0,72794	66	0,72020	69
14	1,02579	68	0,72860	67	0,72089	69
15	1,02647	68	0,72927	66	0,72158	69
16	1,02715	67	0,72993	67	0,72227	69
17	1,02782	68	0,73060	67	0,72296	69
18	1,02850	69	0,73127	67	0,72365	69
19	1,02919	68	0,73194	67	0,72434	70
20	1,02987	68	0,73261	67	0,72504	69
21	1,03055	68	0,73328	67	0,72573	70
22	1,03123	69	0,73395	67	0,72643	69
23	1,03192	69	0,73462	68	0,72712	70
24	1,03261	68	0,73530	67	0,72782	70
25	1,03329	69	0,73597	68	0,72852	70
26	1,03398	69	0,73665	68	0,72922	70
27	1,03467	69	0,73733	68	0,72992	71
28	1,03536	69	0,73801	68	0,73063	70
29	1,03605	60	0,73869	68	0,73133	70
30	1,03675	69	0,73937	68	0,73203	71
31	1,03744	69	0,74005	68	0,73274	71
32	1,03813	70	0,74073	69	0,73345	70
33	1,03883	70	0,74142	68	0,73415	71
34	1,03953	70	0,74210	69	0,73486	71
35	1,04023	69	0,74279	69	0,73557	71
36	1,04092	70	0,74348	69	0,73628	71
37	1,04162	61	0,74417	69	0,73699	72
38	1,04233	70	0,74486	69	0,73771	71
39	1,04303	70	0,74555	69	0,73842	72
40	1,04373	61	0,74624	69	0,73914	71
41	1,04444	70	0,74693	70	0,73985	72
42	1,04514	71	0,74763	69	0,74057	72
43	1,04585	71	0,74832	70	0,74129	72
44	1,04656	71	0,74902	70	0,74201	72
45	1,04727	71	0,74972	70	0,74273	72
46	1,04798	71	0,75042	70	0,74345	73
47	1,04869	71	0,75112	70	0,74418	72
48	1,04940	72	0,75182	70	0,74490	73
49	1,05012	71	0,75252	71	0,74563	72
50	1,05083	72	0,75323	70	0,74635	73
51	1,05155	72	0,75393	71	0,74708	73
52	1,05227	71	0,75464	70	0,74781	73
53	1,05298	72	0,75534	71	0,74854	73
54	1,05370	73	0,75605	71	0,74927	73
55	1,05443	72	0,75676	71	0,75000	74
56	1,05515	72	0,75747	72	0,75074	73
57	1,05587	73	0,75819	71	0,75147	74
58	1,05660	72	0,75890	71	0,75221	73
59	1,05732	73	0,75961	72	0,75294	74
60	1,05805		0,76033		0,75368	

ω = 80 Grad.

ω ′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	1,05805	73	0,76033	72	0,75368	74
1	1,05878	73	0,76105	72	0,75442	74
2	1,05951	73	0,76177	71	0,75516	74
3	1,06024	73	0,76248	73	0,75590	75
4	1,06097	73	0,76321	72	0,75665	74
5	1,06170	74	0,76393	72	0,75739	75
6	1,06244	73	0,76465	73	0,75814	74
7	1,06317	74	0,76538	72	0,75888	75
8	1,06391	73	0,76610	73	0,75963	75
9	1,06464	74	0,76683	73	0,76038	75
10	1,06538	74	0,76756	73	0,76113	75
11	1,06612	75	0,76829	73	0,76188	75
12	1,06687	74	0,76902	73	0,76263	76
13	1,06761	74	0,76975	73	0,76339	75
14	1,06835	75	0,77048	74	0,76414	76
15	1,06910	74	0,77122	73	0,76490	75
16	1,06984	75	0,77195	74	0,76565	76
17	1,07059	75	0,77269	74	0,76641	76
18	1,07134	75	0,77343	74	0,76717	77
19	1,07209	75	0,77417	74	0,76794	76
20	1,07284	76	0,77491	74	0,76870	76
21	1,07360	75	0,77565	74	0,76946	77
22	1,07435	76	0,77639	75	0,77023	76
23	1,07511	75	0,77714	75	0,77099	77
24	1,07586	76	0,77789	74	0,77176	77
25	1,07662	76	0,77863	75	0,77253	77
26	1,07738	76	0,77938	75	0,77330	77
27	1,07814	76	0,78013	75	0,77407	77
28	1,07890	77	0,78088	76	0,77484	78
29	1,07967	76	0,78164	75	0,77562	77
30	1,08043	77	0,78239	76	0,77639	78
31	1,08120	77	0,78315	75	0,77717	78
32	1,08197	76	0,78390	76	0,77795	78
33	1,08273	77	0,78466	76	0,77873	78
34	1,08350	78	0,78542	76	0,77951	78
35	1,08428	77	0,78618	76	0,78029	78
36	1,08505	77	0,78694	77	0,78107	79
37	1,08582	78	0,78771	76	0,78186	78
38	1,08660	78	0,78847	77	0,78264	79
39	1,08738	77	0,78924	77	0,78343	79
40	1,08815	78	0,79001	77	0,78422	79
41	1,08893	78	0,79078	77	0,78501	79
42	1,08971	79	0,79155	77	0,78580	79
43	1,09050	78	0,79232	77	0,78659	80
44	1,09128	79	0,79309	78	0,78739	79
45	1,09207	78	0,79387	78	0,78818	80
46	1,09285	79	0,79465	77	0,78898	80
47	1,09364	79	0,79542	78	0,78978	80
48	1,09443	79	0,79620	78	0,79058	80
49	1,09522	79	0,79698	79	0,79138	80
50	1,09601	80	0,79777	78	0,79218	81
51	1,09681	79	0,79855	78	0,79299	80
52	1,09760	80	0,79933	79	0,79379	81
53	1,09840	80	0,80012	79	0,79460	81
54	1,09920	80	0,80091	79	0,79541	81
55	1,10000	80	0,80170	79	0,79622	81
56	1,10080	80	0,80249	79	0,79703	81
57	1,10160	80	0,80328	80	0,79784	82
58	1,10240	81	0,80408	79	0,79866	81
59	1,10321	81	0,80487	80	0,79947	82
60	1,10402		0,80567		0,80029	

ω = 81 Grad.

ω ′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	1,10402	80	0,80567	80	0,80029	82
1	1,10482	81	0,80647	80	0,80111	82
2	1,10563	82	0,80727	80	0,80193	82
3	1,10645	81	0,80807	80	0,80275	82
4	1,10726	81	0,80887	80	0,80357	82
5	1,10807	82	0,80967	81	0,80439	83
6	1,10889	82	0,81048	81	0,80522	83
7	1,10971	81	0,81129	81	0,80605	83
8	1,11052	82	0,81210	81	0,80688	83
9	1,11134	83	0,81291	81	0,80771	83
10	1,11217	82	0,81372	81	0,80854	83
11	1,11299	83	0,81453	82	0,80937	84
12	1,11382	82	0,81535	82	0,81021	83
13	1,11464	83	0,81617	81	0,81104	84
14	1,11547	83	0,81698	82	0,81188	84
15	1,11630	83	0,81780	83	0,81272	84
16	1,11713	83	0,81863	82	0,81356	84
17	1,11796	84	0,81945	82	0,81440	85
18	1,11880	83	0,82027	83	0,81525	84
19	1,11963	84	0,82110	83	0,81609	85
20	1,12047	84	0,82193	23	0,81694	85
21	1,12131	84	0,82276	83	0,81779	85
22	1,12215	84	0,82359	83	0,81864	85
23	1,12299	85	0,82442	84	0,81949	86
24	1,12384	84	0,82526	83	0,82035	85
25	1,12468	85	0,82609	84	0,82120	86
26	1,12553	85	0,82693	84	0,82206	86
27	1,12638	85	0,82777	84	0,82292	86
28	1,12723	85	0,82861	84	0,82378	86
29	1,12808	86	0,82945	85	0,82464	86
30	1,12894	85	0,83030	84	0,82550	87
31	1,12979	86	0,83114	85	0,82637	86
32	1,13065	86	0,83199	85	0,82723	87
33	1,13151	86	0,83284	85	0,82810	87
34	1,13237	86	0,83369	86	0,82897	87
35	1,13323	86	0,83455	85	0,82984	88
36	1,13409	87	0,83540	86	0,83072	87
37	1,13496	87	0,83626	85	0,83159	88
38	1,13583	87	0,83711	86	0,83247	88
39	1,13670	87	0,83797	87	0,83335	88
40	1,13757	87	0,83884	86	0,83423	88
41	1,13844	87	0,83970	86	0,83511	88
42	1,13931	88	0,84056	87	0,83599	89
43	1,14019	88	0,84143	87	0,83688	88
44	1,14107	88	0,84230	87	0,83776	89
45	1,14195	88	0,84317	87	0,83865	89
46	1,14283	88	0,84404	88	0,83954	90
47	1,14371	89	0,84492	87	0,84044	89
48	1,14460	88	0,84579	88	9,84133	90
49	1,14548	89	0,84667	88	0,84223	89
50	1,14637	89	0,84755	88	0,84312	90
51	1,14726	89	0,84843	88	0,84402	90
52	1,14815	90	0,84931	89	0,84492	91
53	1,14905	89	0,85020	89	0,84583	90
54	1,14994	90	0,85109	88	0,84673	91
55	1,15084	90	0,85197	89	0,84764	91
56	1,15174	90	0,85286	90	0,84855	91
57	1,15264	90	0,85376	89	0,84946	91
58	1,15354	91	0,85465	90	0,85037	91
59	1,15445	91	0,85555	89	0,85128	92
60	1,15536		0,85644		0,85220	

ω = 82 Grad.

ω ′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	1.15536	90	0.85644	90	0.85220	92
1	1.15626	92	0.85734	91	0.85312	91
2	1.15718	91	0.85825	90	0.85403	93
3	1.15809	91	0.85915	91	0.85496	92
4	1.15900	92	0.86006	90	0.85588	92
5	1.15992	92	0.86096	91	0.85680	93
6	1.16084	92	0.86187	91	0.85773	93
7	1.16176	92	0.86278	92	0.85866	93
8	1.16268	92	0.86370	91	0.85959	93
9	1.16360	93	0.86461	92	0.86052	94
10	1.16453	93	0.86553	92	0.86146	93
11	1.16546	93	0.86645	92	0.86239	94
12	1.16639	93	0.86737	92	0.86333	94
13	1.16732	93	0.86829	93	0.86427	95
14	1.16825	94	0.86922	93	0.86522	94
15	1.16919	94	0.87015	93	0.86616	95
16	1.17013	94	0.87108	93	0.86711	95
17	1.17107	94	0.87201	93	0.86806	95
18	1.17201	94	0.87294	94	0.86901	95
19	1.17295	95	0.87388	93	0.86996	95
20	1.17390	95	0.87481	94	0.87091	96
21	1.17485	95	0.87575	94	0.87187	96
22	1.17580	95	0.87669	95	0.87283	96
23	1.17675	95	0.87764	94	0.87379	96
24	1.17770	96	0.87858	95	0.87475	97
25	1.17866	96	0.87953	95	0.87572	96
26	1.17962	96	0.88048	95	0.87668	97
27	1.18058	96	0.88143	96	0.87765	97
28	1.18154	96	0.88239	95	0.87862	98
29	1.18250	97	0.88334	96	0.87960	97
30	1.18347	97	0.88430	96	0.88057	98
31	1.18444	97	0.88526	97	0.88155	98
32	1.18541	97	0.88623	96	0.88253	98
33	1.18638	98	0.88719	97	0.88351	98
34	1.18736	98	0.88816	97	0.88449	99
35	1.18834	98	0.88913	97	0.88548	99
36	1.18932	98	0.89010	97	0.88647	99
37	1.19030	98	0.89107	98	0.88746	99
38	1.19128	99	0.89205	98	0.88845	99
39	1.19227	99	0.89303	98	0.88944	100
40	1.19326	99	0.89401	98	0.89044	100
41	1.19425	99	0.89499	99	0.89144	100
42	1.19524	100	0.89598	98	0.89244	100
43	1.19624	99	0.89696	99	0.89344	101
44	1.19723	100	0.89795	99	0.89445	101
45	1.19823	101	0.89894	100	0.89546	101
46	1.19924	100	0.89994	99	0.89647	101
47	1.20024	101	0.90093	100	0.89748	102
48	1.20125	101	0.90193	100	0.89850	101
49	1.20226	101	0.90293	101	0.89951	102
50	1.20327	101	0.90394	100	0.90053	102
51	1.20428	102	0.90494	101	0.90155	103
52	1.20530	102	0.90595	101	0.90258	102
53	1.20632	102	0.90696	102	0.90360	103
54	1.20734	102	0.90798	101	0.90463	103
55	1.20836	103	0.90899	102	0.90566	104
56	1.20939	103	0.91001	102	0.90670	103
57	1.21042	103	0.91103	102	0.90773	104
58	1.21145	103	0.91205	103	0.90877	104
59	1.21248	103	0.91308	103	0.90981	105
60	1.21351		0.91411		0.91086	

ω = 83 Grad.

ω ′	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0	1,21351	104	0.91411	103	0.91086	104
1	1,21455	104	0.91514	103	0.91190	105
2	1,21559	104	0.91617	103	0.91295	105
3	1,21663	105	0.91720	104	0.91400	105
4	1,21768	105	0.91824	104	0.91505	106
5	1,21873	105	0.91928	104	0.91611	106
6	1,21978	105	0.92032	105	0.91717	106
7	1,22083	106	0.92137	105	0.91823	106
8	1,22189	105	0.92242	105	0.91929	107
9	1,22294	106	0.92347	105	0.92036	106
10	1,22400	107	0.92452	106	0.92142	107
11	1,22507	106	0.92558	105	0.92249	108
12	1,22613	107	0.92663	106	0.92357	107
13	1,22720	107	0.92769	107	0.92464	108
14	1,22827	108	0.92876	106	0.92572	108
15	1,22935	107	0.92982	107	0.92680	109
16	1,23042	108	0.93089	107	0.92789	108
17	1,23150	108	0.93196	108	0.92897	109
18	1,23258	109	0.93304	107	0.93006	109
19	1,23367	108	0.93411	108	0.93115	110
20	1,23475	109	0.93519	109	0.93225	109
21	1,23584	110	0.93628	108	0.93334	110
22	1,23694	109	0.93736	109	0.93444	111
23	1,23803	110	0.93845	109	0.93555	110
24	1,23913	110	0.93954	109	0.93665	111
25	1,24023	110	0.94063	110	0.93776	111
26	1,24133	111	0.94173	110	0.93887	111
27	1,24244	111	0.94283	110	0.93998	112
28	1,24355	111	0.94393	110	0.94110	112
29	1,24466	111	0.94503	111	0.94222	112
30	1,24577	112	0.94614	111	0.94334	113
31	1,24689	112	0.94725	111	0.94447	112
32	1,24801	112	0.94836	112	0.94559	113
33	1,24913	113	0.94948	112	0.94672	114
34	1,25026	113	0.95060	112	0.94786	113
35	1,25139	113	0.95172	113	0.94899	114
36	1,25252	114	0.95285	112	0.95013	114
37	1,25366	113	0.95397	113	0.95127	115
38	1,25479	114	0.95510	114	0.95242	115
39	1,25593	115	0.95624	114	0.95357	115
40	1,25708	114	0.95738	113	0.95472	115
41	1,25822	115	0.95851	115	0.95587	116
42	1,25937	116	0.95966	114	0.95703	116
43	1,26053	115	0.96080	115	0.95819	116
44	1,26168	116	0.96195	115	0.95935	117
45	1,26284	116	0.96310	116	0.96052	116
46	1,26400	117	0.96426	116	0.96168	118
47	1,26517	117	0.96542	116	0.96286	117
48	1,26634	117	0.96658	116	0.96403	118
49	1,26751	117	0.96774	117	0.96521	118
50	1,26868	118	0.96891	117	0.96639	119
51	1,26986	118	0.97008	118	0.96758	118
52	1,27104	119	0.97126	117	0.96876	119
53	1,27223	118	0.97243	118	0.96995	120
54	1,27341	119	0.97361	119	0.97115	119
55	1,27460	120	0.97480	118	0.97234	121
56	1,27580	119	0.97598	119	0.97355	120
57	1,27699	120	0.97717	120	0.97475	121
58	1,27819	121	0.97837	120	0.97596	121
59	1,27940	120	0.97957	120	0.97717	121
60	1,28060		0.98077		0.97838	

$\omega = 84$ Grad.

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0'	1,28060	21	0,98077	20	0,97838	20
10	1,28081	20	0,98097	20	0,97858	21
20	1,28101	20	0,98117	20	0,97879	20
30	1,28121	20	0,98137	20	0,97899	20
40	1,28141	20	0,98157	20	0,97919	20
50	1,28161	20	0,98177	20	0,97939	21
1'	1,28181	24	0,98197	20	0,97960	20
10	1,28202	20	0,98217	20	0,97980	20
20	1,28222	20	0,98237	20	0,98000	21
30	1,28242	20	0,98257	20	0,98021	20
40	1,28262	21	0,98277	20	0,98041	20
50	1,28283	20	0,98297	21	0,98061	21
2'	1,28303	20	0,98318	20	0,98082	20
10	1,28323	20	0,98338	20	0,98102	20
20	1,28343	21	0,98358	20	0,98122	21
30	1,28364	20	0,98378	20	0,98143	20
40	1,28384	20	0,98398	20	0,98163	21
50	1,28104	21	0,98418	21	0,98184	20
3'	1,28125	20	0,98139	20	0,98201	20
10	1,28145	20	0,98459	20	0,98224	21
20	1,28165	20	0,98479	20	0,98245	20
30	1,28185	21	0,98199	21	0,98265	21
40	1,28506	20	0,98520	20	0,98286	20
50	1,28526	21	0,98540	20	0,98306	21
4'	1,28547	20	0,98560	20	0,98327	20
10	1,28567	20	0,98580	21	0,98347	21
20	1,28587	21	0,98601	20	0,98368	20
30	1,28608	20	0,98621	20	0,98388	21
40	1,28628	21	0,98641	20	0,98409	20
50	1,28649	20	0,98661	21	0,98429	21
5'	1,28669	20	0,98682	20	0,98450	20
10	1,28689	21	0,98702	20	0,98470	21
20	1,28710	20	0,98722	21	0,98491	20
30	1,28730	21	0,98743	20	0,98511	21
40	1,28751	20	0,98763	20	0,98532	21
50	1,28771	21	0,98783	21	0,98553	20
6'	1,28792	20	0,98804	20	0,98573	21
10	1,28812	21	0,98821	21	0,98591	20
20	1,28833	20	0,98845	20	0,98614	21
30	1,28853	21	0,98865	20	0,98635	21
40	1,28874	20	0,98885	21	0,98656	20
50	1,28894	21	0,98906	20	0,98676	21
7'	1,28915	20	0,98926	21	0,98697	21
10	1,28935	21	0,98947	20	0,98718	20
20	1,28956	20	0,98967	21	0,98738	21
30	1,28976	21	0,98988	20	0,98759	21
40	1,28997	21	0,99008	21	0,98780	20
50	1,29018	20	0,99029	20	0,98800	21
8'	1,29038	21	0,99049	21	0,98821	21
10	1,29059	20	0,99070	20	0,98812	20
20	1,29079	21	0,99090	21	0,98862	21
30	1,29100	21	0,99111	20	0,98883	21
40	1,29121	20	0,99131	21	0,98904	21
50	1,29141	21	0,99152	20	0,98925	20
9'	1,29162	20	0,99172	21	0,98945	21
10	1,29183	20	0,99193	20	0,98966	21
20	1,29203	21	0,99213	21	0,98987	21
30	1,29224	21	0,99234	20	0,99008	21
40	1,29245	20	0,99254	21	0,99029	20
50	1,29265	21	0,99275	21	0,99019	21
10'	1,29286		0,99296		0,99070	

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
10'	1,29286	21	0,99296	20	0,99070	21
10	1,29307	20	0,99316	21	0,99091	21
20	1,29327	21	0,99337	21	0,99112	21
30	1,29348	21	0,99358	20	0,99133	21
40	1,29369	21	0,99378	21	0,99154	20
50	1,29390	21	0,99399	20	0,99174	21
11'	1,29111	20	0,99119	21	0,99195	21
10	1,29431	21	0,99140	21	0,99216	21
20	1,29452	21	0,99161	21	0,99237	21
30	1,29473	21	0,99182	20	0,99258	21
40	1,29191	21	0,99502	21	0,99279	21
50	1,29515	20	0,99523	21	0,99300	21
12'	1,29535	21	0,99541	20	0,99321	21
10	1,29556	21	0,99564	21	0,99342	21
20	1,29577	21	0,99585	21	0,99363	21
30	1,29598	21	0,99606	21	0,99384	21
40	1,29619	21	0,99627	20	0,99105	21
50	1,29610	21	0,99647	21	0,99126	21
13'	1,29661	20	0,99668	21	0,99447	21
10	1,29681	21	0,99689	21	0,99468	21
20	1,29702	21	0,99710	21	0,99189	21
30	1,29723	21	0,99731	20	0,99510	21
40	1,29741	21	0,99751	21	0,99531	21
50	1,29765	21	0,99772	21	0,99552	21
14'	1,29786	21	0,99793	21	0,99573	21
10	1,29807	21	0,99814	21	0,99594	21
20	1,29828	21	0,99835	21	0,99615	21
30	1,29849	21	0,99856	21	0,99636	21
40	1,29870	21	0,99877	20	0,99657	21
50	1,29891	21	0,99897	21	0,99678	21
15'	1,29912	21	0,99918	21	0,99699	21
10	1,29933	21	0,99939	21	0,99720	22
20	1,29954	21	0,99960	21	0,99742	21
30	1,29975	21	0,99981	21	0,99763	21
40	1,29996	21	1,00002	21	0,99784	21
50	1,30017	21	1,00023	21	0,99805	21
16'	1,30038	21	1,00011	21	0,99826	21
10	1,30059	21	1,00065	21	0,99847	22
20	1,30080	22	1,00086	21	0,99869	21
30	1,30102	21	1,00107	21	0,99890	21
40	1,30123	21	1,00128	21	0,99911	21
50	1,30144	21	1,00149	21	0,99932	22
17'	1,30165	21	1,00170	21	0,99954	21
10	1,30186	21	1,00191	21	0,99975	21
20	1,30207	21	1,00212	21	0,99996	21
30	1,30228	22	1,00233	21	1,00017	22
40	1,30250	21	1,00254	21	1,00039	21
50	1,30271	21	1,00275	21	1,00060	21
18'	1,30292	21	1,00296	22	1,00081	21
10	1,30313	21	1,00318	21	1,00102	22
20	1,30334	22	1,00339	21	1,00124	21
30	1,30356	21	1,00360	21	1,00145	21
40	1,30377	21	1,00381	21	1,00166	22
50	1,30398	21	1,00402	21	1,00188	21
19'	1,30119	22	1,00123	21	1,00209	22
10	1,30441	21	1,00444	22	1,00231	21
20	1,30462	21	1,00466	21	1,00252	21
30	1,30483	21	1,00487	21	1,00273	22
40	1,30504	22	1,00508	21	1,00295	21
50	1,30526	21	1,00529	21	1,00316	22
20'	1,30547		1,00550		1,00338	

$\omega = 84$ Grad.

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.	ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
20'	1,30547	21	1,00550	22	1,00338	21	30'	1,31846	22	1,01843	22	1,01642	22
10	1,30568	22	1,00572	21	1,00359	21	10	1,31868	22	1,01868	21	1,01664	22
20	1,30590	21	1,00593	21	1,00380	22	20	1,31890	22	1,01886	22	1,01686	23
30	1,30611	21	1,00614	21	1,00402	21	30	1,31912	22	1,01908	22	1,01709	22
40	1,30632	22	1,00635	22	1,00423	22	40	1,31934	22	1,01930	22	1,01731	22
50	1,30654	21	1,00657	21	1,00445	21	50	1,31956	22	1,01952	22	1,01753	22
21'	1,30675	22	1,00678	21	1,00466	22	31'	1,31978	22	1,01974	22	1,01775	22
10	1,30697	21	1,00699	21	1,00488	21	10	1,32000	22	1,01996	22	1,01797	22
20	1,30718	21	1,00720	22	1,00509	22	20	1,32022	22	1,02018	22	1,01819	22
30	1,30739	22	1,00742	21	1,00531	21	30	1,32044	22	1,02040	22	1,01841	23
40	1,30761	21	1,00763	21	1,00552	22	40	1,32066	22	1,02062	22	1,01864	22
50	1,30782	22	1,00784	22	1,00574	21	50	1,32088	22	1,02084	22	1,01886	22
22'	1,30804	21	1,00806	21	1,00595	22	32	1,32110	22	1,02106	22	1,01908	22
10	1,30825	22	1,00827	21	1,00617	22	10	1,32132	22	1,02128	22	1,01930	22
20	1,30847	21	1,00848	22	1,00639	21	20	1,32154	22	1,02150	22	1,01952	23
30	1,30868	22	1,00870	21	1,00660	22	30	1,32176	23	1,02172	22	1,01975	22
40	1,30890	21	1,00891	22	1,00682	21	40	1,32199	22	1,02194	22	1,01997	22
50	1,30911	22	1,00913	21	1,00703	22	50	1,32221	22	1,02216	22	1,02019	22
23'	1,30933	21	1 00934	21	1,00725	22	33'	1,32243	22	1,02238	22	1,02041	23
10	1,30954	22	1,00955	22	1,00747	21	10	1,32265	22	1,02260	22	1,02064	22
20	1,30976	21	1,00977	21	1,00768	22	20	1,32287	22	1,02282	22	1,02086	22
30	1,30997	22	1,00998	22	1,00790	22	30	1,32309	23	1,02304	22	1,02108	23
40	1,31019	21	1,01020	21	1,00812	21	40	1,32332	22	1,02326	23	1 02131	22
50	1,31040	22	1,01041	22	1,00833	22	50	1,32354	22	1,02349	22	1,02153	22
24'	1,31062	21	1,01063	21	1,00855	22	34'	1,32376	22	1,02371	22	1,02175	23
10	1,31083	22	1,01084	22	1,00877	21	10	1,32398	23	1,02393	22	1,02198	22
20	1,31105	22	1,01106	21	1,00898	22	20	1,32421	22	1,02415	22	1,02220	22
30	1,31127	21	1,01127	22	1,00920	22	30	1,32443	22	1,02437	22	1,02242	23
40	1,31148	22	1,01149	21	1,00942	21	40	1,32465	22	1,02459	23	1,02265	22
50	1,31170	22	1,01170	22	1,00963	22	50	1,32487	23	1,02482	22	1,02287	22
25'	1,31192	21	1,01192	21	1,00985	22	35'	1,32510	22	1,02504	22	1,02309	23
10	1,31213	22	1,01213	22	1,01007	22	10	1,32532	22	1,02526	22	1,02332	22
20	1,31235	21	1,01235	21	1,01029	21	20	1,32554	23	1,02548	22	1,02354	23
30	1,31256	22	1,01256	22	1,01050	22	30	1,32577	22	1,02570	23	1,02377	22
40	1,31278	22	1,01278	21	1,01072	22	40	1,32599	23	1,02593	22	1,02399	23
50	1,31300	22	1,01299	22	1,01094	22	50	1,32621	22	1,02615	22	1,02422	22
26'	1,31322	21	1,01321	22	1,01116	22	36'	1,32644	22	1,02637	22	1,02444	23
10	1,31343	22	1,01343	21	1,01138	21	10	1,32666	22	1,02659	23	1,02467	22
20	1,31365	22	1,01364	22	1,01159	22	20	1,32688	23	1,02682	22	1,02489	23
30	1,31387	21	1,01386	22	1,01181	22	30	1,32711	22	1,02704	22	1,02512	22
40	1,31408	22	1,01408	21	1,01203	22	40	1,32733	23	1,02726	23	1,02534	23
50	1,31430	22	1,01429	22	1,01225	22	50	1,32756	22	1,02749	22	1,02557	22
27'	1,31452	22	1,01451	22	1,01247	22	37	1,32778	23	1,02771	22	1,02579	23
10	1,31474	22	1,01473	21	1,01269	22	10	1,32801	22	1,02793	23	1,02602	22
20	1,31496	21	1,01494	22	1,01291	22	20	1,32823	23	1,02816	22	1,02624	23
30	1,31517	22	1,01516	22	1,01313	21	30	1,32846	22	1,02838	23	1,02647	22
40	1,31539	22	1,01538	21	1,01334	22	40	1,32868	23	1,02861	22	1,02669	23
50	1,31561	22	1,01559	22	1,01356	22	50	1,32891	22	1,02883	22	1,02692	23
28'	1,31583	22	1,01581	22	1,01378	22	38	1,32913	23	1,02905	23	1,02715	22
10	1,31605	22	1,01603	22	1,01400	22	10	1,32936	22	1,02928	22	1,02737	23
20	1,31627	21	1,01625	21	1,01422	22	20	1,32958	23	1,02950	23	1,02760	22
30	1,31648	22	1,01646	22	1,01444	22	30	1,32981	22	1,02973	22	1,02782	23
40	1,31670	22	1,01668	22	1,01466	22	40	1,33003	23	1,02995	23	1,02805	23
50	1,31692	22	1,01690	22	1,01488	22	50	1,33026	22	1,03018	22	1,02828	22
29'	1,31714	22	1,01712	22	1,01510	22	39'	1,33048	23	1,03040	22	1,02850	23
10	1,31736	22	1,01734	21	1,01532	22	10	1,33071	23	1,03063	22	1,02873	23
20	1,31758	22	1,01755	22	1,01554	22	20	1,33094	22	1,03085	23	1,02896	23
30	1,31780	22	1,01777	22	1,01576	22	30	1,33116	23	1,03108	22	1,02919	22
40	1,31802	22	1,01799	22	1,01598	22	40	1,33139	22	1,03130	23	1,02941	23
50	1,31824	22	1,01821	22	1,01620	22	50	1,33161	23	1,03153	22	1,02964	23
30'	1,31846		1,01843		1,01642		40'	1,33184		1,03175		1,02987	

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.	ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
40'	1,33184	23	1,03175	23	1,02987	22	**50'**	1,34565	23	1,04550	23	1,04373	
10	1,33207	22	1,03198	22	1,03009	23	10	1,34588	24	1,04573	24	1,04397	24
20	1,33229	23	1,03220	23	1,03032	23	20	1,34612	23	1,04597	23	1,04420	23
30	1,33252	23	1,03243	22	1,03055	23	30	1,34635	23	1,04620	23	1,04444	24
40	1,33275	22	1,03265	23	1,03078	23	40	1,34658	24	1,04643	24	1,04467	23
50	1,33297	23	1,03288	23	1,03101	22	50	1,34682	23	1,04667	23	1,04491	24
41'	1,33320	23	1,03311	22	1,03123	23	**51'**	1,34705	24	1,04690	23	1,04514	23
10	1,33343	23	1,03333	23	1,03146	23	10	1,34729	23	1,04713	24	1,04538	24
20	1,33366	22	1,03356	23	1,03169	23	20	1,34752	24	1,04737	23	1,04561	23
30	1,33388	23	1,03379	22	1,03192	23	30	1 34776	23	1,04760	24	1,04585	24
40	1,33411	23	1,03401	23	1,03215	23	40	1,34799	24	1,04784	23	1,04609	24
50	1,33434	23	1,03424	23	1,03238	23	50	1,34823	23	1,04807	23	1,04632	23
42'	1,33457	22	1,03447	22	1,03261	22	**52**	1,34846	24	1,04830	24	1,04656	24
10	1,33479	23	1,03469	23	1,03283	23	10	1,34870	23	1,04854	23	1,04680	24
20	1,33502	23	1,03492	23	1,03306	23	20	1,34893	24	1,04877	24	1,04703	23
30	1,33525	23	1,03515	23	1,03329	23	30	1,34917	23	1,04901	23	1,04727	24
40	1,33548	23	1,03538	22	1,03352	23	40	1,34940	24	1,04924	24	1,04751	24
50	1,33571	23	1,03560	23	1,03375	23	50	1,34964	24	1,04948	23	1,04774	23
43'	1,33594	23	1,03583	23	1,03398	23	**53'**	1,34988	23	1,04971	24	1,04798	24
10	1,33617	22	1,03606	23	1,03421	23	10	1,35011	24	1,04995	23	1,04822	24
20	1,33639	23	1,03629	22	1,03444	23	20	1,35035	24	1,05018	24	1,04845	23
30	1,33662	23	1,03651	23	1,03467	23	30	1,35059	23	1,05042	23	1,04869	24
40	1,33685	23	1,03674	23	1,03490	23	40	1,35082	24	1,05065	24	1,04893	24
50	1,33708	23	1,03697	23	1,03513	23	50	1,35106	24	1,05089	24	1,04917	24
44'	1,33731	23	1,03720	23	1,03536	23	**54'**	1,35130	23	1,05113	23	1,04940	24
10	1,33754	23	1,03743	23	1,03559	23	10	1,35153	24	1,05136	24	1,04964	23
20	1,33777	23	1,03766	22	1,03582	23	20	1,35177	24	1,05160	23	1,04988	24
30	1,33800	23	1,03788	23	1,03605	23	30	1,35201	23	1,05183	24	1,05012	24
40	1,33823	23	1,03811	23	1,03628	23	40	1,35224	24	1,05207	24	1,05036	24
50	1,33846	23	1,03834	23	1,03651	24	50	1,35248	24	1,05231	23	1,05059	24
45'	1,33869	23	1,03857	23	1,03675	23	**55'**	1,35272	24	1,05354	24	1,05083	23
10	1,33892	23	1,03880	23	1,03698	23	10	1,35296	23	1,05278	24	1,05107	24
20	1,33915	23	1,03903	23	1,03721	23	20	1,35319	24	1,05302	23	1,05131	24
30	1,33938	23	1,03926	23	1,03744	23	30	1,35343	24	1,05325	24	1,05155	24
40	1,37961	23	1,03949	23	1,03767	23	40	1,35367	24	1,05349	24	1,05179	24
50	1,33984	23	1,03972	23	1,03790	23	50	1,35391	24	1,05373	24	1,05203	24
46'	1,34007	23	1,03995	23	1,03813	24	**56'**	1,35415	24	1,05397	23	1,05227	24
10	1,34030	23	1,04018	23	1,03837	23	10	1,35439	23	1,05420	24	1,05251	24
20	1,34053	24	1,04041	23	1,03860	23	20	1,35462	24	1,05444	24	1,05275	24
30	1,34077	23	1,04064	23	1,03883	23	30	1,35486	24	1,05468	24	1,05298	24
40	1,34100	23	1,04087	23	1,03906	23	40	1,35510	24	1,05492	24	1,05322	23
50	1,34123	23	1,04110	23	1,03929	24	50	1,35534	24	1,05516	23	1,05346	24
47'	1,34146	23	1,04133	23	1,03953	23	**57'**	1,35558	24	1,05539	24	1,05370	24
10	1,34169	23	1,04156	23	1,03976	23	10	1,35582	24	1,05563	24	1,05394	24
20	1,34192	23	1,04179	23	1,03999	24	20	1,35606	24	1,05587	24	1,05419	24
30	1,34215	24	1,04202	23	1,04023	23	30	1,35630	24	1,05611	24	1,05443	25
40	1,34239	23	1,04225	23	1,04046	23	40	1,35654	24	1,05635	24	1,05467	24
50	1,34262	23	1,04248	24	1,04069	23	50	1,35678	24	1,05659	24	1,05491	24
48'	1,34285	23	1,04272	23	1,04092	24	**58**	1,35702	24	1,05683	23	1,05515	24
10	1,34308	24	1,04295	23	1,04116	23	10	1,35726	24	1,05706	24	1,05539	24
20	1,34332	23	1,04318	23	1,04139	23	20	1,35750	24	1,05730	24	1,05563	24
30	1,34355	23	1,04341	23	1,04162	24	30	1,35774	24	1,05754	24	1,05587	24
40	1,34378	23	1,04364	23	1,04186	23	40	1,35798	24	1,05778	24	1,05611	24
50	1,34401	24	1,04387	24	1,04209	24	50	1 35822	24	1,05802	24	1,05635	24
49'	1,34425	23	1,04411	23	1,04233	23	**59'**	1,35846	24	1,05826	24	1,05660	25
10	1,34448	23	1,04434	23	1,04256	23	10	1,35870	24	1,05850	24	1,05684	24
20	1,34471	24	1,04457	23	1,04279	24	20	1,35894	24	1,05874	24	1,05708	24
30	1,34495	23	1,04480	24	1,04303	23	30	1,35918	24	1,05898	24	1,05732	24
40	1,34518	23	1,04504	23	1,04326	24	40	1,35942	25	1,05922	24	1,05756	24
50	1,34541	24	1,04527	23	1,04350	23	50	1,35967	24	1,05946	24	1,05781	25
50'	1,34565		1,04550		1,04373		**60'**	1,35991		1,05970		1,05805	24

ω = 85 Grad.

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0'	1,35991	24	1,05970	24	1,05805	24
10	1,36015	24	1,05994	25	1,05829	24
20	1,36039	24	1,06019	24	1,05853	25
30	1,36063	24	1,06043	24	1,05878	24
40	1,36087	25	1,06067	24	1,05902	24
50	1,36112	24	1,06091	24	1,05926	25
1'	1,36136	24	1,06115	24	1,05951	24
10	1,36160	24	1,06139	24	1,05975	24
20	1,36184	25	1,06163	25	1,05999	25
30	1,36209	24	1,06188	24	1,06024	24
40	1,36233	24	1,06212	24	1,06048	24
50	1,36257	25	1,06236	24	1,06072	25
2'	1,36282	24	1,06260	24	1,06097	24
10	1,36306	24	1,06284	25	1,06121	25
20	1,36330	25	1,06309	24	1,06146	24
30	1,36355	24	1,06333	24	1,06170	25
40	1,36379	24	1,06357	24	1,06195	24
50	1,36403	25	1,06381	25	1,06219	25
3'	1,36428	24	1,06406	24	1,06244	24
10	1,36452	25	1,06430	24	1,06268	25
20	1,36377	24	1,06454	25	1,06293	24
30	1,36501	24	1,06479	24	1,06317	25
40	1,36525	25	1,06503	25	1,06342	24
50	1,36550	24	1,06528	24	1,06366	25
4'	1,36574	25	1,06552	24	1,06391	24
10	1,36599	24	1,06576	25	1,06415	25
20	1,36623	25	1,06601	24	1,06440	24
30	1,36648	24	1,06625	25	1,06464	25
40	1,36672	25	1,06650	24	1,06489	25
50	1,36697	25	1,06674	25	1,06514	24
5'	1,36722	24	1,06699	24	1,06538	25
10	1,36746	25	1,06723	24	1,06563	25
20	1,36771	24	1,06747	25	1,06588	24
30	1,36795	25	1,06772	25	1,06612	25
40	1,36820	25	1,06797	24	1,06637	25
50	1,36845	24	1,06821	25	1,06662	25
6'	1,36869	25	1,06846	24	1,06687	24
10	1,36894	25	1,06870	25	1,06711	25
20	1,36919	24	1,06895	24	1,06736	25
30	1,36943	25	1,06919	25	1,06761	25
40	1,36968	25	1,06944	25	1,06786	24
50	1,36993	24	1,06969	24	1,06810	25
7'	1,37017	25	1,06993	25	1,06835	25
10	1,37042	25	1,07018	25	1,06860	25
20	1,37067	25	1,07043	24	1,06885	25
30	1,37092	24	1,07067	25	1,06910	25
40	1,37116	25	1,07092	25	1,06935	25
50	1,37141	25	1,07117	24	1,06960	24
8	1,37166	25	1,07141	25	1,06984	25
10	1,37191	25	1,07166	25	1,07009	25
20	1,37216	24	1,07191	25	1,07034	25
30	1,37240	25	1,07216	24	1,07059	25
40	1,37265	25	1,07240	25	1,07084	25
50	1,37290	25	1,07265	25	1,07109	25
9	1,37315	25	1,07290	25	1,07134	25
10	1,37340	25	1,07315	25	1,07159	25
20	1,37365	25	1,07340	24	1,07184	25
30	1,37390	25	1,07364	25	1,07209	25
40	1,37415	25	1,07389	25	1,07234	25
50	1,37440	25	1,07414	25	1,07259	25
10'	1,37465		1,07439		1,07284	

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
10'	1,37465	25	1,07439	25	1,07284	25
10	1,37490	25	1,07464	25	1,07309	26
20	1,37515	25	1,07489	25	1,07335	25
30	1,37540	25	1,07514	25	1,07360	25
40	1,37565	25	1,07539	25	1,07385	25
50	1,37590	25	1,07564	25	1,07410	25
11'	1,37615	25	1,07589	25	1,07435	25
10	1,37640	25	1,07614	25	1,07460	25
20	1,37665	25	1,07639	25	1,07485	26
30	1,37690	25	1,07664	25	1,07511	25
40	1,37715	26	1,07689	25	1,07536	25
50	1,37741	25	1,07714	25	1,07561	25
12'	1,37766	25	1,07739	25	1,07586	26
10	1,37791	25	1,07764	25	1,07612	25
20	1,37816	25	1,07789	25	1,07637	25
30	1,37841	25	1,07814	25	1,07662	25
40	1,37866	26	1,07839	26	1,07687	26
50	1,37892	25	1,07865	25	1,07713	25
13'	1,37917	25	1,07890	25	1,07738	25
10	1,37942	25	1,07915	25	1,07763	26
20	1,37967	26	1,07940	25	1,07789	25
30	1,37993	25	1,07965	25	1,07814	26
40	1,38018	25	1,07990	26	1,07840	25
50	1,38043	26	1,08016	25	1,07865	25
14'	1,38069	25	1,08041	25	1,07890	26
10	1,38094	25	1,08066	25	1,07916	25
20	1,38119	26	1,08091	26	1,07941	26
30	1,38145	25	1,08117	25	1,07967	25
40	1,38170	26	1,08142	25	1,07992	26
50	1,38196	25	1,08167	26	1,08018	25
15'	1,38221	25	1,08193	25	1,08043	26
10	1,38246	26	1,08218	25	1,08069	25
20	1,38272	25	1,08243	26	1,08094	26
30	1,38297	26	1,08269	25	1,08120	25
40	1,38323	25	1,08294	26	1,08145	26
50	1,38348	26	1,08320	25	1,08171	26
16'	1,38374	25	1,08345	25	1,08197	25
10	1,38399	26	1,08370	26	1,08222	26
20	1,38425	25	1,08396	25	1,08248	25
30	1,38450	26	1,08421	26	1,08273	26
40	1,38476	26	1,08447	25	1,08299	26
50	1,38502	25	1,08472	26	1,08325	25
17'	1,38527	26	1,08498	25	1,08350	26
10	1,38553	25	1,08523	26	1,08376	26
20	1,38578	26	1,08549	25	1,08402	26
30	1,38604	26	1,08574	26	1,08428	25
40	1,38630	25	1,08600	26	1,08453	26
50	1,38655	26	1,08626	25	1,08479	26
18'	1,38681	26	1,08651	26	1,08505	26
10	1,38707	26	1,08677	25	1,08531	26
20	1,38733	25	1,08702	26	1,08557	25
30	1,38758	26	1,08728	26	1,08582	26
40	1,38784	26	1,08754	25	1,08608	26
50	1,38810	26	1,08779	26	1,08634	26
19'	1,38836	25	1,08805	26	1,08660	26
10	1,38861	26	1,08831	26	1,08686	26
20	1,38887	26	1,08857	25	1,08712	26
30	1,38913	26	1,08882	26	1,08738	26
40	1,38939	26	1,08908	26	1,08764	25
50	1,38965	26	1,08934	26	1,08789	26
20'	1,38991		1,08960		1,08815	

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
20'	1.38991	25	1.08960	25	1.08815	26
10	1.39016	26	1.08985	26	1.08841	26
20	1.39042	26	1.09011	26	1.08867	26
30	1.39068	26	1.09037	26	1.08893	26
40	1.39094	26	1.09063	26	1.08919	26
50	1.39120	26	1.09089	26	1.08945	26
21'	1.39146	26	1.09115	26	1.08971	27
10	1.39172	26	1.09141	25	1.08998	26
20	1.39198	26	1.09166	26	1.09024	26
30	1.39224	26	1.09192	26	1.09050	26
40	1.39250	26	1.09218	26	1.09076	26
50	1.39276	26	1.09244	26	1.09102	26
22'	1.39302	26	1.09270	26	1.09128	26
10	1.39328	26	1.09296	26	1.09154	26
20	1.39354	26	1.09322	26	1.09180	27
30	1.39380	27	1.09348	26	1.09207	26
40	1.39407	26	1.09374	26	1.09233	26
50	1.39433	26	1.09400	26	1.09259	26
23'	1.39459	26	1.09426	26	1.09285	27
10	1.39485	26	1.09452	27	1.09312	26
20	1.39511	26	1.09479	26	1.09338	26
30	1.39537	27	1.09505	26	1.09364	26
40	1.39564	26	1.09531	26	1.09390	27
50	1.39590	26	1.09557	26	1.09417	26
24'	1.39616	26	1.09583	26	1.09443	26
10	1.39642	27	1.09609	27	1.09469	27
20	1.39669	26	1.09636	26	1.09496	26
30	1.39695	26	1.09662	26	1.09522	27
40	1.39721	27	1.09688	26	1.09549	26
50	1.39748	26	1.09714	26	1.09575	26
25'	1.39774	26	1.09740	27	1.09601	27
10	1.39800	27	1.09767	26	1.09628	26
20	1.39827	26	1.09793	26	1.09654	27
30	1.39853	26	1.09819	27	1.09681	26
40	1.39879	27	1.09846	26	1.09707	27
50	1.39906	26	1.09872	26	1.09734	26
26'	1.39932	27	1.09898	27	1.09760	27
10	1.39959	26	1.09925	26	1.09787	26
20	1.39985	27	1.09951	26	1.09813	27
30	1.40012	26	1.09977	27	1.09840	26
40	1.40038	27	1.10004	26	1.09866	27
50	1.40065	26	1.10030	27	1.09893	27
27'	1.40091	27	1.10057	26	1.09920	26
10	1.40118	26	1.10083	27	1.09946	27
20	1.40144	27	1.10110	26	1.09973	27
30	1.40171	27	1.10136	27	1.10000	26
40	1.40198	26	1.10163	26	1.10026	27
50	1.40224	27	1.10189	27	1.10053	27
28'	1.40251	26	1.10216	26	1.10080	26
10	1.40277	27	1.10242	27	1.10106	27
20	1.40304	27	1.10269	27	1.10133	27
30	1.40331	27	1.10296	26	1.10160	27
40	1.40358	26	1.10322	27	1.10287	27
50	1.40384	27	1.10349	26	1.10214	26
29'	1.40411	27	1.10375	27	1.10240	27
10	1.40438	26	1.10402	27	1.10267	27
20	1.40464	27	1.10429	26	1.10294	27
30	1.40491	27	1.10155	27	1.10321	27
40	1.40518	27	1.10482	27	1.10348	27
50	1.40545	27	1.10509	27	1.10375	27
30'	1.40572		1.10536		1.10402	

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
30'	1.40572	27	1.10536	26	1.10402	27
10	1.40599	26	1.10562	27	1.10429	26
20	1.40625	27	1.10589	27	1.10455	27
30	1.40652	27	1.10616	27	1.10482	27
40	1.40679	27	1.10643	27	1.10509	27
50	1.40706	27	1.10670	26	1.10536	27
31'	1.40733	27	1.10696	27	1.10563	27
10	1.40760	27	1.10723	27	1.10590	27
20	1.40787	27	1.10750	27	1.10617	28
30	1.40814	27	1.10777	27	1.10645	27
40	1.40841	27	1.10804	27	1.10672	27
50	1.40868	27	1.10831	27	1.10699	27
32'	1.40895	27	1.10858	27	1.10726	27
10	1.40922	27	1.10885	27	1.10753	27
20	1.40949	27	1.10912	27	1.10789	27
30	1.40976	27	1.10939	27	1.10807	27
40	1.41003	27	1.10966	27	1.10834	28
50	1.41030	27	1.10993	27	1.10862	27
33'	1.41057	28	1.11020	27	1.10889	27
10	1.41085	27	1.11047	27	1.10916	27
20	1.41112	27	1.11074	27	1.10943	28
30	1.41139	27	1.11101	27	1.10971	27
40	1.41166	27	1.11128	27	1.10998	27
50	1.41193	28	1.11155	28	1.11025	27
34'	1.41221	27	1.11183	27	1.11052	28
10	1.41218	27	1.11210	27	1.11080	27
20	1.41275	27	1.11237	27	1.11107	27
30	1.41302	28	1.11264	27	1.11134	28
40	1.41330	27	1.11291	28	1.11162	27
50	1.41357	27	1.11319	27	1.11189	28
35'	1.41384	28	1.11346	27	1.11217	27
10	1.41412	27	1.11373	27	1.11244	28
20	1.41439	27	1.11400	28	1.11272	27
30	1.41466	28	1.11428	27	1.11299	27
40	1.41494	27	1.11455	27	1.11326	28
50	1.41521	28	1.11482	28	1.11354	28
36'	1.41549	27	1.11510	27	1.11382	27
10	1.41576	28	1.11537	27	1.11409	28
20	1.41604	27	1.11564	28	1.11437	27
30	1.41631	28	1.11592	27	1.11464	28
40	1.41659	27	1.11619	28	1.11492	27
50	1.41686	28	1.11647	27	1.11519	28
37'	1.41714	27	1.11674	28	1.11547	28
10	1.41741	28	1.11702	27	1.11575	27
20	1.41769	27	1.11729	28	1.11602	28
30	1.41796	28	1.11757	27	1.11630	28
40	1.41824	28	1.11784	28	1.11658	27
50	1.41852	27	1.11812	27	1.11685	28
38'	1.41879	28	1.11839	28	1.11713	28
10	1.41907	28	1.11867	27	1.11741	28
20	1.41935	27	1.11894	28	1.11769	27
30	1.41962	28	1.11922	28	1.11796	28
40	1.41990	28	1.11950	27	1.11824	28
50	1.42018	27	1.11977	28	1.11852	28
39'	1.42045	28	1.12005	28	1.11880	28
10	1.42073	28	1.12033	27	1.11908	27
20	1.42101	28	1.12060	28	1.11935	28
30	1.42129	28	1.12088	28	1.11963	28
40	1.42157	27	1.12116	28	1.11991	28
50	1.42184	28	1.12144	27	1.12019	28
40'	1.42212		1.12171		1.12047	

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.	ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
40'	1.42212	28	1.12171	28	1.12047	28	**50'**	1.43917	29	1.13872	29	1.13757	29
10	1.42240	28	1.12199	28	1.12075	28	10	1.43946	29	1.13901	29	1.13786	29
20	1.42268	28	1.12227	28	1.12103	28	20	1.43975	29	1.13930	28	1.13815	29
30	1.42296	28	1.12255	28	1.12131	28	30	1.44004	29	1.13958	29	1.13844	29
40	1.42324	28	1.12283	28	1.12159	28	40	1.44033	29	1.139 7	29	1.13873	29
50	1.42352	28	1.12311	28	1.12187	28	50	1.44062	29	1.14016	29	1.13902	29
41'	1.42380	28	1.12339	27	1.12215	28	**51'**	1.44091	30	1.14045	29	1.13931	30
10	1.42408	28	1 12366	28	1.12243	28	10	1.44121	29	1.14074	30	1.13961	29
20	1.42436	28	1.12394	28	1.12271	28	20	1.44150	29	1.14104	29	1.13990	29
30	1.42464	28	1.12422	28	1.12299	28	30	1.44179	29	1.14133	29	1.14019	29
40	1.42492	28	1.12450	28	1.12327	29	40	1.44208	29	1.14162	29	1.14048	30
50	1.42520	28	1.12478	28	1.12356	28	50	1.44237	29	1.14191	29	1.14078	29
42'	1.42548	28	1.12506	28	1.12384	28	**52'**	1.44266	30	1.14220	29	1.14107	29
10	1.42576	28	1.12534	28	1.12412	28	10	1.44296	29	1.14249	29	1.14136	29
20	1.42604	28	1.12562	28	1.12410	28	20	1.44325	29	1.14278	29	1.14165	30
30	1.42632	28	1.12590	28	1.12468	29	30	1.44354	29	1.14307	30	1.14195	29
40	1.42660	29	1.12618	28	1.12497	28	40	1.44383	30	1.14337	29	1.14224	29
50	1.42689	28	1.12646	29	1.12525	28	50	1.44413	29	1.14366	29	1.14253	30
43'	1.42717	28	1.12675	28	1.12553	28	**53'**	1.44442	29	1.14395	29	1.14283	29
10	1.42745	28	1.12703	28	1.12581	29	10	1.44471	30	1.14424	30	1.14312	30
20	1.42773	28	1.12731	28	1.12610	28	20	1.44501	29	1.14454	29	1.14342	29
30	1.42801	29	1.12759	28	1.12638	28	30	1.44530	29	1.14483	29	1.14371	30
40	1.42830	28	1.12787	28	1.12666	29	40	1.44559	30	1.14512	30	1.14401	29
50	1.42858	28	1.12815	29	1.12695	28	50	1.44589	29	1.14542	29	1.14430	30
44'	1.42886	29	1.12844	28	1.12723	28	**54'**	1.44618	30	1.14571	29	1.14460	29
10	1.42915	28	1.12872	28	1.12751	29	10	1.44648	29	1.14600	30	1.14489	30
20	1.42943	28	1.12900	28	1.12780	28	20	1.44677	30	1.14630	29	1.14519	29
30	1.42971	29	1.12928	29	1.12808	29	30	1.44707	29	1.14659	30	1.14548	30
40	1.43000	28	1.12957	28	1.12837	28	40	1.44736	30	1.14689	29	1.14578	30
50	1.43028	28	1.12985	28	1.12865	29	50	1.44766	29	1.14718	30	1.14608	29
45'	1.43056	29	1.13013	29	1.12894	28	**55'**	1.44795	30	1.14748	29	1.14637	30
10	1.43085	28	1.13042	28	1.12922	29	10	1.44825	30	1.14777	30	1.14667	29
20	1.43113	29	1.13070	28	1.12951	28	20	1.44855	29	1.14807	29	1.14696	30
30	1.43142	28	1.13098	29	1.12979	29	30	1.44884	30	1.14836	30	1.14726	30
40	1.43170	29	1.13127	28	1.13008	28	40	1.44914	29	1.14866	29	1.14756	30
50	1.43199	28	1.13155	29	1.13036	29	50	1.44943	30	1.14895	30	1.14786	29
46'	1.43227	29	1.13184	28	1.13065	28	**56'**	1.41973	30	1.14925	30	1.14815	30
10	1.43256	28	1.13212	28	1.13093	29	10	1.45003	30	1.14955	29	1.14845	30
20	1.43284	29	1.13210	29	1.13122	29	20	1.45033	29	1.14984	30	1.14875	30
30	1.43313	28	1.13269	28	1.13151	28	30	1.45062	30	1.15014	29	1.14905	30
40	1 43341	29	1.13297	29	1.13179	29	40	1.45092	30	1.15043	30	1.14935	29
50	1.43370	29	1.13326	29	1.13208	29	50	1.45122	30	1.15073	30	1.14964	30
47'	1.43399	28	1.13355	28	1.13237	29	**57'**	1.45152	29	1.14103	30	1.14994	30
10	1.43427	29	1.13383	29	1.13266	28	10	1.45181	30	1.15133	29	1.15024	30
20	1.43456	29	1.13412	28	1.13294	29	20	1.45211	30	1.15162	30	1.15054	30
30	1.43185	28	1.13440	29	1.13323	29	30	1.45241	30	1.15192	30	1.15084	30
40	1.43513	29	1.13469	29	1.13352	29	40	1.45271	30	1.15222	30	1.15114	30
50	1.43512	29	1.13498	28	1.13381	28	50	1.45301	30	1.15252	30	1.15144	30
48'	1.43571	29	1.13526	29	1.13409	29	**58'**	1.45331	30	1.15282	30	1.15174	30
10	1.43600	28	1.13555	29	1.13438	29	10	1.45361	30	1.15312	29	1.16204	30
20	1.43628	29	1.13584	28	1.13467	29	20	1.45391	30	1.15341	30	1.15234	30
30	1.43657	29	1.13612	29	1.13496	29	30	1.45421	30	1.15371	30	1.15264	30
40	1.43686	29	1.13641	29	1.13525	29	40	1.45451	30	1.15401	30	1.15294	30
50	1.43715	29	1.13670	29	1.13554	29	50	1.45481	30	1.15431	30	1.15324	30
49'	1.43744	29	1.13699	28	1.13583	29	**59'**	1.45511	30	1.15461	30	1.15354	31
10	1.43773	28	1.13727	29	1.13612	29	10	1.45541	30	1.15491	20	1.15385	30
20	1.43801	29	1.13756	29	1.13641	29	20	1.45571	30	1.15521	30	1.15415	30
30	1.43830	29	1.13785	29	1.13670	29	30	1.45601	30	1.15551	30	1.15445	30
40	1.43859	29	1.13814	29	1.13699	29	40	1.45631	30	1.15581	30	1.15475	30
50	1.43888	29	1.13843	29	1.13728	29	50	1.45661	31	1.15611	31	1.15505	31
50'	1.43917		1.13872		1.13757		**60**	1.45692		1.15642		1.15536	

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.	ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0'	1.45692	30	1.15642	30	1.15536	30	10'	1.47541	32	1.17487	31	1.17390	31
10	1.45722	30	1.15672	30	1.15566	30	10	1.47573	31	1.17518	32	1.17421	32
20	1.45752	30	1.15702	30	1.15596	30	20	1.47604	32	1.17550	31	1.17453	32
30	1.45782	31	1.15732	30	1.15626	31	30	1.47636	32	1.17581	32	1.17485	31
40	1.45813	30	1.15762	30	1.15657	30	40	1.47668	31	1.17613	31	1.17516	32
50	1.45843	30	1.15792	31	1.15687	31	50	1.47699	32	1.17644	32	1.17548	32
1'	1.45873	30	1.15823	30	1.15718	30	11'	1.47731	31	1.17676	32	1.17580	31
10	1.45903	31	1.15853	30	1.15748	30	10	1.47762	32	1.17708	31	1.17611	32
20	1.45934	30	1.15883	30	1.15778	31	20	1.47794	32	1.17739	32	1.17643	32
30	1.45964	31	1.15913	31	1.15809	30	30	1.47826	31	1.17771	31	1.17675	32
40	1.45995	30	1.15944	30	1.15839	31	40	1.47857	32	1.17802	32	1.17707	31
50	1.46025	30	1.45974	30	1.15870	30	50	1.47889	32	1.17834	32	1.17738	32
2'	1.46055	31	1.16004	31	1.15900	31	12'	1.47921	32	1.17866	31	1.17770	32
10	1.46086	30	1.16035	30	1.15931	30	10	1.47953	32	1.17897	32	1.17802	32
20	1.46116	31	1.16065	31	1.15961	31	20	1.47985	31	1.17929	32	1.17834	32
30	1.46147	30	1.16096	30	1.15992	30	30	1.48016	32	1.17961	32	1.17866	32
40	1.46177	31	1.16126	30	1.16022	31	40	1.48048	32	1.17993	32	1.17898	32
50	1.46208	30	1.16156	31	1.16053	31	50	1.48080	32	1.18025	31	1.17930	32
3'	1.46238	31	1.16187	30	1.16084	30	13'	1.48112	32	1.18056	32	1.17962	32
10	1.46269	31	1.16217	31	1.16114	31	10	1.48144	32	1.18088	32	1.17994	32
20	1.46300	30	1.16248	31	1.16145	31	20	1.48176	32	1.18120	32	1.18026	32
30	1.46330	31	1.16279	30	1.16176	30	30	1.48208	32	1.18152	32	1.18058	32
40	1.46361	30	1.16309	31	1.16206	31	40	1.48240	32	1.18184	32	1.18090	32
50	1.46391	31	1.16340	30	1.16237	31	50	1.48272	32	1.18216	32	1.18122	32
4'	1.46422	31	1.16370	31	1.16268	31	14'	1.48304	32	1.18248	32	1.18154	32
10	1.46453	31	1.16401	31	1.16299	30	10	1.48336	32	1.18280	32	1.18186	32
20	1.46484	30	1.16432	30	1.16329	31	20	1.48368	32	1.18312	32	1.18218	32
30	1.46514	31	1.16462	31	1.16360	31	30	1.48400	32	1.18344	32	1.18250	33
40	1.16545	31	1.16493	31	1.16391	31	40	1.48432	32	1.18376	32	1.18283	32
50	1.46576	31	1.16524	30	1.16422	31	50	1.48464	33	1.18408	32	1.18315	32
5'	1.46607	31	1.16554	31	1.16453	31	15'	1.48497	32	1.18440	32	1.18347	32
10	1.46638	30	1.16585	31	1.16484	31	10	1.48529	32	1.18472	32	1.18379	33
20	1.46668	31	1.16616	31	1.16515	31	20	1.48561	32	1.18504	33	1.18412	32
30	1.46699	31	1.16647	31	1.16546	31	30	1.48593	33	1.18537	32	1.18444	32
40	1.46730	31	1.16678	31	1.16577	31	40	1.48626	32	1.18569	32	1.18476	33
50	1.46761	31	1.16708	31	1.16608	31	50	1.48658	32	1.18601	32	1.18509	32
6'	1.46792	31	1.16739	31	1.16639	31	16'	1.48690	33	1.18633	33	1.18541	32
10	1.46823	31	1.16770	31	1.16670	31	10	1.48723	32	1.18666	32	1.18573	33
20	1.46854	31	1.16801	31	1.16701	31	20	1.48755	32	1.18698	32	1.18606	32
30	1.46885	31	1.16832	31	1.16732	31	30	1.48787	33	1.18730	33	1.18638	33
40	1.46916	31	1.16863	31	1.16763	31	40	1.48820	32	1.18763	32	1.18671	32
50	1.46947	31	1.16894	31	1.16794	31	50	1.48852	33	1.18795	32	1.18703	33
7'	1.46978	31	1.16925	31	1.16825	31	17'	1.48885	32	1.18827	33	1.18736	32
10	1.47009	31	1.16956	31	1.16856	32	10	1.48917	33	1.18860	32	1.18768	33
20	1.47040	32	1.16987	31	1.16888	31	20	1.48950	32	1.18892	33	1.18801	33
30	1.47072	31	1.17018	31	1.16919	31	30	1.48982	33	1.18925	32	1.18834	32
40	1.47103	31	1.17049	31	1.16950	31	40	1.49015	32	1.18957	33	1.18866	33
50	1.47134	31	1.17080	32	1.16981	32	50	1.49047	33	1.18990	32	1.18899	33
8'	1.47165	31	1.17112	31	1.17013	31	18'	1.49080	33	1.19022	33	1.18932	32
10	1.47196	32	1.17143	31	1.17044	31	10	1.49113	32	1.19055	32	1.18964	33
20	1.47228	31	1.17174	31	1.17075	32	20	1.49145	33	1.19087	33	1.18997	33
30	1.47259	31	1.17205	31	1.17107	31	30	1.49178	33	1.19120	33	1.19030	33
40	1.47290	31	1.17236	32	1.17138	31	40	1.49211	32	1.19153	32	1.19063	32
50	1.47321	32	1.17268	31	1.17169	32	50	1.49243	33	1.19185	33	1.19095	33
9	1.47353	31	1.17299	31	1.17201	31	19	1.49276	33	1.19218	33	1.19128	33
10	1.47384	32	1.17330	31	1.17232	32	10	1.49309	33	1.19251	33	1.19161	33
20	1.47416	31	1.17361	32	1.17264	31	20	1.49342	33	1.19284	32	1.19194	33
30	1.47447	31	1.17393	31	1.17295	32	30	1.49375	32	1.19316	33	1.19227	33
40	1.47478	32	1.17424	32	1.17327	31	40	1.49407	33	1.19349	33	1.19260	33
50	1.47510	31	1.17456	31	1.17358	32	50	1.49440	33	1.19382	33	1.19293	33
10	1.47541		1.17487		1.17390		20'	1.49473		1.19415		1.19326	

$\omega = 86$ Grad.

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
20'	1,49473	33	1,19415	33	1,19326	33
10	1,49506	33	1,19448	33	1,19359	33
20	1,49539	33	1,19481	32	1,19392	33
30	1,49572	33	1,19513	33	1,19425	33
40	1,49605	33	1,19546	33	1,19458	33
50	1,49638	33	1,19579	33	1,19491	33
21'	1,49671	33	1,19612	33	1,19524	33
10	1,49704	33	1,19645	33	1,19557	34
20	1,49737	34	1,19678	33	1,19591	33
30	1,49771	33	1,19711	34	1,19624	33
40	1,49804	33	1,19745	33	1,19657	33
50	1,49837	33	1,19778	33	1,19690	33
22'	1,49870	33	1,19811	33	1,19723	34
10	1,49903	34	1,19844	33	1,19757	33
20	1,49937	33	1,19877	33	1,19790	33
30	1,49970	33	1,19910	34	1,19823	34
40	1,50003	34	1,19944	33	1,19857	33
50	1,50037	33	1,19967	33	1,19890	34
23'	1,50070	33	1,20010	34	1,19924	33
10	1,50103	34	1,20044	33	1,19957	34
20	1,50137	33	1,20077	33	1,19991	33
30	1,50170	34	1,20110	34	1,20024	34
40	1,50204	33	1,20144	33	1,20058	33
50	1,50237	34	1,20177	34	1,20091	34
24'	1,50271	33	1,20211	33	1,20125	33
10	1,50304	34	1,20244	34	1,20158	34
20	1,50338	33	1,20278	33	1,20192	34
30	1,50371	34	1,20311	34	1,20226	33
40	1,50405	34	1,20345	33	1,20259	34
50	1,50439	33	1,20378	34	1,20293	34
25'	1,50472	34	1,20412	33	1,20327	34
10	1,50506	34	1,20445	34	1,20361	33
20	1,50540	34	1,20479	34	1,20394	34
30	1,50574	33	1,20513	34	1,20428	34
40	1,50607	34	1,20547	33	1,20462	34
50	1,50641	34	1,20580	34	1,20496	34
26'	1,50675	34	1,20614	34	1,20530	34
10	1,50709	34	1,20648	34	1,20564	34
20	1,50743	34	1,20682	34	1,20598	34
30	1,50777	34	1,20716	33	1,20632	34
40	1,50811	34	1,20749	34	1,20666	34
50	1,50845	34	1,20783	34	1,20700	34
27'	1,50879	34	1,20817	34	1,20734	34
10	1,50913	34	1,20851	34	1,20768	34
20	1,50947	34	1,20885	34	1,20802	34
30	1,50981	34	1,20919	34	1,20836	34
40	1,51015	34	1,20953	34	1,20870	34
50	1,51049	34	1,20987	34	1,20904	35
28'	1,51083	34	1,21021	34	1,20939	34
10	1,51117	34	1,21055	35	1,20973	34
20	1,51151	35	1,21090	34	1,21007	35
30	1,51186	34	1,21124	34	1,21042	34
40	1,51220	34	1,21158	34	1,21076	34
50	1,51254	35	1,21192	34	1,21110	35
29'	1,51289	34	1,21226	35	1,21145	34
10	1,51323	34	1,21261	34	1,21179	34
20	1,51357	35	1,21295	34	1,21213	35
30	1,51392	34	1,21329	35	1,21248	34
40	1,51426	34	1,21364	34	1,21282	35
50	1,51460	35	1,21398	34	1,21317	34
30'	1,51495		1,21432		1,21351	

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
30'	1,51495	34	1,21432	35	1,21351	35
10	1,51529	35	1,21467	34	1,21386	35
20	1,51564	35	1,21501	35	1,21421	34
30	1,51599	34	1,21536	34	1,21455	35
40	1,51633	35	1,21670	35	1,21490	35
50	1,51668	34	1,21605	35	1,21525	34
31'	1,51702	35	1,21640	34	1,21559	35
10	1,51737	35	1,51674	35	1,21594	35
20	1,51772	34	1,21709	34	1,21629	34
30	1,51806	35	1,21743	35	1,21663	35
40	1,51841	35	1,21778	35	1,21698	35
50	1,51876	35	1,21813	35	1,21733	35
32'	1,51911	35	1,21848	34	1,21768	35
10	1,51946	34	1,21882	35	1,21803	35
20	1,51980	35	1,21917	35	1,21838	35
30	1,52015	35	1,21952	35	1,21873	35
40	1,52050	35	1,21987	35	1,21908	35
50	1,52085	35	1,22022	35	1,21943	35.
33'	1,52120	35	1,22057	35	1,21978	35
10	1,52155	35	1,22092	35	1,22013	35
20	1,52190	35	1,22127	35	1,22048	35
30	1,52225	35	1,22162	35	1,22083	35
40	1,52260	36	1,22197	35	1,22118	35
50	1,52296	35	1,22232	35	1,22153	36
34'	1,52331	35	1,22267	35	1,22189	35
10	1,52366	35	1,22302	35	1,22224	35
20	1,52401	35	1,22337	35	1,22259	35
30	1,52436	36	1,22372	35	1,22294	36
40	1,52472	35	1,22407	35	1,22330	35
50	1,52507	35	1,22442	36	1,22365	35
35'	1,52542	35	1,22478	35	1,22400	36
10	1,52577	36	1,22513	35	1,22436	35
20	1,52613	35	1,22548	36	1,23471	36
30	1,52648	36	1,22584	35	1,22507	35
40	1,52684	35	1,22619	35	1,22542	36
50	1,52719	36	1,22654	36	1,22578	35
36'	1,52755	35	1,22690	35	1,22613	36
10	1,52790	36	1,22725	36	1,22649	36
20	1,52826	35	1,22761	35	1,22685	35
30	1,52861	36	1,22796	36	1,12720	36
40	1,52897	35	1,22832	35	1,22756	36
50	1,52932	36	1,22867	36	1,22792	35
37'	1,52968	36	1,22903	36	1,22827	36
10	1,53004	36	1,22939	35	1,22863	36
20	1,53040	35	1,22974	36	1,22899	36
30	1,53075	36	1,23010	36	1,22935	35
40	1,53111	36	1,23046	35	1,22970	36
50	1,53147	36	1,23081	36	1,23006	36
38'	1,53183	36	1,23117	36	1,23042	36
10	1,53219	36	1,23153	36	1,23078	36
20	1,53255	35	1,23189	36	1,23114	36
30	1,53290	36	1,23225	36	1,23150	36
40	1,53326	36	1,23261	36	1,23186	36
50	1,53362	36	1,23297	36	1,23222	36
39'	1,53398	36	1,23333	36	1,23258	36
10	1,53434	37	1,23369	36	1,23294	37
20	1,53471	36	1,23405	36	1,23331	36
30	1,53507	36	1,23441	36	1,23367	36
40	1,53543	36	1,23477	36	1,23403	36
50	1,53579	36	1,23513	36	1,23439	36
40'	1,53615		1,23549		1,23475	

ω	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
40′	1,53615	36	1,23549	36	1,23475	37
10	1,53651	37	1,23585	36	1,23512	36
20	1,53688	36	1,23621	36	1,23548	36
30	1,53724	36	1,23657	37	1,23584	37
40	1,53760	37	1,23694	36	1,23621	36
50	1,53797	36	1,23730	36	1,23657	37
41′	1,53833	36	1,23766	37	1,23694	36
10	1,53869	37	1,23803	36	1,23730	37
20	1,53906	36	1,23839	36	1,23767	36
30	1,53942	37	1,23875	37	1,23803	37
40	1,53979	36	1,23912	36	1,23840	36
50	1,54015	37	1,23948	37	1,23876	37
42′	1,54052	36	1,23985	36	1,23913	36
10	1,54088	37	1,24021	37	1,23949	37
20	1,54125	37	1,24058	37	1,23986	37
30	1,54162	36	1,24095	36	1,24023	37
40	1,54198	37	1,24131	37	1,24060	36
50	1,54235	37	1,24168	37	1,24096	37
43′	1,54272	37	1,24205	36	1,24133	37
10	1,54309	36	1,24241	37	1,24170	37
20	1,54345	37	1,24278	37	1,24207	37
30	1,54382	37	1,24315	37	1,24244	37
40	1,54419	37	1,24352	36	1,24281	37
50	1,54456	37	1,24388	37	1,24318	37
44′	1,54493	37	1,24425	37	1,24355	37
10	1,54530	37	1,24462	37	1,24392	37
20	1,54567	37	1,24499	37	1,24429	37
30	1,54604	37	1,24536	37	1,24466	37
40	1,54641	37	1,24573	37	1,24503	37
50	1,54678	37	1,24610	37	1,24540	37
45′	1,54715	37	1,24647	37	1,24577	38
10	1,54752	38	1,24684	37	1,24615	37
20	1,54790	37	1,24721	38	1,24652	37
30	1,54827	37	1,24759	37	1,24689	37
40	1,54864	37	1,24796	37	1,24726	38
50	1,54901	38	1,24833	37	1,24764	37
46′	1,54939	37	1,24870	38	1,24801	37
10	1,54976	37	1,24908	37	1,24838	38
20	1,55013	38	1,24945	37	1,24876	37
30	1,55051	37	1,24982	38	1,24913	38
40	1,55088	38	1,25020	37	1,24951	37
50	1,55126	37	1,25057	37	1,24988	38
47′	1,55163	38	1,25094	38	1,25026	38
10	1,55201	37	1,25132	37	1,25064	37
20	1,55238	38	1,25169	38	1,25101	38
30	1,55276	38	1,25207	38	1,25139	38
40	1,55314	37	1,25245	37	1,25177	37
50	1,55351	38	1,25282	38	1,25214	38
48′	1,55389	38	1,25320	38	1,25252	38
10	1,55427	37	1,25358	37	1,23290	38
20	1,55464	38	1,25395	38	1,25328	38
30	1,55502	38	1,25433	38	1,25366	37
40	1,55540	38	1,25471	38	1,25403	38
50	1,55578	38	1,25509	37	1,25441	38
49′	1,55616	38	1,25546	38	1,25479	38
10	1,55654	38	1,25584	38	1,25517	38
20	1,55692	38	1,25622	38	1,25555	38
30	1,55730	38	1,25660	38	1,25593	38
40	1,55768	38	1,25698	38	1,25631	39
50	1,55806	38	1,25736	58	1,25670	38
50′	1,55844		1,25774		1,25708	

ω	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
50′	1,55844	38	1,25774	38	1,25708	38
10	1,55882	38	1,25812	38	1,25746	38
20	1,55920	38	1,25850	38	1,25784	38
30	1,55958	39	1,25888	39	1,25822	39
40	1,55997	38	1,25927	38	1,25861	38
50	1,56035	38	1,25965	38	1,25899	38
51′	1,56073	39	1,26003	38	1,25937	39
10	1,56112	38	1,26041	39	1,25976	38
20	1,56150	39	1,26080	38	1,26014	39
30	1,56188	39	1,26118	38	1,26053	38
40	1,56227	38	1,26156	39	1,26091	39
50	1,56265	39	1,26195	38	1,26130	38
52′	1,56304	38	1,26233	39	1,26168	39
10	1,56342	39	1,26272	38	1,26207	39
20	1,56381	38	1,26310	39	1,26246	28
30	1,56419	39	1,26319	38	1,26284	39
40	1,56458	39	1,26387	39	1,26323	39
50	1,56497	39	1,26426	39	1,26362	38
53′	1,56536	38	1,26465	38	1,26400	39
10	1,56574	39	1,26503	39	1,26439	39
20	1,56613	39	1,26542	39	1,26478	39
30	1,56652	39	1,26581	39	1,26517	39
40	1,56691	39	1,26620	38	1,26556	39
50	1,56730	38	1,26658	39	1,26595	39
54′	1,56768	39	1,26697	39	1,26634	39
10	1,56807	39	1,26736	39	1,26673	39
20	1,56846	39	1,26775	39	1,26712	39
30	1,56885	40	1,26814	39	1,26751	39
40	1,56925	39	1,26853	39	1,26790	39
50	1,56964	39	1,26892	39	1,26829	39
55′	1,57003	39	1,26931	39	1,26868	39
10	1,57042	39	1,26970	39	1,26907	40
20	1,57081	39	1,27009	40	1,26947	39
30	1,57120	40	1,27049	39	1,26986	39
40	1,57160	39	1,27088	39	1,27025	40
50	1,57199	39	1,27127	39	1,27065	39
56′	1,57238	40	1,27166	40	1,27104	40
10	1,57278	39	1,27206	39	1,27144	39
20	1,57317	39	1,27245	39	1,27183	40
30	1,57356	40	1,27284	40	1,27223	39
40	1,57396	39	1,27324	39	1,27262	40
50	1,57435	40	1,27363	40	1,27302	39
57′	1,57475	40	1,27403	39	1,27341	40
10	1,57515	39	1,27442	40	1,27381	40
20	1,57554	40	1,27482	40	1,27421	39
30	1,57594	40	1,27522	39	1,27460	40
40	1,57634	39	1,27561	40	1,27500	40
50	1,57673	40	1,27601	40	1,27540	40
58′	1,57713	40	1,27641	39	1,27580	40
10	1,57753	40	1,27680	40	1,27620	39
20	1,57793	40	1,27720	40	1,27659	40
30	1,57833	40	1,27760	40	1,27699	40
40	1,57873	40	1,27800	40	1,27739	40
50	1,57913	39	1,27840	40	1,27779	40
59′	1,57952	41	1,27880	40	1,27819	40
10	1,57993	40	1,27920	40	1,27859	41
20	1,58033	40	1,27960	40	1,27900	40
30	1,58073	40	1,28000	40	1,27940	40
40	1,58113	40	1,28040	40	1,27980	40
50	1,58153	40	1,28080	40	1,28020	40
60′	1,58193		1,28120		1,28060	

ω = 87 Grad.

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0'	1,58193	40	1,28120	40	1,28060	41
10	1,58233	41	1,28160	40	1,28101	40
20	1,58274	40	1,28200	41	1,28141	40
30	1,58314	40	1,28241	40	1,28181	41
40	1,58354	41	1,28281	40	1,28222	40
50	1,58395	40	1,28321	40	1,28262	41
1'	1,58435	41	1,28362	40	1,28303	40
10	1,58476	40	1,28402	41	1,28343	41
20	1,58516	41	1,28443	40	1,28384	41
30	1,58557	40	1,28483	41	1,28425	40
40	1,58597	41	1,28524	40	1,28465	41
50	1,58638	41	1,28561	41	1,28506	41
2'	1,58679	40	1,28605	40	1,28547	40
10	1,58719	41	1,28645	41	1,28587	41
20	1,58760	41	1,28686	41	1,28628	41
30	1,58801	41	1,28727	41	1,28669	41
40	1,58842	41	1,28768	40	1,28710	41
50	1,58883	40	1,28808	41	1,28751	41
3'	1,58923	41	1,28849	41	1,28792	41
10	1,58964	41	1,28890	41	1,28833	41
20	1,59005	41	1,28931	41	1,28874	41
30	1,59016	41	1,28972	41	1,28915	41
40	1,59087	42	1,29013	41	1,28956	41
50	1,59129	41	1,29054	41	1,28997	41
4'	1,59170	41	1,29095	41	1,29038	41
10	1,59211	41	1,29136	41	1,29079	42
20	1,59252	41	1,29177	42	1,29121	41
30	1,59293	42	1,29219	41	1,29162	41
40	1,59335	41	1,29260	41	1,29203	42
50	1,59376	41	1,29301	41	1,29245	41
5'	1,59417	42	1,29312	42	1,29286	41
10	1,59159	41	1,29384	41	1,29327	42
20	1,59500	42	1,29425	41	1,29369	42
30	1,59542	41	1,29466	42	1,29411	41
40	1,59583	42	1,29508	41	1,29452	42
50	1,59625	41	1,29549	42	1,29494	41
6'	1,59666	42	1,29591	42	1,29535	42
10	1,59708	42	1,29633	41	1,29577	42
20	1,59750	41	1,29671	42	1,29619	42
30	1,59791	42	1,29716	42	1,29661	41
40	1,59833	42	1,29758	41	1,29702	42
50	1,59875	42	1,29799	42	1,29744	42
7'	1,59917	41	1,29841	42	1,29786	42
10	1,59958	42	1,29883	42	1,29828	42
20	1,60000	42	1,29925	42	1,29870	42
30	1,60042	42	1,29967	42	1,29912	42
40	1,60084	42	1,30009	42	1,29954	42
50	1,60126	42	1,30051	42	1,29996	42
8'	1,60168	43	1,30093	42	1,30038	42
10	1,60211	42	1,30135	42	1,30080	43
20	1,60253	42	1,30177	42	1,30123	42
30	1,60295	42	1,30219	42	1,30165	42
40	1,60337	42	1,30261	42	1,30207	43
50	1,60379	43	1,30303	43	1,30250	42
9'	1,60422	42	1,30346	42	1,30292	42
10	1,60464	43	1,30388	42	1,30334	43
20	1,60507	42	1,30430	43	1,30377	42
30	1,60549	43	1,30473	42	1,30419	43
40	1,60592	42	1,30515	43	1,30462	42
50	1,60634	43	1,30558	42	1,30501	43
10'	1,60677		1,30600		1,30547	

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
10'	1,60677	42	1,30600	43	1,30547	43
10	1,60719	43	1,30643	42	1,30590	42
20	1,60762	43	1,30685	43	1,30632	43
30	1,60805	42	1,30728	43	1,30675	43
40	1,60847	43	1,30771	42	1,30718	43
50	1,60890	43	1,30813	43	1,30761	43
11'	1,60933	43	1,30856	43	1,30804	43
10	1,60976	43	1,30899	43	1,30847	43
20	1,61019	43	1,30942	43	1,30890	43
30	1,61062	43	1,30985	43	1,30933	43
40	1,61105	43	1,31028	43	1,30976	43
50	1,61148	43	1,31071	43	1,31019	43
12'	1,61191	43	1,31114	43	1,31062	43
10	1,61234	43	1,31157	43	1,31105	43
20	1,61277	43	1,31200	43	1,31148	44
30	1,61320	44	1,31213	43	1,31192	43
40	1,61364	43	1,31286	44	1,31235	43
50	1,61407	43	1,31330	43	1,31278	44
13'	1,61450	44	1,31373	43	1,31322	43
10	1,61494	43	1,31416	44	[illegible]	43
20	1,61537	43	1,31460	43	1,31408	44
30	1,61580	44	1,31503	43	1,31452	44
40	1,61624	44	1,31546	44	1,31495	43
50	1,61668	43	1,31590	43	1,31539	44
14'	1,61711	44	1,31633	44	1,31583	44
10	1,61755	43	1,31677	44	1,31627	43
20	1,61798	44	1,31721	43	1,31670	44
30	1,61842	44	1,31764	44	1,31714	44
40	1,61886	44	1,31808	44	1,31758	44
50	1,61930	44	1,31852	44	1,31802	44
15'	1,61974	44	1,31896	44	1,31846	44
10	1,62018	44	1,31940	43	1,31890	44
20	1,62062	44	1,31983	44	1,31931	44
30	1,62106	44	1,32027	44	1,31978	44
40	1,62150	44	1,32071	44	1,32022	44
50	1,62194	44	1,32115	44	1,32066	44
16'	1,62238	44	1,32159	45	1,32110	44
10	1,62282	44	1,32204	44	1,32154	45
20	1,62326	44	1,32248	44	1,32199	44
30	1,62370	45	1,32292	44	1,32243	44
40	1,62415	44	1,32336	45	1,32287	45
50	1,62459	44	1,32381	44	1,32332	44
17'	1,62503	45	1,32425	44	1,32376	45
10	1,62548	44	1,32469	45	1,32421	41
20	1,62592	45	1,32514	44	1,32465	45
30	1,62637	45	1,32558	45	1,32510	44
40	1,62682	44	1,32603	44	1,32554	45
50	1,62726	45	1,32647	45	1,32599	45
18	1,62771	45	1,32692	45	1,32644	44
10	1,62816	44	1,32737	44	1,32688	45
20	1,62860	45	1,32781	45	1,32733	45
30	1,62905	45	1,32826	45	1,32778	45
40	1,62950	45	1,32871	45	1,32823	45
50	1,62995	45	1,32916	45	1,32868	45
19	1,63040	45	1,32961	45	1,32913	45
10	1,63085	45	1,33006	45	1,32958	45
20	1,63130	45	1,33051	45	1,33003	45
30	1,63175	45	1,33096	45	1,33048	46
40	1,63220	45	1,33141	45	1,33094	45
50	1,63265	46	1,33186	45	1,33139	45
20'	1,63311		1,33231		1,33184	

ω = 87 Grad.

ω	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
20′	1,63311	45	1,33231	45	1,33184	45
10	1,63356	45	1,33276	46	1,33229	46
20	1,63401	46	1,33322	45	1,33275	45
30	1,63447	45	1,33367	45	1,33320	46
40	1,63492	45	1,33412	46	1,33366	45
50	1,63537	46	1,33458	45	1,33411	46
21′	1,63583	45	1,33503	46	1,33457	45
10	1,63628	46	1,33549	45	1,33502	46
20	1,63674	46	1,33594	46	1,33548	46
30	1,63720	45	1,33640	46	1,33594	45
40	1,63765	46	1,33686	45	1,33639	46
50	1,63811	46	1,33731	46	1,33685	46
22′	1,63857	46	1,33777	46	1,33731	46
10	1,63903	46	1,33823	46	1,33777	46
20	1,63949	46	1,33869	46	1,33823	46
30	1,63995	46	1,33915	45	1,33869	46
40	1,64041	46	1,33960	46	1,33915	46
50	1,64087	46	1,34006	47	1,33961	46
23′	1,64133	46	1,34053	46	1,34007	46
10	1,64179	46	1,34099	46	1,34053	47
20	1,64225	46	1,34145	46	1,34100	46
30	1,64271	47	1,34191	46	1,34146	46
40	1,64318	46	1,34237	46	1,34192	47
50	1,64364	46	1,34283	47	1,34239	46
24′	1,64410	47	1,34330	46	1,34285	47
10	1,64457	46	1,34376	47	1,34332	46
20	1,64503	47	1,34423	46	1,34378	47
30	1,64550	47	1,34469	47	1,34425	46
40	1,64597	46	1,34516	46	1,34471	47
50	1,64643	47	1,34562	47	1,34518	47
25′	1,64690	47	1,34609	47	1,34565	47
10	1,64737	46	1,34656	46	1,34612	46
20	1,64783	47	1,34702	47	1,34658	47
30	1,64830	47	1,34749	47	1,34705	47
40	1,64877	47	1,34796	47	1,34752	47
50	1,64924	47	1,34843	47	1,34799	47
26′	1,64971	47	1,34890	47	1,34846	47
10	1,65018	47	1,34937	47	1,34893	47
20	1,65065	47	1,34984	47	1,34940	48
30	1,65112	48	1,35031	47	1,34988	47
40	1,65160	47	1,35078	47	1,35035	47
50	1,65207	47	1,35125	48	1,35082	48
27′	1,65254	47	1,35173	47	1,35130	47
10	1,65301	48	1,35220	47	1,35177	47
20	1,65349	47	1,35267	48	1,35224	48
30	1,65396	48	1,35315	47	1,35272	47
40	1,65444	47	1,35362	48	1,35319	48
50	1,65491	48	1,35410	47	1,35367	48
28′	1,65539	48	1,35457	48	1,35415	47
10	1,65587	47	1,35505	47	1,35462	48
20	1,65634	48	1,35552	48	1,35510	48
30	1,65682	48	1,35600	48	1,35558	48
40	1,65730	48	1,35648	48	1,35606	48
50	1,65778	48	1,35696	48	1,35654	48
29′	1,65826	48	1,35744	48	1,35702	48
10	1,65874	48	1,35792	48	1,35750	48
20	1,65922	48	1,35840	48	1,35798	48
30	1,65970	48	1,35888	48	1,35846	48
40	1,66018	48	1,35936	48	1,35894	48
50	1,66066	48	1,35984	48	1,35942	49
30′	1,66114		1,36032		1,35991	

ω	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
30′	1,66114	49	1,36032	48	1,35991	48
10	1,66163	48	1,36080	49	1,36039	48
20	1,66211	48	1,36129	48	1,36087	49
30	1,66259	49	1,36177	48	1,36136	48
40	1,66308	48	1,36225	49	1,36184	49
50	1,66356	49	1,36274	48	1,36233	49
31′	1,66405	49	1,36322	49	1,36282	48
10	1,66454	48	1,36371	49	1,36330	49
20	1,66502	49	1,36420	48	1,36379	49
30	1,66551	49	1,36468	49	1,36428	49
40	1,66600	49	1,36517	49	1,36477	48
50	1,66649	49	1,36566	49	1,36525	49
32′	1,66698	48	1,36615	49	1,36574	49
10	1,66746	49	1,36664	48	1,36623	49
20	1,66795	50	1,36712	40	1,36672	50
30	1,66845	49	1,36762	49	1,36722	49
40	1,66894	49	1,36811	49	1,36771	49
50	1,66943	49	1,36860	49	1,36820	49
33′	1,66992	49	1,36909	49	1,36869	50
10	1,67041	50	1,36958	49	1,36919	49
20	1,67091	49	1,37007	50	1,36968	49
30	1,67140	50	1,37057	49	1,37017	50
40	1,67190	49	1,37106	50	1,37067	49
50	1,67239	50	1,37156	49	1,37116	50
34′	1,67289	49	1,37205	40	1,37166	50
10	1,67338	50	1,37255	59	1,37216	49
20	1,67388	50	1,37304	40	1,37265	50
30	1,67438	49	1,37354	50	1,37315	50
40	1,67487	50	1,37404	50	1,37365	50
50	1,67537	50	1,37454	49	1,37415	50
35′	1,67587	50	1,37503	50	1,37465	50
10	1,67637	50	1,37553	50	1,37515	50
20	1,67687	50	1,37603	50	1,37565	50
30	1,67737	50	1,37653	50	1,37615	50
40	1,67787	51	1,37703	51	1,37665	50
50	1,67838	50	1,37754	50	1,37715	51
36′	1,67888	50	1,37804	50	1,37766	50
10	1,67938	50	1,37854	50	1,37816	50
20	1,67988	51	1,37904	51	1,37866	51
30	1,68039	50	1,37955	50	1,37917	50
40	1,68089	51	1,38005	51	1,37967	51
50	1,68140	51	1,38056	50	1,38018	51
37′	1,68191	50	1,38106	51	1,38069	50
10	1,68241	51	1,38157	51	1,38119	51
20	1,68292	51	1,38208	50	1,38170	51
30	1,68343	51	1,38258	51	1,38221	51
40	1,68394	50	1,38309	51	1,38272	51
50	1,68444	51	1,38360	51	1,38323	51
38′	1,68495	51	1,38411	51	1,38374	51
10	1,68546	51	1,38462	51	1,38425	51
20	1,68597	52	1,38513	51	1,38476	51
30	1,68649	51	1,38564	51	1,38527	51
40	1,68700	51	1,38615	51	1,38578	52
50	1,68751	51	1,38666	52	1,38630	51
39′	1,68802	52	1,38718	51	1,38681	52
10	1,68854	51	1,38769	51	1,38733	51
20	1,68905	52	1,38820	52	1,38784	52
30	1,68957	51	1,38872	51	1,38836	51
40	1,69008	52	1,38923	52	1,38887	52
50	1,69060	52	1,38975	52	1,38939	52
40′	1,69112		1,39027		1,38991	

ω	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
40′	1.69112	51	1.39027	51	1.38991	51
10	1.69163	52	1.39078	52	1.39042	52
20	1.69215	52	1.39130	52	1.39094	52
30	1.69267	52	1.39182	52	1.39146	52
40	1.69319	52	1.39234	52	1.39198	52
50	1.69371	52	1.39286	52	1.39250	52
41′	1.69423	52	1.39338	52	1.39302	52
10	1.69475	52	1.39390	52	1.39354	53
20	1.69527	53	1.39442	52	1.39407	52
30	1.69580	52	1.39494	52	1.39459	52
40	1.69632	52	1.39546	53	1.39511	53
50	1.69684	53	1.39599	52	1.39564	52
42′	1.69737	52	1.39651	53	1.39616	53
10	1.69789	53	1.39704	52	1.39669	52
20	1.69842	52	1.39756	53	1.39721	53
30	1.69894	53	1.39809	52	1.39774	53
40	1.69947	53	1.39861	53	1.39827	52
50	1.70000	53	1.39914	53	1.39879	53
43′	1.70053	52	1.39967	53	1.39932	53
10	1.70105	53	1.40020	53	1.39985	53
20	1.70158	53	1.40073	53	1.40038	53
30	1.70211	53	1.40126	53	1.40091	53
40	1.70264	54	1.40179	53	1.40144	54
50	1.70318	53	1.40232	53	1.40198	53
44′	1.70371	53	1.40285	53	1.40251	53
10	1.70424	53	1.40338	53	1.40304	54
20	1.70477	54	1.40391	54	1.40358	53
30	1.70531	53	1.40445	53	1.40411	53
40	1.70584	54	1.40498	54	1.40464	54
50	1.70638	53	1.40552	53	1.40518	54
45′	1.70691	54	1.40605	54	1.40572	53
10	1.70745	54	1.40659	53	1.40625	54
20	1.70799	54	1.40712	54	1.40679	54
30	1.70853	53	1.40766	54	1.40733	54
40	1.70906	54	1.40820	54	1.40787	54
50	1.70960	54	1.40874	54	1.40841	54
46′	1.71014	54	1.40928	54	1.40895	54
10	1.71068	55	1.40982	54	1.40949	54
20	1.71123	54	1.41036	54	1.41003	54
30	1.71177	54	1.41090	54	1.41057	55
40	1.71231	54	1.41144	55	1.41112	54
50	1.71285	55	1.41199	54	1.41166	55
47′	1.71340	54	1.41253	54	1.41221	54
10	1.71394	55	1.41307	55	1.41275	55
20	1.71449	54	1.41362	55	1.41330	54
30	1.71503	55	1.41417	54	1.41384	55
40	1.71558	55	1.41471	55	1.41439	55
50	1.71613	55	1.41526	55	1.41494	55
48′	1.71668	55	1.41581	55	1.41549	55
10	1.71723	54	1.41636	54	1.41604	55
20	1.71777	56	1.41690	55	1.41659	55
30	1.71833	55	1.41745	55	1.41714	55
40	1.71888	55	1.41800	56	1.41769	55
50	1.71943	55	1.41856	55	1.41824	55
49′	1.71998	55	1.41911	55	1.41879	56
10	1.72053	56	1.41966	55	1.41935	55
20	1.72109	55	1.42021	56	1.41990	55
30	1.72164	56	1.42077	55	1.42045	56
40	1.72220	55	1.42132	56	1.42101	56
50	1.72275	56	1.42188	55	1.42157	55
50′	1.72331		1.42243		1.42212	

ω	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
50′	1.72331	56	1.42243	56	1.42212	56
10	1.72387	55	1.42299	56	1.42268	56
20	1.72442	56	1.42355	56	1.42324	56
30	1.72498	56	1.42411	56	1.42380	56
40	1.72554	56	1.42467	56	1.42136	56
50	1.72610	56	1.42523	56	1.42492	56
51′	1.72666	56	1.42579	56	1.42548	56
10	1.72722	57	1.42635	56	1.42604	56
20	1.72779	56	1.42691	56	1.42660	57
30	1.72835	56	1.42747	57	1.42717	56
40	1.72891	57	1.42804	56	1.42773	57
50	1.72948	56	1.42860	56	1.42830	56
52′	1.73004	57	1.42916	57	1.42886	57
10	1.73061	57	1.42973	57	1.42943	57
20	1.73118	56	1.43030	56	1.43000	56
30	1.73174	57	1.43086	57	1.43056	57
40	1.73231	57	1.43143	57	1.43113	57
50	1.73288	57	1.43200	57	1.43170	57
53′	1.73345	57	1.43257	57	1.43227	57
10	1.73402	57	1.43314	57	1.43284	57
20	1.73459	57	1.43371	57	1.43341	58
30	1.73516	58	1.43428	57	1.43399	57
40	1.73574	57	1.43485	58	1.43156	57
50	1.73631	57	1.43543	57	1.43513	58
54′	1.73688	58	1.43600	58	1.43571	57
10	1.73746	58	1.43653	57	1.43628	58
20	1.73804	59	1.43715	58	1.43686	58
30	1.73861	58	1.43773	57	1.43744	57
40	1.73919	58	1.43830	58	1.43801	58
50	1.73977	58	1.43888	58	1.43859	58
55′	1.74035	58	1.43946	58	1.43917	58
10	1.74093	58	1.44004	58	1.43975	58
20	1.74151	58	1.44062	58	1.44033	58
30	1.74209	58	1.44120	58	1.44091	59
40	1.74267	58	1.44178	58	1.44150	58
50	1.74325	59	1.44236	59	1.44208	58
56′	1.74384	58	1.44295	58	1.44266	59
10	1.74442	58	1.44353	58	1.44325	58
20	1.74500	59	1.44411	59	1.44383	59
30	1.74559	59	1.44170	59	1.44442	59
40	1.74618	58	1.44529	58	1.41501	58
50	1.74676	59	1.44587	59	1.44559	59
57′	1.74735	59	1.44646	59	1.44618	59
10	1.74794	59	1.44705	59	1.44677	59
20	1.74853	59	1.44764	59	1.44736	59
30	1.74912	59	1.44[illegible]23	59	1.44795	60
40	1.74971	60	1.44882	59	1.44855	59
50	1.75031	59	1.44941	60	1.44914	59
58′	1.75090	59	1.45001	59	1.44973	60
10	1.75149	60	1.45060	59	1.45033	59
20	1.75209	59	1.45119	60	1.45092	50
30	1.75268	60	1.45179	59	1.45152	59
40	1.75328	60	1.45238	60	1.45211	60
50	1.75388	59	1.45298	60	1.45271	60
59′	1.75447	60	1.45358	60	1.45331	60
10	1.75507	60	1.45418	60	1.45391	60
20	1.75567	60	1.45478	60	1.45451	60
30	1.75627	60	1.45538	60	1.45511	60
40	1.75687	61	1.45598	60	1.45571	60
50	1.75748	60	1.45658	60	1.45631	61
60′	1.75808		1.45718		1.45692	

ω	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.	ω	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0′	1,75808	60	1,45718	60	1,45692	60	10′	1,79587	66	1,49496	65	1,49473	66
10	1,75868	61	1,45778	61	1,45752	61	10	1,79653	66	1,49561	66	1,49539	66
20	1,75929	60	1,45839	60	1,45813	60	20	1,79719	66	1,49627	66	1,49605	66
30	1,75989	61	1,45899	61	1,45873	61	30	1,79785	66	1,49693	66	1,49671	66
40	1,76050	61	1,45960	61	1,45934	61	40	1,79851	67	1,49759	67	1,49737	67
50	1,76111	60	1,46021	60	1,45995	60	50	1,79918	66	1,49826	66	1,49804	66
1′	1,76171	61	1,46081	61	1,46055	61	11′	1,79984	67	1,49892	66	1,49870	67
10	1,76232	61	1,46142	61	1,46116	61	10	1,80051	66	1,49958	67	1,49937	66
20	1,76293	61	1,46203	61	1,46177	61	20	1,80117	67	1,50025	67	1,50003	67
30	1,76354	61	1,46264	61	1,46238	62	30	1,80184	67	1,50092	66	1,50070	67
40	1,76415	62	1,46325	61	1,46300	61	40	1,80251	66	1,50158	67	1,50137	67
50	1,76477	61	1,46386	62	1,46361	61	50	1,80317	67	1,50225	67	1,50204	67
2′	1,76538	61	1,46448	61	1,46422	62	12′	1,80384	68	1,50292	67	1,50271	67
10	1,76599	62	1,46509	62	1,46484	61	10	1,80452	67	1,50359	67	1,50338	67
20	1,76661	61	1,46571	61	1,46545	62	20	1,80519	67	1,50426	68	1,50405	67
30	1,76722	62	1,46632	62	1,46607	61	30	1,80586	67	1,50494	67	1,50472	68
40	1,76784	62	1,46694	61	1,46668	62	40	1,80653	68	1,50561	67	1,50540	67
50	1,76846	62	1,46755	62	1,46730	62	50	1,80721	68	1,50628	68	1,50607	68
3′	1,76908	62	1,46817	62	1,46792	62	13′	1,80789	67	1,50696	68	1,50675	68
10	1,76970	62	1,46879	62	1,46854	62	10	1,80856	68	1,50764	67	1,50743	68
20	1,77032	62	1,46941	62	1,46916	62	20	1,80924	68	1,50831	68	1,50811	68
30	1,77094	62	1,47003	62	1,46978	62	30	1,80992	68	1,50899	68	1,50879	68
40	1,77156	62	1,47065	63	1,47040	63	40	1,81060	68	1,50967	68	1,50947	68
50	1,77218	62	1,47128	62	1,47103	62	50	1,81128	68	1,51035	69	1,51015	68
4′	1,77280	63	1,47190	62	1,47165	63	14′	1,81196	69	1,51104	68	1,51083	68
10	1,77343	62	1,47252	63	1,47228	62	10	1,81265	68	1,51172	68	1,51151	69
20	1,77405	63	1,47315	62	1,47290	63	20	1,81333	69	1,51240	69	1,51220	69
30	1,77468	63	1,47377	63	1,47353	63	30	1,81402	68	1,51309	69	1,51289	68
40	1,77531	63	1,47440	63	1,47416	62	40	1,81470	69	1,51378	68	1,51357	69
50	1,77594	63	1,47503	63	1,47478	63	50	1,81539	69	1,51446	69	1,51426	69
5′	1,77657	63	1,47566	63	1,47541	63	15′	1,81608	69	1,51515	69	1,51495	69
10	1,77720	63	1,47629	63	1,47604	64	10	1,81677	69	1,51584	69	1,51564	69
20	1,77783	63	1,47692	63	1,47668	63	20	1,81746	69	1,51653	69	1,51633	69
30	1,77846	63	1,47755	63	1,47731	63	30	1,81815	70	1,51722	70	1,51702	70
40	1,77909	63	1,47818	63	1,47794	63	40	1,81885	69	1,51792	69	1,51772	69
50	1,77972	64	1,47881	64	1,47857	64	50	1,81954	70	1,51861	70	1,51841	70
6′	1,78036	63	1,47945	63	1,47921	64	16′	1,82024	69	1,51931	69	1,51911	69
10	1,78099	64	1,48008	64	1,47985	63	10	1,82093	70	1,52000	70	1,51980	70
20	1,78163	64	1,48072	64	1,48048	64	20	1,82163	70	1,52070	70	1,52050	70
30	1,78227	64	1,48136	63	1,48112	64	30	1,82233	70	1,52140	70	1,52120	70
40	1,78291	64	1,48199	64	1,48176	64	40	1,82303	70	1,52210	70	1,52190	70
50	1,78355	64	1,48263	64	1,48240	64	50	1,82373	70	1,52280	70	1,52260	71
7′	1,78419	64	1,48327	64	1,48304	64	17′	1,82443	71	1,52350	70	1,52331	70
10	1,78483	64	1,48391	65	1,48368	64	10	1,82514	70	1,52420	71	1,52401	71
20	1,78547	64	1,48456	64	1,48432	65	20	1,82584	71	1,52491	70	1,52472	70
30	1,78611	65	1,48520	64	1,48497	64	30	1,82655	70	1,52561	71	1,52542	71
40	1,78676	64	1,48584	65	1,48561	65	40	1,82725	71	1,52632	71	1,52613	71
50	1,78740	65	1,48649	64	1,48626	64	50	1,82796	71	1,52703	71	1,52684	71
8′	1,78805	64	1,48713	65	1,48690	65	18′	1,82867	71	1,52774	71	1,52755	71
10	1,78869	65	1,48778	65	1,48755	65	10	1,82938	71	1,52845	71	1,52826	71
20	1,78934	65	1,48843	65	1,48820	65	20	1,83009	72	1,52916	71	1,52897	71
30	1,78999	65	1,48908	64	1,48885	65	30	1,83081	71	1,52987	71	1,52968	72
40	1,79064	65	1,48972	65	1,48950	65	40	1,83152	72	1,53058	72	1,53040	71
50	1,79129	65	1,49037	66	1,49015	65	50	1,83224	71	1,53130	71	1,53111	72
9′	1,79194	66	1,49103	65	1,49080	65	19′	1,83295	72	1,53201	72	1,53183	72
10	1,79260	65	1,49168	65	1,49145	66	10	1,83367	72	1,53273	72	1,53255	71
20	1,79325	65	1,49233	66	1,49211	65	20	1,83439	72	1,53345	72	1,53326	72
30	1,79390	66	1,49299	65	1,49276	66	30	1,83511	72	1,53417	72	1,53398	73
40	1,79456	66	1,49364	66	1,49342	65	40	1,83583	72	1,53489	72	1,53471	72
50	1,79522	65	1,49430	66	1,49407	66	50	1,83655	72	1,53561	73	1,53543	72
10′	1,79587		1,49496		1,49473		20′	1,83727		1,53634		1,53615	

$\omega = 88$ Grad.

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
20'	1,83727	73	1,53634	72	1,53615	73
10	1,83800	72	1,53706	72	1,53688	72
20	1,83872	73	1,53778	73	1,53760	73
30	1,83945	73	1,53851	73	1,53833	73
40	1,84018	73	1,53924	73	1,53906	73
50	1,84091	73	1,53997	73	1,53979	73
21'	1,84164	73	1,54070	73	1,54052	73
10	1,84237	73	1,54143	73	1,54125	73
20	1,84310	74	1,54216	74	1,54198	74
30	1,84384	73	1,54290	73	1,54272	73
40	1,84457	74	1,54363	74	1,54345	74
50	1,84531	74	1,54437	74	1,54419	74
22'	1,84605	74	1,54511	74	1,54493	74
10	1,84679	74	1,54585	74	1,54567	74
20	1,84753	74	1,54659	74	1,54641	74
30	1,84827	74	1,54733	74	1,54715	75
40	1,84901	75	1,54807	74	1,54790	74
50	1,84976	74	1,54881	75	1,54864	75
23'	1,85050	75	1,54956	75	1,54939	74
10	1,85125	75	1,55031	74	1,55013	75
20	1,85200	75	1,55105	75	1,55088	75
30	1,85275	75	1,55180	75	1,55163	75
40	1,85350	75	1,55255	76	1,55238	76
50	1,85425	75	1,55331	75	1,55314	75
24'	1,85500	76	1,55406	75	1,55389	75
10	1,85576	76	1,55481	76	1,55464	76
20	1,85652	75	1,55557	76	1,55540	76
30	1,85727	76	1,55633	75	1,55616	76
40	1,85803	76	1,55708	76	1,55692	76
50	1,85879	76	1,55784	77	1,55768	76
25'	1,85955	77	1,55861	76	1,55844	76
10	1,86032	76	1,55937	76	1,55920	77
20	1,86108	76	1,56013	77	1,55997	76
30	1,86184	77	1,56090	76	1,56073	77
40	1,86261	77	1,56166	77	1,56150	77
50	1,86338	77	1,56243	77	1,56227	77
26'	1,86415	77	1,56320	77	1,56304	77
10	1,86492	77	1,56397	77	1,56381	77
20	1,86569	78	1,56474	78	1,56458	78
30	1,86647	77	1,56552	77	1,56536	77
40	1,86724	78	1,56629	78	1,56613	78
50	1,86802	77	1,56707	77	1,56691	77
27'	1,86879	78	1,56784	78	1,56768	78
10	1,86957	78	1,56862	78	1,56846	79
20	1,87035	79	1,56940	78	1,56925	78
30	1,87114	78	1,57018	79	1,57003	78
40	1,87192	78	1,57097	78	1,57081	79
50	1,87270	79	1,57175	79	1,57160	78
28'	1,87349	79	1,57254	79	1,57238	79
10	1,87428	79	1,57333	78	1,57317	79
20	1,87507	79	1,57411	79	1,57396	79
30	1,87586	79	1,57490	80	1,57475	79
40	1,87665	79	1,57570	79	1,57554	80
50	1,87744	80	1,57649	79	1,57634	79
29'	1,88824	79	1,57728	80	1,57713	80
10	1,87903	80	1,57808	80	1,57793	80
20	1,87983	70	1,57888	80	1,57873	79
30	1,88063	80	1,57968	80	1,57952	81
40	1,88143	80	1,58048	80	1,58033	80
50	1,88223	81	1,58128	80	1,58113	80
30'	1,88304		1,58208		1,58193	

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
30'	1,88304	80	1,58208	81	1,58193	81
10	1,88384	81	1,58289	80	1,58274	80
20	1,88465	81	1,58369	81	1,58354	81
30	1,88546	81	1,58450	81	1,58435	81
40	1,88627	81	1,58531	81	1,58516	81
50	1,88708	81	1,58612	81	1,58597	82
31'	1,88789	81	1,58693	82	1,58679	81
10	1,88870	82	1,58775	81	1,58760	82
20	1,88952	82	1,58856	82	1,58842	81
30	1,89034	82	1,58938	82	1,58923	82
40	1,89116	82	1,59020	82	1,59005	82
50	1,89198	82	1,59102	82	1,59087	83
32'	1,89280	82	1,59184	82	1,59170	82
10	1,89362	83	1,59266	83	1,59252	83
20	1,89445	82	1,59349	82	1,59335	82
30	1,89527	83	1,59431	83	1,59417	83
40	1,89610	83	1,59514	83	1,59500	83
50	1,89693	83	1,59597	83	1,59583	53
33'	1,89776	83	1,59680	83	1,59666	84
10	1,89859	84	1,59763	84	1,59750	83
20	1,89943	83	1,59847	83	1,59833	84
30	1,90026	84	1,59930	84	1,59917	83
40	1,90110	84	1,60014	84	1,60000	84
50	1,90194	84	1,60098	84	1,60084	84
34'	1,90278	85	1,60182	84	1,60168	85
10	1,90363	84	1,60266	85	1,60253	84
20	1,90447	85	1,60351	84	1,60337	85
30	1,90532	84	1,60435	85	1,60422	85
40	1,90616	85	1,60520	85	1,60507	85
50	1,90701	85	1,60605	85	1,60592	85
35'	1,90786	86	1,60690	85	1,60677	85
10	1,90872	85	1,60775	86	1,60762	85
20	1,90957	86	1,60861	85	1,60847	86
30	1,91043	85	1,60946	86	1,60933	86
40	1,91128	86	1,61032	86	1,61019	86
50	1,91214	86	1,61118	86	1,61105	86
36'	1,91300	87	1,61204	86	1,61191	86
10	1,91387	86	1,61290	86	1,61277	87
20	1,91473	87	1,61376	87	1,61364	86
30	1,91560	86	1,61463	87	1,61450	87
40	1,91646	87	1,61550	87	1,61537	87
50	1,91733	87	1,61637	87	1,61624	87
37'	1,91820	88	1,61724	87	1,61711	87
10	1,91908	87	1,61811	88	1,61798	88
20	1,91995	88	1,61899	87	1,61886	88
30	1,92083	88	1,61986	88	1,61974	88
40	1,92171	88	1,62074	88	1,62062	88
50	1,92259	88	1,62162	88	1,62150	88
38'	1,92347	88	1,62250	88	1,62238	88
10	1,92435	89	1,62338	89	1,62326	89
20	1,92524	89	1,62427	89	1,62415	88
30	1,92613	89	1,62516	89	1,62503	89
40	1,92702	89	1,62605	89	1,62592	80
50	1,92791	89	1,62694	89	1,62682	89
39'	1,92880	89	1,62783	89	1,62771	89
10	1,92969	90	1,62872	90	1,62860	90
20	1,93059	90	1,62962	90	1,62950	90
30	1,93149	90	1,63052	90	1,63040	90
40	1,93239	90	1,63142	90	1,63130	90
50	1,93329	90	1,63232	90	1,63220	91
40'	1,93419		1,63322		1,63311	

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.	ω	z	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
40'	1,93419		1,63322		1,63311		50'	1,99219		1,69121		1,69112	
10	1,93510	91	1,63413	91	1,63401	90	10	1,99323	104	1,69224	103	1,69215	103
20	1,93601	91	1,63504	91	1,63492	91	20	1,99426	103	1,69328	104	1,69319	104
30	1,93692	91	1,63595	91	1,63583	91	30	1,99530	104	1,69432	104	1,69423	104
40	1,93783	91	1,63686	91	1,63674	91	40	1,99635	105	1,69536	101	1,69527	104
50	1,93874	91	1,63777	91	1,63765	91	50	1,99739	104	1,69641	105	1,69632	105
41'	1,93966	92	1,63869	92	1,63857	92	51'	1,99844	105	1,69745	104	1,69737	105
10	1,94057	91	1,63960	91	1,63949	92	10	1,99949	105	1,69850	105	1,69842	105
20	1,94149	92	1,64052	92	1,64041	92	20	2,00054	105	1,69956	106	1,69947	105
30	1,94242	93	1,64144	92	1,64133	92	30	2,00160	106	1,70061	105	1,70053	106
40	1,94334	92	1,64236	92	1,64225	92	40	2,00266	106	1,70167	106	1,70158	105
50	1,94426	92	1,64329	93	1,64318	93	50	2,00372	106	1,70273	106	1,70264	106
42'	1,94519	93	1,64422	93	1,64410	92	52'	2,00478	106	1,70379	106	1,70371	107
10	1,94612	93	1,64515	93	1,64503	93	10	2,00585	107	1,70486	107	1,70477	106
20	1,94705	93	1,64608	93	1,64597	94	20	2,00692	107	1,70593	107	1,70584	107
30	1,94798	93	1,64701	93	1,64690	93	30	2,00799	107	1,70700	107	1,70691	107
40	1,94892	94	1,64794	93	1,64783	93	40	2,00906	107	1,70807	107	1,70799	108
50	1,94986	94	1,64888	94	1,64877	94	50	2,01014	108	1,70915	108	1,70906	107
43'	1,95079	93	1,64982	94	1,64971	94	53'	2,01122	108	1,71023	108	1,71014	108
10	1,95174	95	1,65076	94	1,65065	94	10	2,01230	108	1,71131	108	1,71123	109
20	1,95268	94	1,65170	94	1,65160	95	20	2,01338	108	1,71239	108	1,71231	108
30	1,95362	94	1,65265	95	1,65254	94	30	2,01447	109	1,71348	109	1,71340	109
40	1,95457	95	1,65360	95	1,65349	95	40	2,01556	109	1,71457	109	1,71449	109
50	1,95552	95	1,65454	94	1,65444	95	50	2,01665	109	1,71566	109	1,71558	119
44'	1,95647	95	1,65550	96	1,65539	95	54'	2,01775	110	1,71676	110	1,71668	100
10	1,95743	96	1,65645	95	1,65634	95	10	2,01884	109	1,71785	109	1,71777	109
20	1,95838	95	1,65740	95	1,65730	96	20	2,01995	111	1,71896	111	1,71888	111
30	1,95934	96	1,65836	96	1,65826	96	30	2,02105	110	1,72006	110	1,71998	110
40	1,96030	96	1,65932	96	1,65922	96	40	2,02216	111	1,72117	111	1,72109	111
50	1,96126	96	1,66028	96	1,66018	96	50	2,02327	111	1,72227	110	1,72220	111
45'	1,96223	97	1,66125	97	1,66114	96	55'	2,02438	111	1,72339	112	1,72331	111
10	1,96319	96	1,66221	96	1,66211	97	10	2,02549	111	1,72450	111	1,72442	111
20	1,96116	97	1,66318	97	1,66308	77	20	2,02661	112	1,72562	112	1,72554	112
30	1,96513	97	1,66415	97	1,66405	97	30	2,02773	112	1,72674	112	1,72666	112
40	1,96610	97	1,66512	97	1,66502	97	40	2,02886	113	1,72786	112	1,72779	113
50	1,96708	98	1,66610	98	1,66600	98	50	2,02998	112	1,72899	113	1,72891	112
46'	1,96806	98	1,66708	98	1,66698	98	56'	2,03111	113	1,73012	113	1,73004	113
10	1,96903	97	1,66805	97	1,66795	97	10	2,03224	113	1,73125	113	1,73118	114
20	1,97002	99	1,66904	99	1,66894	99	20	2,03338	114	1,73239	114	1,73231	113
30	1,97100	98	1,67002	98	1,66992	98	30	2,03452	111	1,73352	113	1,73345	114
40	1,97199	99	1,67101	99	1,67091	99	40	2,03566	114	1,73467	115	1,73459	114
50	1,97297	98	1,67199	98	1,67190	99	50	2,03680	114	1,73581	114	1,73574	115
47'	1,97396	99	1,67298	99	1,67289	99	57'	2,03795	115	1,73696	115	1,73688	114
10	1,97496	100	1,67398	100	1,67388	99	10	2,03910	115	1,73811	115	1,73804	116
20	1,97595	99	1,67497	99	1,67487	99	20	2,04026	116	1,73926	115	1,73919	115
30	1,97695	100	1,67597	100	1,67587	100	30	2,04141	115	1,74042	116	1,74035	116
40	1,97795	100	1,67697	100	1,67687	100	40	2,04257	116	1,74158	116	1,74151	116
50	1,97895	100	1,67797	100	1,67787	100	50	2,04373	116	1,74274	116	1,74267	116
48'	1,97996	101	1,67897	100	1,67888	101	58'	2,04490	117	1,74391	117	1,74384	117
10	1,98096	100	1,67998	101	1,67988	100	10	2,04607	117	1,74507	116	1,74500	116
20	1,98197	101	1,68099	101	1,68089	101	20	2,04724	117	1,74625	118	1,74618	118
30	1,98298	101	1,68200	101	1,68191	102	30	2,04842	118	1,74742	117	1,74735	117
40	1,98400	102	1,68301	101	1,68292	101	40	2,04960	118	1,74860	118	1,74853	118
50	1,98501	101	1,68403	102	1,68391	102	50	2,05078	118	1,74978	118	1,74971	118
49'	1,98603	102	1,68505	102	1,68495	101	59'	2,05196	118	1,75097	119	1,75090	119
10	1,98705	102	1,68607	102	1,68597	102	10	2,05315	119	1,75215	118	1,75209	119
20	1,98807	102	1,68709	102	1,68700	103	20	2,05434	119	1,75335	120	1,75328	119
30	1,98910	103	1,68812	103	1,68802	102	30	2,05554	120	1,75454	119	1,75447	119
40	1,99013	103	1,68914	102	1,68905	103	40	2,05674	120	1,75574	120	1,75567	120
50	1,99116	103	1,69017	103	1,69008	103	50	2,05794	120	1,75694	120	1,75687	120
50'	1,99219	103	1,69121	104	1,69112	104	60'	2,05914	120	1,75814	120	1,75808	121

ω = 89 Grad.

ω	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
0′	2,05914	121	1,75814	121	1,75808	121
10	2,06035	121	1,75935	121	1,75929	121
20	2,06156	122	1,76056	122	1,76050	121
30	2,06278	121	1,76178	122	1,76171	122
40	2,06399	123	1,76300	122	1,76293	122
50	2,06522	122	1,76422	122	1,76415	123
1′	2,06644	123	1,76544	123	1,76538	123
10	2,06767	123	1,76667	123	1,76661	123
20	2,06890	124	1,76790	124	1,76784	124
30	2,07014	124	1,76914	124	1,76908	124
40	2,07138	124	1,77038	124	1,77032	124
50	2,07262	125	1,77162	125	1,77156	124
2′	2,07387	125	1,77287	125	1,77280	125
10	2,07512	125	1,77412	125	1,77405	126
20	2,07637	126	1,77537	126	1,77531	126
30	2,07763	126	1,77663	126	1,77657	126
40	2,07889	126	1,77789	126	1,77783	126
50	2,08015	127	1,77915	127	1,77909	127
3′	2,08142	127	1,78042	127	1,78036	127
10	2,08269	128	1,78169	128	1,78163	128
20	2,08397	128	1,78297	127	1,78291	128
30	2,08525	128	1,78424	129	1,78419	128
40	2,08653	129	1,78553	128	1,78547	129
50	2,08782	129	1,78681	130	1,78676	129
4′	2,08911	129	1,78811	129	1,78805	129
10	2,09040	130	1,78940	130	1,78934	120
20	2,09170	130	1,79070	130	1,79064	120
30	2,09300	131	1,79200	131	1,79194	131
40	2,09431	131	1,79331	131	1,79325	131
50	2,09562	131	1,79462	131	1,79456	131
5′	2,09693	132	1,79593	132	1,79587	132
10	2,09825	132	1,79725	132	1,79719	132
20	2,09957	133	1,79857	133	1,79851	133
30	2,10090	133	1,79990	133	1,79984	133
40	2,10223	133	1,80123	133	1,80117	134
50	2,10356	134	1,80256	134	1,80251	133
6′	2,10490	134	1,80390	134	1,80384	135
10	2,10624	135	1,80524	135	1,80519	134
20	2,10759	135	1,80659	135	1,80653	136
30	2,10894	136	1,80794	135	1,80789	135
40	2,11030	136	1,80929	136	1,80924	136
50	2,11166	136	1,81065	137	1,81060	136
7′	2,11302	137	1,81202	136	1,81196	137
10	2,11439	137	1,81338	138	1,81333	137
20	2,11576	138	1,81476	137	1,81470	138
30	2,11714	138	1,81613	138	1,81608	138
40	2,11852	138	1,81751	139	1,81746	139
50	2,11990	139	1,81890	139	1,81885	139
8′	2,12129	140	1,82029	139	1,82024	139
10	2,12269	140	1,82168	140	1,82163	140
20	2,12409	140	1,82308	140	1,82303	140
30	2,12549	141	1,83418	141	1,82443	141
40	2,12690	141	1,82589	141	1,82584	141
50	2,12831	142	1,82730	142	1,82725	142
9′	2,12973	142	1,82872	142	1,82867	142
10	2,13115	142	1,83014	143	1,83009	143
20	2,13257	143	1,83157	143	1,83152	143
30	2,13400	144	1,83300	143	1,83295	144
40	2,13544	144	1,83443	144	1,83439	144
50	2,13688	145	1,83587	145	1,83583	144
10′	2,13833		1,83732		1,83727	

ω	z′	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
10′	2,13833	145	1,83732	145	1,83727	145
10	2,13978	145	1,83877	145	1,83872	146
20	2,14123	146	1,84022	146	1,84018	146
30	2,14269	147	1,84168	147	1,84164	146
40	2,14416	147	1,84315	147	1,84310	147
50	2,14563	147	1,84462	147	1,84457	148
11′	2,14710	148	1,84609	148	1,84605	148
10	2,14858	149	1,84757	149	1,84753	148
20	2,15007	148	1,84906	149	1,84901	149
30	2,15155	150	1,85055	149	1,85050	150
40	2,15305	150	1,85204	150	1,85200	150
50	2,15455	151	1,85354	151	1,85350	150
12′	2,15606	151	1,85505	151	1,85500	152
10	2,15757	151	1,85656	151	1,85652	151
20	2,15908	152	1,85807	152	1,85803	152
30	2,16060	153	1,85959	153	1,85955	153
40	2,16213	153	1,86112	153	1,86108	153
50	2,16366	154	1,86265	154	1,86261	154
13′	2,16520	154	1,86419	154	1,86415	154
10	2,16674	155	1,86573	155	1,86569	155
20	2,16829	155	1,86728	155	1,86724	155
30	2,16984	156	1,86883	156	1,86879	156
40	2,17140	157	1,87039	157	1,87035	157
50	2,17297	157	1,87196	157	1,87192	157
14′	2,17454	158	1,87353	158	1,87349	158
10	2,17612	158	1,87511	158	1,87507	158
20	2,17770	159	1,87669	159	1,87665	159
30	2,17929	159	1,87828	159	1,87824	159
40	2,18088	160	1,87987	160	1,87983	160
50	2,18248	161	1,88147	160	1,88143	161
15′	2,18409	161	1,88307	162	1,88304	161
10	2,18570	161	1,88169	161	1,88165	162
20	2,18731	163	1,88630	163	1,88627	162
30	2,18894	163	1,88793	163	1,88789	163
40	2,19057	163	1,88956	163	1,88952	164
50	2,19220	165	1,89119	164	1,89116	164
16′	2,19385	164	1,89283	165	1,89280	165
10	2,19549	166	1,89448	166	1,89445	165
20	2,19715	166	1,89614	166	1,89610	166
30	2,19881	167	1,89780	166	1,89776	167
40	2,20048	167	1,89946	168	1,89943	167
50	2,20215	168	1,90114	168	1,90110	168
17′	2,20383	169	1,90282	168	1,90278	169
10	2,20552	169	1,90450	170	1,90447	169
20	2,20721	170	1,90620	170	1,90616	170
30	2,20891	171	1,90790	170	1,90786	171
40	2,21062	171	1,90960	172	1,90957	171
50	2,21233	172	1,91132	172	1,91128	172
18′	2,21405	173	1,91304	172	1,91300	173
10	2,21578	173	1,91476	174	1,91473	173
20	2,21751	174	1,91650	174	1,91646	174
30	2,21925	175	1,91824	174	1,91820	175
40	2,22100	175	1,91998	176	1,91995	176
50	2,22275	176	1,92174	176	1,92171	176
19′	2,22451	177	1,92350	177	1,92347	177
10	2,22628	178	1,92527	178	1,92524	178
20	2,22806	178	1,92705	178	1,92702	178
30	2,22984	179	1,92888	179	1,92880	179
40	2,23163	180	1,93062	180	1,93059	180
50	2,23343	181	1,93242	180	1,93239	180
20′	2,23524		1,93422		1,93419	

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
20'	2,23524	181	1,93422	182	1,93419	182
10	2,23705	182	1,93604	182	1,93601	182
20	2,23887	183	1,93786	183	1,93783	183
30	2,24070	184	1,93969	183	1,93966	183
40	2,24254	184	1,94152	185	1,94149	185
50	2,24438	185	1,94337	185	1,94334	185
21'	2,24623	186	1,94522	186	1,94519	186
10	2,24809	187	1,94708	187	1,94705	187
20	2,24996	188	1,94895	187	1,94892	187
30	2,25184	188	1,95082	189	1,95079	189
40	2,25372	190	1,95271	189	1,95268	189
50	2,25562	190	1,95460	190	1,95457	190
22'	2,25752	190	1,95650	191	1,95647	191
10	2,25942	192	1,95841	192	1,95838	192
20	2,26134	193	1,96033	192	1,96030	193
30	2,26327	193	1,96225	194	1,96223	193
40	2,26520	195	1,96419	194	1,96416	194
50	2,26715	195	1,96613	195	1,96610	196
23'	2,26910	196	1,96808	196	1,96806	196
10	2,27106	197	1,97004	197	1,97002	197
20	2,27303	198	1,97201	198	1,97199	197
30	2,27501	198	1,97399	199	1,97396	199
40	2,27699	200	1,97598	199	1,97595	200
50	2,27899	201	1,97797	201	1,97795	201
24'	2,28100	201	1,97998	201	1,97996	201
10	2,28301	203	1,98199	203	1,98197	203
20	2,28504	203	1,98402	203	1,98400	203
30	2,28707	205	1,98605	205	1,98603	204
40	2,28912	205	1,98810	205	1,98807	206
50	2,29117	206	1,99015	206	1,99013	206
25'	2,29323	208	1,99221	208	1,99219	207
10	2,29531	208	1,99429	208	1,99426	209
20	2,29739	209	1,99637	209	1,99635	209
30	2,29948	210	1,99846	211	1,99844	210
40	2,30158	212	2,00057	211	2,00054	212
50	2,30370	212	2,00268	212	2,00266	212
26'	2,30582	214	2,00480	214	2,00478	214
10	2,30796	214	2,00694	214	2,00692	214
20	2,31010	216	2,00908	216	2,00906	216
30	2,31226	216	2,01124	216	2,01122	216
40	2,31442	218	2,01340	218	2,01338	218
50	2,31660	219	2,01558	219	2,01556	219
27'	2,31879	220	2,01777	220	2,01775	220
10	2,32099	221	2,01997	221	2,01995	221
20	2,32320	222	2,02218	222	2,02216	222
30	2,32542	223	2,02440	223	2,02438	223
40	2,32765	224	2,02663	224	2,02660	225
50	2,32989	226	2,02887	226	2,02886	225
28'	2,33215	227	2,03113	227	2,03111	227
10	2,33442	228	2,03340	228	2,03338	228
20	2,33670	229	2,03568	229	2,03566	229
30	2,33899	230	2,03797	230	2,03795	231
40	2,34129	232	2,04027	232	2,04026	231
50	2,34361	233	2,04259	233	2,04257	233
29'	2,34594	234	2,04492	234	2,04490	234
10	2,34828	235	2,04726	235	2,04724	236
20	2,35063	237	2,04961	237	2,04960	236
30	2,35300	238	2,05198	238	2,05196	238
40	2,35538	239	2,05436	239	2,05434	240
50	2,35777	241	2,05675	241	2,05674	240
30'	2,36018		2,05916		2,05914	

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
30'	2,36018	242	2,05916	242	2,05914	242
10	2,36260	243	2,06158	243	2,06156	243
20	2,36503	245	2,06401	245	2,06399	245
30	2,36748	246	2,06646	246	2,06644	246
40	2,36994	247	2,06892	247	2,06890	248
50	2,37241	249	2,07139	249	2,07138	249
31'	2,37490	251	2,07388	250	2,07387	250
10	2,37741	251	2,07638	252	2,07637	252
20	2,37992	254	2,07890	253	2,07889	253
30	2,38246	254	2,08143	255	2,08142	255
40	2,38500	257	2,08398	256	2,08397	256
50	2,38757	257	2,08654	258	2,08653	258
32'	2,39014	260	2,08912	259	2,08911	259
10	2,39274	260	2,09171	261	2,09170	261
20	2,39534	263	2,09432	263	2,09431	262
30	2,39797	264	2,09695	264	2,09693	264
40	2,40061	266	2,09959	265	2,09957	266
50	2,40327	267	2,10224	267	2,10223	267
33'	2,40594	269	2,10491	269	2,10490	269
10	2,40863	270	2,10760	271	2,10759	271
20	2,41133	273	2,11031	272	2,11030	272
30	2,41406	274	2,11303	274	2,11302	274
40	2,41680	275	2,11577	276	2,11576	276
50	2,41955	278	2,11853	277	2,11852	277
34'	2,42233	279	2,12130	280	2,12129	280
10	2,42512	281	2,12410	281	2,12409	281
20	2,42793	283	2,12691	283	2,12690	283
30	2,43076	285	2,12974	285	2,12973	284
40	2,43361	287	2,13259	286	2,13257	287
50	2,43648	288	2,13545	289	2,13544	289
35'	2,43936	291	2,13834	290	2,13833	290
10	2,44227	292	2,14124	293	2,14123	293
20	2,44519	295	2,14417	294	2,14416	294
30	2,44814	296	2,14711	297	2,14710	297
40	2,45110	299	2,15008	298	2,15007	298
50	2,45409	300	2,15306	301	2,15305	301
36'	2,45709	303	2,15607	302	2,15606	302
10	2,46012	305	2,15909	305	2,15908	305
20	2,46317	306	2,16214	307	2,16213	307
30	2,46623	310	2,16521	309	2,16520	309
40	2,46933	311	2,16830	311	2,16829	311
50	2,47244	313	2,17141	314	2,17140	314
37'	2,47557	316	2,17455	316	2,17454	316
10	2,47873	318	2,17771	318	2,17770	318
20	2,48191	321	2,18089	320	2,18088	321
30	2,48512	323	2,18409	323	2,18409	322
40	2,48835	325	2,18732	326	2,18731	326
50	2,49160	328	2,19058	327	2,19057	328
38'	2,49488	330	2,19385	331	2,19385	330
10	2,49818	333	2,19716	332	2,19715	333
20	2,50151	335	2,20048	336	2,20048	335
30	2,50486	338	2,20384	338	2,20383	338
40	2,50824	341	2,20722	340	2,20721	341
50	2,51165	343	2,21062	344	2,21062	343
39'	2,51508	346	2,21406	346	2,21405	346
10	2,51854	349	2,21752	349	2,21751	349
20	2,52203	352	2,22101	351	2,22100	351
30	2,52555	354	2,22452	355	2,22451	355
40	2,52909	358	2,22807	357	2,22806	357
50	2,53267	360	2,23164	361	2,23163	361
40'	2,53627		2,23525		2,23524	

ω = 89 Grad.

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
40'	2.53627	364	2,23525	363	2,23524	363
10	2.53991	366	2,23888	367	2,23887	367
20	2.54357	370	2,24255	369	2,24254	369
30	2.54727	373	2,24624	373	2,24623	373
40	2.55100	376	2,24997	376	2,24996	376
50	2.55476	379	2,25373	379	2,25372	380
41'	2.55855	383	2,25752	383	2,25752	382
10	2.56238	386	2,26135	386	2,26134	386
20	2.56624	389	2,26521	389	2,26520	390
30	2.57013	393	2,26910	393	2,26910	393
40	2.57406	397	2,27303	397	2,27303	396
50	2.57803	400	2,27700	400	2,27699	401
42'	2.58203	404	2,28100	404	2,28100	404
10	2.58607	408	2,28504	408	2,28504	408
20	2.59015	411	2,28912	412	2,28912	411
30	2.59426	416	2,29324	415	2,29323	416
40	2.59842	420	2,29739	420	2,29739	419
50	2.60262	423	2,30159	424	2,30158	424
43'	2.60685	428	2,30583	428	2,30582	428
10	2.61113	432	2,31011	432	2,31010	432
20	2.61545	437	2,31443	436	2,31442	437
30	2.61982	441	2,31879	441	2,31879	441
40	2.62423	445	2,32320	445	2,32320	445
50	2.62868	450	2,32765	451	2,32765	450
44'	2.63318	455	2,33216	454	2,33215	455
10	2.63773	460	2,33671	460	2,33670	459
20	2.64233	464	2,34130	464	2,34129	465
30	2.64697	470	2,34594	470	2,34594	469
40	2.65167	474	2,35064	475	2,35063	475
50	2.65641	480	2,35539	479	2,35538	480
45'	2.66121	485	2,36018	486	2,36018	485
10	2.66606	491	2,36504	490	2,36503	491
20	2.67097	497	2,36994	497	2,36994	496
30	2.67594	502	2,37491	502	2,37490	502
40	2.68096	508	2,37993	508	2,37992	508
50	2.68604	514	2,38501	514	2,38500	514
46'	2.69118	520	2,39015	520	2,39014	520
10	2.69638	526	2,39535	526	2,39534	527
20	2.70164	533	2,40061	533	2,40061	533
30	2.70697	539	2,40594	540	2,40594	539
40	2.71236	547	2,41134	546	2,41133	547
50	2.71783	553	2,41680	553	2,41680	553
47'	2.72336	560	2,42233	561	2,42233	560
10	2.72896	568	2,42794	567	2,42798	568
20	2.73464	575	2,43361	575	2,43361	575
30	2.74039	583	2,43936	583	2,43936	583
40	2.74622	591	2,44519	591	2,44519	591
50	2.75213	599	2,45110	599	2,45110	599
48'	2.75812	608	2,45709	608	2,45709	608
10	2.76420	616	2,46317	616	2,46317	616
20	2.77036	625	2,46933	625	2,46933	624
30	2.77661	634	2,47558	634	2,47557	634
40	2.78295	643	2,48192	643	2,48191	644
50	2.78938	653	2,48835	653	2,48835	653
49'	2.79591	663	2,49488	663	2,49488	663
10	2.80254	673	2,50151	674	2,50151	673
20	2.80927	684	2,50825	684	2,50824	684
30	2.81611	695	2,51509	694	2,51508	695
40	2.82306	706	2,52203	707	2,52203	706
50	2.83012	718	2,52910	717	2,52909	718
50'	2.83730		2,53627		2,53627	

ω	z'	Diff.	log Cos z	Diff.	log Sin z	Diff.
50'	2.83730	730	2,53627	730	2,53627	730
10	2.84460	743	2,54357	743	2,54357	743
20	2.85203	755	2,55100	756	2,55100	755
30	2.85958	769	2,55855	769	2,55855	769
40	2.86727	782	2,56624	782	2,56624	782
50	2.87509	797	2,57406	797	2,57406	797
51'	2.88306	812	2,58203	812	2,58203	812
10	2.89118	827	2,59015	827	2,59015	827
20	2.89945	843	2,59842	844	2,59842	843
30	2.90788	860	2,60686	860	2,60685	860
40	2.91648	878	2,61546	877	2,61545	878
50	2.92526	895	2,62423	895	2,62423	895
52'	2.93421	915	2,63318	915	2,63318	915
10	2.94336	934	2,64233	934	2,64233	934
20	2 95270	954	2,65167	954	2,65167	954
30	2.96224	976	2,66121	976	2,66121	976
40	2.97200	999	2,67097	999	2,67097	999
50	2.98199	1022	2,68096	1022	2,68096	1022
53'	2.99221	1046	2,69118	1046	2,69118	1046
10	3.00267	1073	2,70164	1073	2,70164	1072
20	3.01340	1099	2,71237	1099	2,71236	1100
30	3.02439	1128	2,72336	1128	2,72336	1128
40	3.03567	1158	2,73464	1158	2,73464	1158
50	3.04725	1190	2,74622	1190	2,74622	1190
54'	3.05915	1224	2,75812	1224	2,75812	1224
10	3.07139	1259	2,77036	1259	2,77036	1259
20	3.08398	1296	2,78295	1296	2,78295	1296
30	3.09691	1337	2,79591	1337	2,79591	1336
40	3.11031	1378	2,80928	1378	2,80927	1379
50	3.12409	1424	2,82306	1424	2,82306	1424
55'	3.13833	1473	2,83730	1473	2,83730	1473
10	3.15306	1524	2,85203	1524	2,85203	1524
20	3.16830	1579	2,86727	1579	2,86727	1579
30	3.18409	1639	2,88306	1639	2,88306	1639
40	3.20048	1704	2,89945	1704	2,89945	1703
50	2.21752	1772	2,91649	1772	2,91648	1773
56'	3.23524	1849	2,93421	1849	2,93421	1849
10	3.25373	1930	2,95270	1930	2,95270	1930
20	3.27303	2021	2,97200	2021	2,97200	2021
30	3.29324	2119	2,99221	2119	2,99221	2119
40	3.31443	2227	3,01340	2227	3,01340	2227
50	3.33670	2318	3,03567	2348	3,03567	2348
57'	3 36018	2483	3,05915	2483	3,05915	2483
10	3.38501	2633	3,08398	2633	3,08398	2633
20	3.41134	2802	3,11031	2802	3,11031	2802
30	3.43936	2997	3,13833	2997	3,13833	2997
40	3.46933	3218	3,16830	3218	3,16830	3218
50	3.50151	3476	3,20048	3476	3,20048	3476
58	3.53627	3779	3,23524	3779	3,23524	3779
10	3.57406	4140	3,27303	4140	3,27303	4140
20	3.61546	4575	3,31443	4575	3,31443	4575
30	3.66121	5116	3,36018	5116	3,36018	5116
40	3.71237	5799	3,41131	5799	3,41134	5799
50	3.77036	6694	3,46933	6694	3,46933	6694
59'	3.83730	7919	3,53627	7919	3,53627	7919
10	3.91649	9691	3,61546	9691	3,61546	9691
20	4.01340	12493	3,71237	12493	3,71237	12493
30	4.13833	17610	3,83730	17610	3,83730	17610
40	4.31443	30103	4,01340	30103	4,01340	30103
50	4.61546		4,31443		4,31443	
60'	∞		∞		∞	

Druckfehler in der Abhandlung.

Seite 3 Zeile 13 lies 74° 35' 7'' statt 74° 36' 4''.
Seite 4 Zeile 8 von unten lies von deren constantem statt von dem constanten.
Seite 10 Zeile 1 von unten. Es fehlt am Rande Fig. 2.
Seite 11 Zeile 4. Ueber den Punkt K ist keine Auskunft gegeben. Es ist derjenige Punkt, in welchem die in Fig. 2 noch zu ziehende Linie CF die schon vorhandene Linie BH trifft.
Seite 19 Zeile 1 von unten lies zweimal f^3 statt f^2.
Seite 20 Zeile 11 von unten lies $\sqrt[3]{K-L}$ statt $\sqrt[3]{K+L}$.
Seite 20 Zeile 5 von unten lies Cos z statt Cos.
Seite 24 Zeile 3 v. u. lies f^3 statt f^2 und ferner lies $-\sqrt{g^2-f^3}$ statt $+\sqrt{g^2-f^3}$.
Seite 33 Zeile 6 v. u. lies 2,5331038 statt 2,5331028.
Seite 33 Zeile 3 v. u. Aus log. tg $\frac{v}{2} = 0.2968373$ folgt nach Shortrede's Tafeln von 1858, v = 126° 25' 34'', so dass nur $\Delta = 0'', 04$ ist.
Seite 39. Beispiel 12. Eine etwas sorgsamere Rechnung mit den fünfstelligen Tafeln giebt e nicht = 1, 1, sondern e = 1,0999.
Seite 56 Zeile 10 v. u. lies $\frac{\alpha^4}{5^4}$ statt $\frac{\alpha_4}{5^4}$.
Seite 56 Zeile 4 v. u. lies α^2 statt α^3.
Auf den jetzt entbehrlichen Seiten 67 und 68 befinden sich auch noch ein Paar Fehler, die sich indess aus den Tafeln leicht corrigiren lassen.

Druckfehler in den Tafeln.

1) bei den z'

ω	Lies	Statt
2° 27' 30''	(1)18640	(1)48640
3° 5' 20''	(1)23425	(1)25425
40° 14'	0.33364	2.33364
45° 25'	0.38726	0.31726
51° 55'	0.46200	0.43200
54° 48'	0.49864	0.47864

2) bei *Diff.* z'

ω	Lies	Statt
33° 47'	15	25
61° 32'	27	37
65° 36'	30	20
79° 29'	70	60
79° 37'	71	61
79° 40'	71	61
88° 29' 20''	80	70

3) bei *log Cos z*

ω	Lies	Statt
2° 31' 0''	(3)41908	(4)41908
2° 31' 10''	(3)42001	(4)42001
2° 31' 20''	(3)42094	(4)42094
41° 31'	0,12566	0,13566
41° 35'	0,12610	0,15610
41° 39'	0,12655	0,11655
46° 3'	0,15862	0,13862
56° 44'	0,26079	0,23079
66° 44'	0,46339	0,49339
66° 45'	0,46368	0,49368
85° 57'	1,15103	1,14103
86° 1' 50''	0,15974	1,45974

4) bei *Diff. log Cos z*

ω	Lies	Statt
9° 13'	205	275
10° 44'	240	230
19° 22'	44	54
19° 43'	46	56
45° 48'	13	43
74° 8'	45	15
78° 35'	63	33
81° 20'	83	23
85° 59' 20''	30	20
87° 32' 20''	50	40

5) bei *log Sin z*

ω	Lies	Statt
2° 12' 50''	8,58725	8,68725
2° 13' 50''	8,59051	8,69051
2° 17' 20''	8,60173	8,50173
13° 6'	9,36681	9,38681
34° 33'	9,83795	9,82795
35° 24'	9,85166	9,45166
37° 27'	9,88420	9,80420
47° 57'	(1)4480,0	(1)5480,0
50° 53'	(1)8982,3	(1)8582,3
60° 16'	0,24324	0,25324
69° 49'	0,43463	0,42463
86° 35' 20''	1,22471	1,23471
86° 36' 30''	1,22720	1,12720
86° 48' 10''	1,25290	1,23290

6) bei *Diff. log Sin z*

ω	Lies	Statt
12° 44'	59	29
22' 15'	36	26
36° 3'	26	36
36° 16'	26	36
76° 38'	56	66
86° 52' 20''	38	28
87° 58' 20''	60	50
88° 38' 40''	90	80
88° 45' 20''	97	77
88° 53' 40''	109	119
88° 53' 50''	110	100

